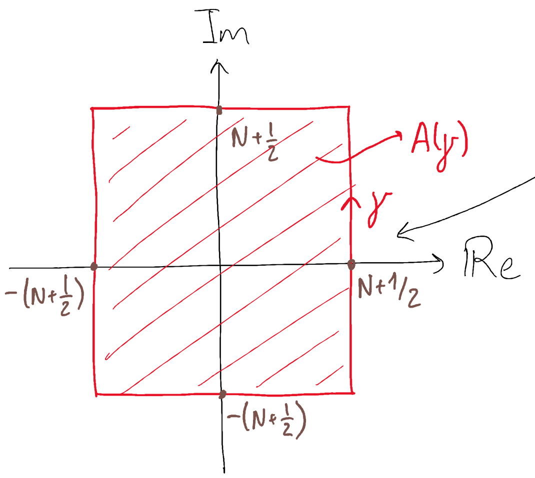
Tipps - Serie 9

Aufgabe 1

→ Wir haben in Serie 8 gesehen, dass



$Q_N := \left[-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}\right] \times i\left[-(N+\frac{1}{2}), N+\frac{1}{2}\right]$

- mit $N \to \infty$ ist $A(\gamma)$ ganz $\mathbb{C}$
- $f(z) = \pi \cot(\pi z) \leq 2\pi \quad \forall z \in \partial Q_N$

[Teilaufgabe 4b, Serie 8]

- $\lim\limits_{N\to\infty} \left| \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \lim\limits_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{2\pi}{z^2}\, dz \leq \lim\limits_{N\to\infty} \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})^2} \cdot 2(N+\tfrac{1}{2}) \cdot 4 = 0$

$\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{g(z)}\, dz \overset{*}{=} 0$ für alle Funktionen $g(z) > z$ [Funktionen die schneller als z wachsen]

Bsp.: $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\, dz = \lim\limits_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{(z^2+a^2)}\, dz = 0$

Ich werde jetzt die Aufgabe S8 A4 lösen um $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu berechnen

- Da ∂Q_N geschlossen ist ⇒ Residuensatz

$$\int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i \left(\sum_k \mathrm{Res}(f|z_k) \right) \overset{*}{=} 0$$

- Wir brauchen nur die Residuen von $\frac{f(z)}{z^2}$

  * Singularität von $\cot(\pi z)$ → $z_k = k,\ k \in \mathbb{Z}$ [Pol 1. Ordnung]

  * Singularität von $\frac{1}{z^2}$ → $z = 0$ [Pol 2. Ordnung]

1. $\mathrm{Res}(f|z_k) = \lim\limits_{z\to k} (z-k) \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} = \frac{1}{k^2} \underbrace{\lim\limits_{z\to k} (z-k) \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \pi}_{A4a\ \Rightarrow\ 1} = \frac{1}{k^2}$

2. $\frac{\pi}{z^2} \cot(\pi z) = \frac{\pi}{z^2} \left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi^3}{45} z^3 + \dots \right) = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3} z^{-1} + \dots \quad \mathrm{Res}(f|0) = -\frac{\pi^2}{3}$

Oder Limes → $f(z)$ hat Pol 1. Ordnung bei $z=0$ ⇒ $\frac{f(z)}{z^2}$ ⇒ Pol 3. Ordnung bei $z=0$

Tipps - Serie 9

$$\Rightarrow \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

- Falls N gegeben, haben wir die Singularität k und $-k$ in $A(Q_N)$.
  $k = \{1, 2, 3, \dots, N\}$
- Wir summieren ab $k=1$, weil $k=0$ (also Sing. $z=0$) haben wir bereits mit $-\frac{\pi^2}{3}$ betrachtet

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} 2\pi i\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} - \frac{\pi^2}{3} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Um jetzt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ zu berechnen, betrachtet also $\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\,dz$ oder $\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^4}\,dz$ z. Bsp. Was dann für $\sum_{\boxed{k=-\infty}}^{\infty} \frac{1}{(z+a)^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$?

- Die Integrale geben alle 0.
- Residuensatz $\Rightarrow 2\pi i \sum \text{Res} = 0$
  - ↳ Res von πk
  - ↳ Res vom Nenner

  Vorsicht mit dem Fall, dass πk und Nenner die gleiche Singularität sind! $\Rightarrow$ Spezialfall, separat betrachten

Aufgabe 2

→ Betrachte $\int_{\alpha}^{\alpha+L} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{L} f(z)\,dz + \int_{L}^{\alpha+L} f(z)\,dz$ mit Substitution $z := s+L$ fürs 2te Integral

Aufgabe 3

→ $\text{Re}\{C_n\}$, $\text{Im}\{C_n\}$ → Definition von C_n einsetzen $\left[\text{Re}\{e^{-it}\} = \cos(-it) \text{ z. Bsp.}\right]$

$\cos(z)$ ist gerade, $\sin(z)$ ist ungerade $\left[\cos(-z) = \cos(z),\ \sin(-z) = -\sin(z)\right]$

Tipps - Serie 9

→ b) Re bzw Im von $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

Kombination für Re, Im von c_n und Re, Im von e^{int}

→ c)

- Betrachtet $c_n = \mathrm{Re}\{c_n\} + i\,\mathrm{Im}\{c_n\}$
- $\mathrm{Re}\{c_{-n}\}$ und $\mathrm{Im}\{c_{-n}\}$ in Abhängigkeit von $\mathrm{Re}\{c_n\}$ bzw $\mathrm{Im}\{c_n\}$

  Teilaufgabe a)

- $a_n = c_n + c_{-n} = \underbrace{\mathrm{Re}\{c_n\} + i\,\mathrm{Im}\{c_n\}}_{c_n} + \underbrace{\mathrm{Re}\{c_n\} + i\,\mathrm{Im}\{c_n\}}_{c_{-n}} \Rightarrow a_n = ?$

  In Abhängigkeit von nur $\mathrm{Re}\{c_n\}$ bzw $\mathrm{Im}\{c_n\}$

- In $f(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\right\}$ einsetzen

  ↳ Teilaufgabe b)

→ d)

- Definition von a_n, b_n [Integral] ⇝ $\cos(t)$ ist gerade, $\sin(t)$ ungerade
- gerade Fkt * gerade Fkt ⇒ gerade

  ungerade Fkt * gerade Fkt ⇒ ungerade ⇝ $\int_{-a}^{a}$ ungerade Fkt $= 0$

  ungerade Fkt * ungerade Fkt ⇒ gerade

Aufgabe 4,5

→ a) Gegebene Funktion im Interval zeichnen. Einfach copy/paste damit es periodisch wird

→ b) Einfach die Periodische Funktion um eine Periode integrieren [$f(t)$ einsetzen]

→ c) Aufgabe 2c) ⇒ $a_n = 2\,\mathrm{Re}\{c_n\}$, $b_n = -2\,\mathrm{Im}\{c_n\}$

→ d) **Desmos link verwenden** [oder selber mit MATLAB z. Bsp.]

→ e) Einfach Punkt auswerten (f von Teilaufgabe c))

Aufgabe 6

→ Eine Fourierreihe (die komplexe) ist einfach eine Summe von Exponentialfunktionen

Bsp.: $\sin^2(z) = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2e^{iz-iz} + e^{-2iz}}{-4} = \underbrace{-\frac{1}{4}e^{2iz} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2iz}}_{\text{komplexe Fourierreihe}} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2z)}_{\text{reelle Fourierreihe}}$

- Mit Formel von c_n, a_n, b_n kommt man natürlich auf das gleiche