Tipps - Serie 8

Aufgabe 1

→ Singularitäten identifizieren (Typ & Ordnung)
→ Welche liegen innerhalb γ? [für i., ii., iii.]
→ $\text{Res}(f|z_k)$ berechnen [siehe Theorie *1.1 Residuum*]
→ Residuensatz
→ Hinweis: Wir haben in der letzten Serie gesehen, dass $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \Rightarrow \text{Res}(f|\bar{z}) = \overline{\text{Res}(f|z)}$

so kann man Zeit sparen :)

Aufgabe 2

→ i. Parametrisierung $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

- Hinweis: $\int \frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} dz = -\frac{1}{\sin(z)} + C$

↳ Von mir aus könnt ihr auch einfach Wolframalpha benutzen... :/

→ ii. Residuensatz

- Singularitäten innerhalb γ? Typ und Ordnung [Nullstellen von $\sin(z)$]

  Hinweis: Es ist nicht wesentlich. Ist es Grad 1? 2? 3?

- Residuum + Residuensatz

Aufgabe 3

→ Theorie *2. Uneigentliche Integrale*

→ i, ii. f gerade $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_0^a f(x)\,dx$

- Erfüllt f die Bedingungen?

→ ii. $\cos(z) = \text{Re}\{e^{iz}\} \Rightarrow \int_a^b \frac{\cos(\cdots z)}{\cdots} dz = \text{Re}\left\{ \int_a^b \frac{e^{i\cdots z}}{\cdots} dz \right\}$

es ist viel einfacher mit exp zu arbeiten...

→ b) Man kann nicht die Theorie wie vorher anwenden (nicht Integral von $-\infty$ bis ∞ & f nicht gerade. Wir berechnen es mit Parametrisierung und $R \to \infty$)

1. Bitte benutze $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$

$$\gamma_1(t) = Rt, \quad \gamma_2(t) = Re^{2\pi i t/3}, \quad \gamma_3(t) = -Rte^{2\pi i t/3} + Re^{2\pi i/3} \qquad t \in [0, \infty]$$

Tipps - Serie 8

Wir haben $\int_\gamma f(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k Res(f|z_k)$ $\longrightarrow$ $z_k \in A(\gamma)$

- Was wir suchen ist $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_\gamma f(z)dz}_{2\pi i \sum_k Res(f|z_k) \text{ für } z_k\in A(\gamma)} - \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz$$

2. Berechne $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,3}} f(z)dz$ mit Parametrisierung

Tipp: $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \to 0$ mit $R\to\infty$

$\int_{\gamma_3} f(z)dz \to C\cdot\int_0^\infty f(x)\,dx$ mit $R\to\infty$ → also das was wir suchen mal eine Konstante

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dz = 2\pi i \sum_k Res(f|z_k) - 0 - c\int_0^\infty f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = \dots$$

Aufgabe 4

→ a) "einfache Polstelle" = Ordnung 1

- Zeige, dass Ordnung 1 ist & $Res(f|z_k) = 1 \ \forall k$

→ b) Schwierig :(

Man kann zeigen, dass $|f(z)|$ bei $z\in\partial Q_N$ kleiner als 2π ist.

$$f(z) = \pi\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi\frac{e^{i\pi z}+e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}}\,i \Rightarrow |f(z)| = \pi\frac{|e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}|}{|e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}|} = \pi\frac{|e^{2\pi i z}+1|}{|e^{2\pi i z}-1|}$$

Mit Parametrisierung vom Rand, zeige, dass $|f(z)| \leq 2\pi$ ist

→ c)

i. Wie gesagt, $|f(z)| \leq 2\pi \ \forall z\in\partial Q_N \ \forall N$

Für $\left|\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\,dz\right| \leq \int_{\partial Q_N} \frac{|f(z)|}{|z^2|}\,dz$ → $|f(z)| \leq 2\pi$, da $z\in Q_N$

→ $z \leq$ Länge vom Integrationspfad (also Umfang)

Tipps - Serie 8

→ Wir wissen auch, dass $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2} \,\Big|\, z_k\right)$

Für $N \to \infty$ ist $A(\gamma)$ ganz $\mathbb{C}$. Also hier alle Singularitäten betrachten.

→ Also gilt $2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2} \,\Big|\, z_k\right) = 0$

- Wir müssen noch alle Residuen berechnen
- Für $z_0 = 0 \Rightarrow$ Laurententwicklung
- Für $z_k = k \Rightarrow$ Ordnung 1 laut a) $\Rightarrow$ Formel für einfache Pole

Mit Einsetzen von $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2} \,\Big|\, z_k\right)$ in $2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2} \,\Big|\, z_k\right) = 0$ kann man zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Aufgabe 5

→ Theorie 2. Uneigentliche Integrale