1. Residuensatz

1.1 Residuum

→ Definition: Der *Residuum* $Res(f|z_0)$ der Funktion f an der Stelle z_0 ist definiert als der (-1)-te Koeffizient c_{-1} der Laurententwicklung von f mit Entwicklungspunkt z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

also das was $\frac{1}{z-z_0}$ multipliziert

→ Berechnung von $Res(f|z_k)$

i. Pole n-te Ordnung

$$\boxed{Res(f|z_i) := \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_i)^n f(z) \right]}$$

ii. Pole 1. Ordnung

$$\boxed{Res(f|z_i) = \lim_{z \to z_i} (z-z_i) f(z)} \quad \text{oder} \quad \boxed{Res(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

falls $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ und $h(z_i) \neq 0$

iii. Wesentliche Singularitäten

⇒ Laurententwicklung

2.2 Residuensatz

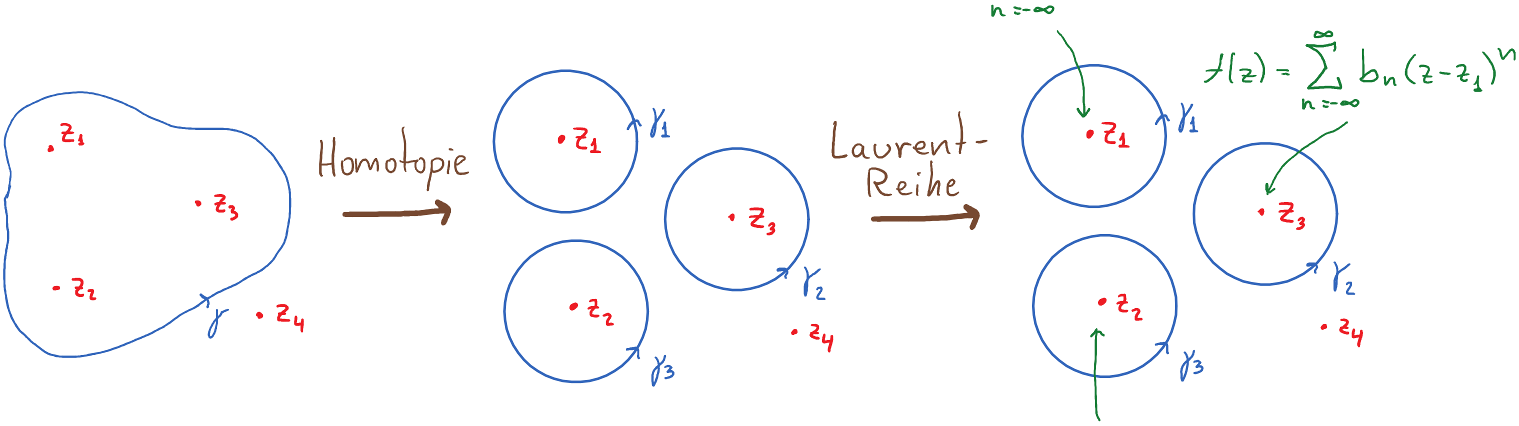
→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in U

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_k Ind_\gamma(z_k) \cdot Res(f|z_k)}$$

wobei z_k innerhalb $A(\gamma)$ liegt

1. Residuensatz

Beweis: Residuensatz



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\cdot \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

$$= \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\cdot \int_{\gamma_k} \sum_i c_i^k (z-z_k)^i\,dz$$

→ Wir verwenden die Eigenschaft $\int_{\gamma'} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, falls $z_0 \in A(\gamma')$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\cdot 2\pi i\, c_{-1}^k \rightsquigarrow c_{-1}^k =: \mathrm{Res}(f|z_k)$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\, \mathrm{Res}(f|z_k)$$

■

Beispiel: Finde $\mathrm{Res}(f|z=0)$ für $f(z) = z^3 e^{2/z}$

(Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$)

$$z^3 e^{2/z} = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\,\frac{1}{z^{k-3}}$$

$c_{-1} \Rightarrow$ das was $\frac{1}{z}$ multipliziert

$\Downarrow$

also bei $k=4$

bei $k=2 \Rightarrow c_{-1} = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z=0) = \frac{2}{3}$$

1. Residuensatz

Beispiel: Finde $\mathrm{Res}(f|z_k)$ für alle Singularitäten z_k für $f(z) = \tan(z)$

→ $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ ⇒ Singularitäten von $\tan(z)$ sind die Nullstellen von $\cos(z)$

⇒ 1. Ordnung an der Stelle $z = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

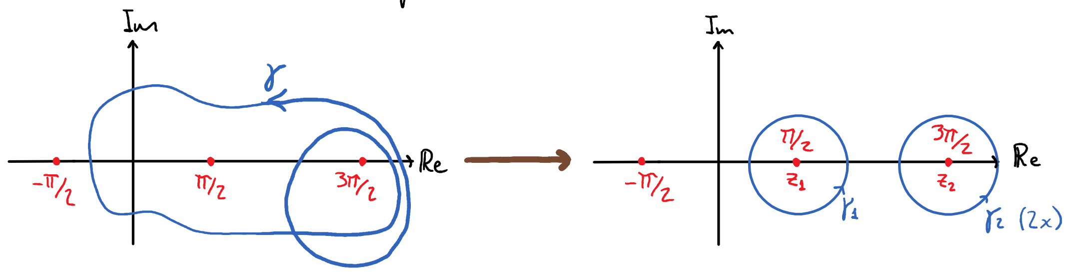
→ Da $\cos(z)$ periodisch ist, haben alle Singularitäten identische Eigenschaften

