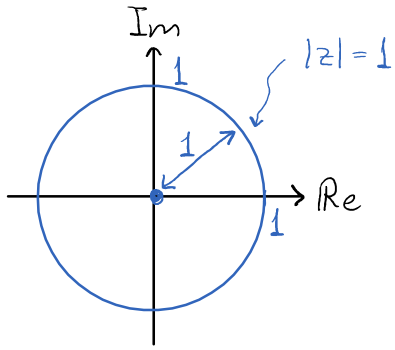
Integrale mit $e^{\cdot it}$, $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$

→ Im Abschnitt **3.1** haben wir die *Parametrisierung* von γ betrachtet. Mit der Parametrisierung eines Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt $z=0$ ($\Rightarrow \gamma(t) = e^{\frac{2\pi}{T}it}$, $t \in [0,T]$) können wir reelle Integrale wieder auf komplexwertige Integrale bringen (mit Hilfe einer „Rückparametrisierung"). Generell gilt:

$$\boxed{\int_{Tm+c}^{Tl+c} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (l-m)\int_{|z|=1} f(z)\,\frac{T}{2\pi i z}\,dz}$$



$l, m \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$

→ Für $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$ $\Rightarrow \cos(t) = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $\sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

→ So können wir reellwertige Integrale ganz einfach mit Residuensatz lösen

→ Das geht natürlich nur für Funktionen die nur $e^{\cdot it}$ enthalten, wobei alle Exponentialfunktion die gleiche Periode haben.

Berechne $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt$

- Funktion enthält nur Exponentialfunktionen mit Periode 2π
- Variablentransformation: $z := e^{it}$
- Neue Grenzen: $t \in [0, 4\pi]$ für e^{it} entspricht gerade 2 Umdrehungen um den Einheitskreis
- $\dfrac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \dfrac{1}{iz}$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \int_{2\times|z|=1} \frac{\cancel{z}}{1+2z}\cdot\frac{1}{i\cancel{z}}\,dz = 2\int_{|z|=1} \frac{1}{1+2z}\,\frac{1}{i}\,dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz$$

- Integrationsweg: Einheitskreis
- Singularitäten: einfache Polstelle an der Stelle $z = -\frac{1}{2} \in A(\gamma)$ Einheitskreis

$$g(z) := \frac{1}{1+2z} \rightsquigarrow \operatorname{Res}(g \mid z=-1/2) = \lim_{z\to -1/2} (z+1/2)\,\frac{1}{1+2z} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{1}{1+2z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g \mid z=-1/2) = \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \pi i$$

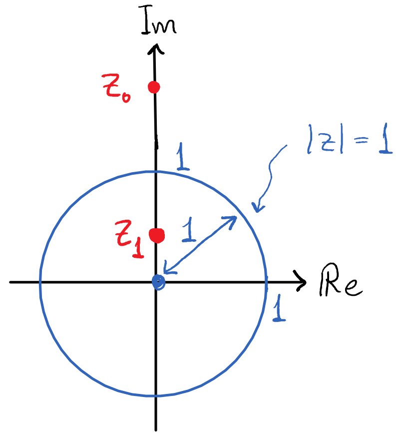
$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz = \frac{2}{i}\cdot \pi i = \underline{2\pi}$$

Berechne $\displaystyle\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt$

- Funktion enthält nur Exponentialfunktionen mit Periode 2π $\left(\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$
- Variablentransformation: $z := e^{it}$
- Neue Grenzen: $t \in [-2\pi, 4\pi]$ für e^{it} entspricht gerade 3 Umdrehungen um den Einheitskreis $(4\pi - (-2\pi) = 6\pi = 3\cdot(2\pi))$
- $\frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}$
- $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z+z^{-1}}{2i}$

$$\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt = \int_{3\times|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{z-z^{-1}}{2i}}\cdot\frac{1}{iz}\,dz = 3\int_{|z|=1} \frac{2\cancel{i}}{2\sqrt{2}i - z + z^{-1}}\cdot\frac{1}{\cancel{i}z}\,dz = 6\int_{|z|=1}\frac{1}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1}\,dz$$

$$= -6\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)(z-\sqrt{2}i+i)}\,dz$$



- Integrationsweg: Einheitskreis
- Singularitäten: $z_0 = \sqrt{2}i + i$, $z_1 = \sqrt{2}i - i$

Nur z_1 liegt in $|z|=1$

$$\operatorname{Res}(g \mid \sqrt{2}i - i) = \lim_{z\to(\sqrt{2}i-i)} \cancel{(z-\sqrt{2}i+i)}\,\frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)\cancel{(z-\sqrt{2}i+i)}} = -\frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-2\pi}^{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt = -6\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)(z-\sqrt{2}i+i)}\,dz = \cancel{-}6\left(\cancel{2}\pi\cancel{i}\cdot\left[\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2i}}\right]\right)$$

$$= \underline{6\pi}$$

Theorie

1. Fourier-Reihen

1.1 Periode

→ Eine Funktion heisst periodisch, falls

$$\exists p > 0, \text{ sodass } f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

p heisst Periode von f (die kleinste Periode heisst Fundamentalperiode)

1.2 Gerade/ungerade Fortsetzung

→ Manchmal wollen wir Funktionen im Intervall $[0, L]$ periodisch fortsetzen.

