Tipps - Serie 7

Aufgabe 1

Was gilt zusätzlich für c_n?

→ a) Laurententwicklung von $\phi(z)$ einsetzen ($\phi(z)$ ist holomorph!)
↳ in $f(z)$ einsetzen und Resultat untersuchen

b) Genau gleich wie a), einfach umgekehrt ??
Ausgehend von der Laurententwicklung von $f(z)$ [Pol m-ter Ordnung], zeige, dass $\phi(z) := (z-z_0)^m f(z)$ holomorph ist [mit $\phi(z_0) \neq 0$]

Aufgabe 2

→ a) Schreibe f als eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z = z_0$
Was muss für bestimmte c_n gelten, damit der $\lim\limits_{z \to z_0}$ konvergiert?

→ b) Schreibe f als eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z = z_0$
• Was gilt dann für $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$?

Aufgabe 1a) kann hilfreich sein

Aufgabe 3

→ i. Aufgabe 1a)
ii. Taylorentwicklung von $e^{2z} \Rightarrow \frac{1-e^{2z}}{z^4} = \sum \cdots \Rightarrow$ Lage und Typ extrahieren
iii. Taylorentwicklung von $\sinh(z) \Rightarrow \frac{\sinh(z)-z}{z^3} = \sum \cdots \Rightarrow$ Lage und Typ extrahieren

Aufgabe 4

→ i. Singularitäten identifizieren ⇝ Pol 1. Ordnung $\Rightarrow \operatorname{Res}(f \mid z_i) = \lim\limits_{z \to z_i} (z-z_i) f(z)$
ii, iii, iv. Laurententwicklung mit der Hilfe der Taylorentwicklung von $\cos(\frac{1}{z})$, $\sin(z)$, $\cot(z)$

Da alle Singularitäten bei $z=0$ sind $\Rightarrow$ Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ (auch Taylor)

Aufgabe 5

→ Laurententwicklung von $f(z)$ → Entwicklungspunkt $z_0 = 0$; → Pol 1. Ordnung bei $z_0 = 0$

• Berechne $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma_\varepsilon} (z-z_0)^k \,dz$

Parametrisierung von γ_ε einsetzen → Betrachte $k=-1$ & $k \neq -1$

Tipps - Serie 7

Aufgabe 6

→ Starte mit $\mathrm{Res}(f|z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$, $\gamma : [0,1] \to U$

- Setze die Parametrisierung von γ → Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r
- Berechne $\mathrm{Res}(f|\overline{z}_0)$
  - ↳ Tipp: $(\overline{z}_0 + a) = (\overline{z}_0 + \overline{\overline{a}}) = (\overline{z_0 + \overline{a}})$
  - ↳ Tipp: Parametrisierung mit $e^{-2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ ist einfach $-\gamma$ (umgekehrte Richtung)