⇒ $\mathrm{Res}(f|z=\frac{\pi}{2}) = \mathrm{Res}(f|z=\frac{3\pi}{2})$ usw

$$\mathrm{Res}(f|\pi/2) = \lim_{z\to\pi/2}(z-\pi/2)\tan(z) = \lim_{z\to\pi/2}(z-\pi/2)\frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \lim_{z\to\pi/2}\frac{\sin(z)+(z-\pi/2)\cos(z)}{-\sin(z)} = -1$$

oder $f(z) = \frac{\sin(z) \to h(z)}{\cos(z) \to g(z)}$ ⇒ $\mathrm{Res}(f|\pi/2) = \frac{h(\pi/2)}{g'(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = -1$

Beispiel: Berechne $\int_\gamma \tan(z)\,dz$



$\mathrm{Res}(f|\pi/2) = \mathrm{Res}(f|3\pi/2) = -1$

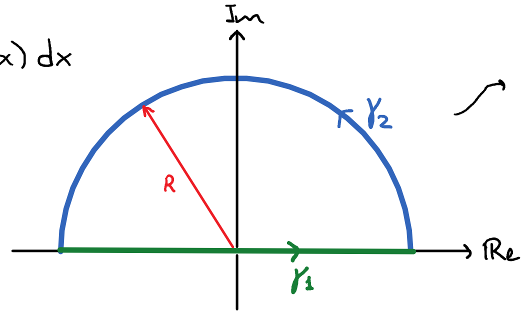
$$\Rightarrow \int_\gamma \tan(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\,\mathrm{Res}(f|z_k) = 2\pi i\,(1\cdot(-1) + 2(-1)) = -6\pi i$$

2. Uneigentliche Integrale

→ Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq cx^{-2} \ \forall x \geq M$, $c, M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ wachst nicht schneller als x^{-2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$



$\nearrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist gerade $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ für $R \to \infty$

$\downarrow$

$\left[\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \right]$

$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$

→ Wir betrachten $\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(f \mid z_k)$

Was wir suchen mit $R \to \infty$ $\nearrow$

$\llcorner$ $\forall$ Sing $\in A(\gamma)$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(R \cdot e^{it}) \cdot Rie^{it}\,dt$$

(Parametrisierung → Halbkreis: Re^{it} für $t\,[0,\pi]$)

Falls $f(z) = \mathcal{O}(z^{-2}) \Rightarrow f(R \cdot e^{it}) = \mathcal{O}(R^{-2})$ → e^{it} spielt keine Rolle, da $|e^{it}| = 1$ ↴

$\Rightarrow f(R \cdot e^{it}) \cdot Rie^{it} = \mathcal{O}(R^{-1})$ $\qquad$ $(|Re^{it}| = R)$

wenn wir jetzt das mit $R \to \infty$ betrachten $\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \underbrace{f(Re^{it}) \cdot Rie^{it}}_{\mathcal{O}(R^{-1})} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(Re^{it})\,Rie^{it}\,dt = \int_{\gamma_2} 0\,dt = 0$$

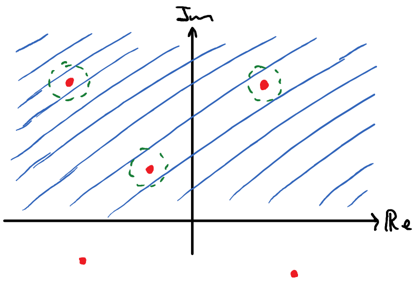
$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{0} = \underbrace{\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im} \geq 0}} \mathrm{Res}(f \mid z_k)}$$

→ Wenn wir uneigentliche Integrale mit $f(x) = \mathcal{O}(x^{-2})$ berechnen wollen, können wir Residuensatz für den oberen Teil der Re-Achse anwenden ($\mathrm{Im} \geq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} \geq 0} \mathrm{Res}(f \mid z_i)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \rightarrow$



[nur die mit ◌ markierte Singularitäten werden in $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ betrachtet (weil sie $\mathrm{Im} \geq 0$ erfüllen)]

Beispiel: Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

→ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fällt schneller oder gleich ab als x^{-2} ⇒ wir können die Methode für uneigentliche Integrale verwenden

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} \rightsquigarrow \text{Nur Singularitä } z=i \text{ erfüllt } \operatorname{Im} \geq 0$$

$$\operatorname{Res}(f|i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \operatorname{Im}\geq 0}} \operatorname{Res}(f|z_k) = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\cancel{i}} = \underline{\pi}$$

Beispiel: Berechne $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

→ Die Methode für uneigentliche Integrale haben wir für $\int_{-\infty}^{\infty}$ und nicht $\int_{0}^{\infty}$ bewiesen.

→ Aber wir merken, dass $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ eine <u>gerade Funktion</u> ist

$f(-x) = f(x)$

→ Für geraden Funktionen gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{haben wir oben bereits berechnet}} = \underline{\frac{1}{2}\pi}$$