Tipps - Serie 10

Aufgabe 1

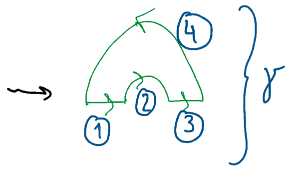
→ a) Komplexe Fourierreihe

→ b) • Definition von a_n für die Taylorentwicklung $\left[\text{Taylor: } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right]$

• Definition von c_n für die Fourierreihe

→ c) Teilaufgabe a)

Aufgabe 2



→ a)

i. Integral aufteilen → $\underbrace{\int_{-r}^{-s} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{1}$, $\underbrace{\int_{s}^{r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{2}$, $\underbrace{\int_{\gamma_s} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{3}$ & $\underbrace{\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{4}$

ii. Wir suchen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$, was $\lim_{\substack{r\to\infty \\ s\to 0}}$ 1 + 2 entspricht

iii. γ ist geschlossen ⇒ Residuensatz ⇝ Welche Singularitäten sind drinnen?

1 + 2 + 3 + 4 $= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, z_k\right)$

iv. Wie gesagt, wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$ mit Residuensatz und $\lim_{r\to\infty}$ und $\lim_{s\to 0}$

• Was gilt für 3 für $s\to 0$? Serie 7 $\left[\lim_{s\to 0} \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \pi i\,\mathrm{Res}(f|0)\right]$

• Was gilt für 4 für $r\to\infty$? Abschätzen

↳ Parametrisierung einsetzen, $\lim_{r\to\infty}$

Tipp: $\int_0^1 e^{-r\sin(\pi t)}\,dt = 2\int_0^{1/2} e^{-r\sin(\pi t)}\,dt$, da $\sin(\pi t)$ symmetrisch bezüglich $t=\frac{1}{2}$ ist

↳ Hinweis: $\sin(\pi t) \geq 2t$ für $t\in[0,\frac{1}{2}]$

→ b)

i. Wir verwenden Teilaufgabe a) um b) zu lösen

Wir haben etwas in der Form $e^{-is(a-t)}$ aber wollen etwas ähnliches wie e^{ix}, damit wir die Lösung von a) verwenden können ⇒ geschickte Substitution...

ii. Was gilt für $a>t$, $a<t$, $a=t$?

Tipps - Serie 10

→ c) Analog zu b). Exponentialfunktionen separat betrachten und Lösung von b) verwenden

Aufgabe 3

1. Eine der Funktionen spiegeln und verschieben
2. Finde die Multiplikation der beiden Funktionen
3. Multiplikation von 2. integrieren $(-\infty, \infty)$

Mit Fallunterscheidung in Abhängigkeit von t

$$(f * g)(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(\tau) \cdot g(t \overset{1.}{-} \tau)}_{2.} \, d\tau}_{3.}$$

$$\left[(f * g)(t) = (g * f)(t) \right]$$