Tipps - Serie 5

Aufgabe 1

→ i) $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

ii) Definition von cos & sin benutzen, ausmultiplizieren

iii) Hinweis

iv) z_1 & z_2 können auch rein reell/imaginär sein...

v) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Aufgabe 2

→ a) Berechne $f'(z_0)$ mit dem Limes $\left[f' = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$

↳ $f(z) = u(z) + iv(z)$ bzw $f(z_0) = u(z_0) + iv(z_0)$

$z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$

- Cauchy-Riemann Gleichung $\left[i \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi) \right]$

b) Wir müssen zeigen, dass $g(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$ holomorph ist

- Schreibe $g(z)$ in u & v Form ⇝ „Name" u & v wurde schon verwendet.

Benutze also $\tilde{u}$ & $\tilde{v}$ zum Beispiel ⇒ $g(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$

- Cauchy-Riemann Gleichungen $\left[\tilde{u}_x \overset{!}{=} \tilde{v}_y \,,\; \tilde{u}_y \overset{!}{=} -\tilde{v}_x \text{ für holomorphie} \right]$

c) Nicht vergessen, dass wir $g(z)$ als Ableitung von $f(z)$ definiert haben

⇒ $f(z) = z_0 + \int_\gamma g(\tau)\, d\tau$ Weg von z_0 nach z

- Verwende a)

d) Verwende a) & c)

Aufgabe 3

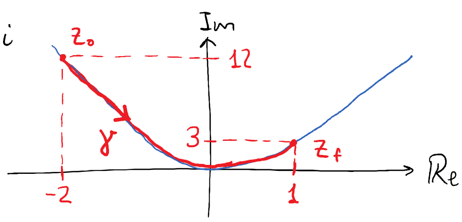
→ a) Wolframalpha, Desmos etc.

b)

Beispiel: $y = 3x^2$ Parametrisiere es von $z_0 = -2 + 12i$ bis $z_f = 1 + 3i$

$y = \text{Im}\{z\}$, $x = \text{Re}\{z\}$

⇒ $\gamma(t) = \underbrace{3t^2}_{y} i + \underbrace{t}_{x}$, $t \in [-2, 1]$ $\left[\gamma(-2) = z_0 ,\; \gamma(1) = z_f \right]$



Tipps - Serie 5

Für Homotopie verwenden wir normalerweise $t \in [0,1]$ für Parametrisierungen

muss aber nicht unbedingt so sein

$\Rightarrow$ Anpassen von $\gamma(t)$

$\Rightarrow \gamma(t) = 3(3t-2)^2 + 3t-2, \quad t \in [0,1]$

$\rightarrow y^2 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{\ldots} \Rightarrow$ 2 Parametrisierungen sind nötig $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \rightarrow \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,d] \end{cases}$

c) Grenzen von der Parametrisierung anpassen und eine neue Variable einfügen

$$H(s,t) = \begin{cases} \ldots, & t \in [a,b] \\ \ldots, & t \in [c,d] \end{cases} \quad \text{so dass} \quad \begin{aligned} H(0,t) &= \text{Lösung von b)} \\ H(1,t) &= \delta(t),\ t \in [0,1] \end{aligned}$$

$y = +\sqrt{\ldots}$ jetzt auch mit s

$y = -\sqrt{\ldots}$ jetzt auch mit s

- Da hier $t \in [0,1]$ für $\delta(t)$ $\Rightarrow$ man muss die Lösung von b) so anpassen, dass $\gamma(t)$ auch für $t \in [0,1]$ die gesammte Parametrisierung darstellt

$\Rightarrow$ für b) $\rightsquigarrow \gamma(t) = \begin{cases} \ldots \text{ für } +\sqrt{\ldots}, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \ldots \text{ für } -\sqrt{\ldots}, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \rightsquigarrow$ hier ist $\gamma(t),\ t \in [0,1]$ mit $\gamma(0) = 1+\sqrt{2}i$, $\gamma(1) = 1-\sqrt{2}i$

Aufgabe 4

$\rightarrow$ Für i) bis iv)

- Q_2 zeichnen
- Singularitäten identifizieren
- Bedingung für Integralformel erfüllt?

also hat $f(z)$ selber keine Singularitäten in $A(\gamma)$!

i) Es gibt nur eine Singularität in $A(\gamma)$, nämlich die vom Nenner (z_0) $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}$

ii) Kurve ist geschlossen

- Integralformel verwenden $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

i) Ähnlichkeit betrachten
↳ was wäre z_0?
↳ was wäre $f(z)$?

iv) Integralformel für die n-te Ableitung $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Tipps - Serie 5

Aufgabe 5

→ Singularität innerhalb von $A(\gamma)$?

- Ja ⇒ Integralformel von Cauchy

  ! Sind die Bedingungen für das Anwenden überhaupt erfüllt?

- Nein ⇒ Satz von Cauchy

Aufgabe 6

→ Falls wir zeigen können, dass $f^{(2)}(z) = 0 \ \forall z$, dann gilt direkt $f(z) = az + b$ → was zu zeigen ist

$$\underbrace{f''(z) = 0 \Rightarrow f'(z) = a}_{\int \cdot dz} \ \underbrace{\Rightarrow f(z) = az + b}_{\int \cdot dz}$$

→ $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ für $n = 2$

→ Parametrisierung eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt $(0,0)$ einsetzen

→ Eigenschaft $|f(z)| \leq A|z| + B$ einsetzen und Integral abschätzen

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right| dz$$ für $n = 2$ mit Parametrisierung und

→ $R \to \infty$ zum zeigen, dass $f^{(2)}(z_0) = 0 \ \forall z_0 \in \mathbb{C}$! Da $R \to \infty \Rightarrow A(\gamma) =$ ganz $\mathbb{C}$

Aufgabe 7

→ Homotopie-Invarianz ⇝ „Singularitäten isolieren"

→ Index von γ für alle Singularitäten berechnen

→ Integralformel von Cauchy anwenden

Aufgabe 8

→ MATLAB Template