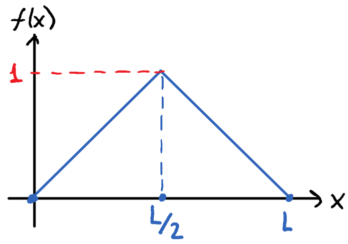
$f(x)$ = Stückweise-Funktion (Im Intervall $[0,L]$)

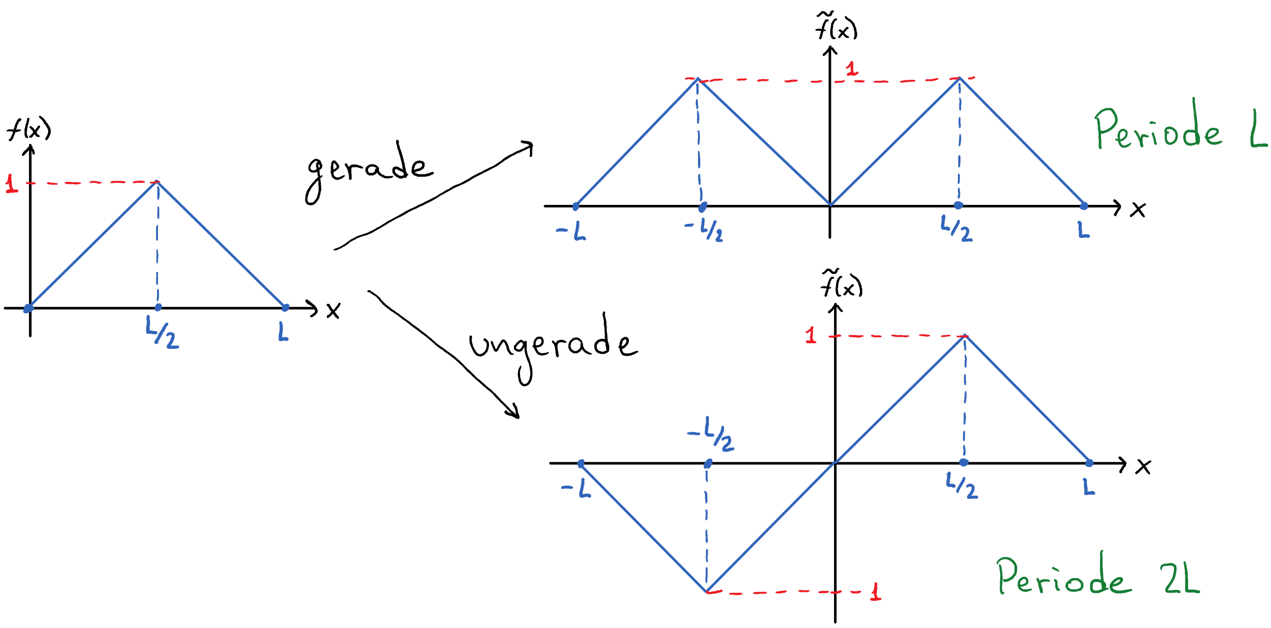
$\tilde{f}(x)$ = periodische Fortsetzung von $f(x)$ (Im Intervall $]-\infty, \infty[$)

- Gerade Fortsetzung von $f(x) \Rightarrow \tilde{f}(x)$ ist gerade $\quad (\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x))$
- Ungerade Fortsetzung von $f(x) \Rightarrow \tilde{f}(x)$ ist ungerade $\quad (\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x))$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad \rightarrow$$





1.3 Fourier-Reihen

→ Darstellung von periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen ($\cos(x)$, $\sin(x)$)

→ Ein trigonometrisches Polynom mit Grad N ist eine Linearkombination von trigonometrische Funktionen:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt) \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

→ Die Reihen mit Grenzen ∞ ($N \to \infty$) heissen trigonometrische oder Fourier-Reihen (Sie haben Periode 2π)

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx \quad (k \geq 1)$$

→ Für T-periodische Funktionen f gilt

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi ikt}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi ikx}{T}}\, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx \quad (k \geq 1)$$

→ Eigenschaften

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,g(x)\,dx$ mit $f(-x) = f(x)$ (gerade), $g(-x) = -g(x)$ (ungerade) $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,g(x) = 0$

- Symmetrisches Integrieren (von $-a$ bis a für $a \in \mathbb{R}$) einer ungeraden und geraden Funktion ist immer Null

(2) $\cos(x)$ ist eine gerade Funktion $[\cos(-x) = \cos(x)]$

$\sin(x)$ ist eine ungerade Funktion $[\sin(-x) = -\sin(x)]$

(3)

$g(x)$ gerade

$u(x)$ ungerade

- $g(x) \cdot u(x)$ ist ungerade
- $g(x) \cdot g(x)$ und $u(x) \cdot u(x)$ sind gerade
- $\int_{-a}^{a} u(x)\, dx = 0$
- $\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\, dx$

(4) Für die Fourier-Koeffizienten gilt also

$f(x)$ gerade $(f(-x) = f(x))$

$$b_k = 0 \quad \forall k$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

$f(x)$ ungerade $(f(-x) = -f(x))$

$$a_k = 0 \quad \forall k$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

→ Umformeln (komplex ↔ reell)

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{und} \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k > 0$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad \text{für } k > 0$$