Tipps - Serie 12

Aufgabe 1

→ a) In der Definition einsetzen

→ b) Plancherel

Aufgabe 2

→ a) Definition einsetzen ($\mathcal{F}\{\cdot\}(\omega)$ & $f*g$). Integrationsreihenfolge vertauschen ($d\vartheta dt \to d\vartheta dt$ oder umgekehrt. Variablentransformation?

→ b) Von a) wissen wir, dass $\widehat{(f*g)} = (\hat{f}\cdot\hat{g})\cdot\sqrt{2\pi}$

Hinweis: $F := \hat{f}$, $G := \hat{g}$ → betrachte $\widehat{F\cdot G}$, also $\widehat{\hat{f}\cdot\hat{g}}$ ⇝ von a)

Was ist $\hat{F}, \hat{G}$? → In der Definition einsetzen → Zeige, dass $\hat{\hat{f}}(\omega) = f(-t)$

Aufgabe 3

→ a) Wir suchen $\hat{f}(t)$, wobei $f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} g(s)$

Definition von Faltung: $(a*b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, b(t-s)\, ds$

- Versuche $f(t)$ als eine Faltung von $g(t)$ mit eine Funktion $h(t)$ $[f(t) = (h*g)(t)]$
- Laut Aufgabe 1 gilt $\hat{f}(t) = \sqrt{2\pi}\,\hat{h}\cdot\hat{g}$. Finde $\hat{h}, \hat{g}$

→ b) Same as a) ü

Aufgabe 4

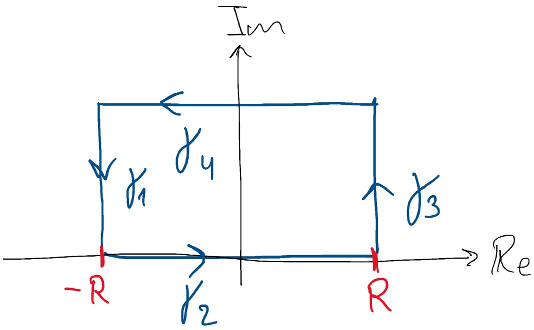
→ a) Skizzen sind immer hilfreich!

- Lösung $\hat{f}(\omega)$ hat ω im Nenner ⇒ $\hat{f}(0)$ separat berechnen ⁖
- $\int_{-a}^{a} g(t) e^{-ist} = 2\int_{0}^{a} g(t)\cos(st)$, falls $g(t)$ gerade ist

→ b) Was suchen wir? In der Definition einsetzen

- Quadratisch ergänzen: $at^2 + bt + c = a\left(t^2 + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$
- Weg geschlossen ⇒ Residuensatz
  ↳ Singularitäten? Residuen?

Tipps - Serie 12



- Zeige, mit Einsetzen der Parametrisierung,

dass $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} e^{\cdots} = \int_{\gamma_3} e^{\cdots} = 0$

- $\int_{\gamma_2}$ und $\int_{\gamma_4}$ mit Residuensatz [Tipp: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$]

→ c) Wir lösen das Gleiche wie oben, aber ohne Residuensatz

- Nachdem man quadratisch ergänzt hat ⇒ Substitution vom Exponent, damit wir direkt den Tipp anwenden können

→ d) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ → Vergleich mit Teilaufgabe a) – c)

- Skalierung + Verschiebung von t wenn verglichen
- Eigenschaft der FT für und [FT Tabelle]

Beispiel: für Skalierung gilt $\widehat{f(at)} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

a) – c) $-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(t-\mu)^2$

d) $-\pi t^2$

Aufgabe 5

→ a) Es wird also angenommen, dass $u(x,t)$ tatsächlich die DGL löst. Jetzt müssen wir beweisen, dass $\hat{u}(\xi,t)$ [$= \mathcal{F}\{u(x,t)\}(\xi,t)$] $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t)$ erfüllt

Hinweis: Betrachte die gegebene FT von $u(x,t)$

⇒ FT nur auf x (also Position) angewendet! (nicht Zeit t)

- Gibt es eine Eigenschaft der FT für eine Ableitung? $\widehat{\frac{d}{dx}u(x,t)} = \cdots\, \hat{u}(\xi,t)$

FT Tabelle nachschauen

$$\widehat{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)} = \widehat{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)} \Rightarrow ?$$ [FT nur auf x angewendet!]

→ b) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t) \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}h(t) = -\xi^2 h(t),\quad h(t) := \hat{u}(\xi,t)$

bezüglich Variable t ist ξ nur eine "Konstante"

- Charakt. Polynom finden, DGL lösen, Anfangsbedingung einsetzen

Tipps - Serie 12

Aufgabe 6

→ a) Definition von $\hat{f}(s)$ einsetzen, grob abschätzen

→ b) FT berechnen, $\lim_{s \to \infty}$ abschätzen

→ c) Finde $\hat{g}$, Lösung von b) verwenden

→ d) Dreieckungsgleichung für $|\hat{f}(s)|$

$$|\hat{f}(s)| = |\hat{f}(s) + \hat{g}_n(s) - \hat{g}_n(s)| \leq \underbrace{|\hat{g}_n(s)|}_{\text{c)}} + \underbrace{|\hat{f}(s) - \hat{g}_n(s)|}$$

$$\hat{f}(s) - \hat{g}_n(s) = \widehat{f(s) - g_n(s)}$$

In Definition einsetzen, abschätzen, Gleichung 12.6.2