

# Singularitäten

→ Nicht isolierte Singularitäten

→ Isolierte Singularitäten

- Hebbar
- Pole (Ordnung  $m$ )
- Wesentlich

# Singularitäten

→ Nicht isolierte Singularitäten

→ Isolierte Singularitäten

- Hebbar
- Pole (Ordnung  $m$ )
- Wesentlich

# Singularitäten

→ Nicht isolierte Singularitäten

→ Isolierte Singularitäten

- Hebbar
- Pole (Ordnung  $m$ )
- Wesentlich

# Residuum

$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorph

- $z_i$ : Singularität von  $f$

→ Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z - z_i)^k$$

$$= \dots C_{-2} \frac{1}{z - z_i} + C_{-1} \frac{1}{z - z_i} + C_0 + C_1 \frac{1}{z - z_i} + \dots$$

# Residuum

$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorph  
•  $z_i$ : Singularität von  $f$

→  $C_{-1}$  ganz einfach berechnen

Pol 1. Ordnung: 2 Methoden

$$1. \operatorname{Res}(f|z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z)$$

$$2. f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} \text{ mit } h(z_i) \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}$$

Pol m-te Ordnung:

$$\operatorname{Res}(f|z_i) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} [(z - z_i)^m f(z)]$$

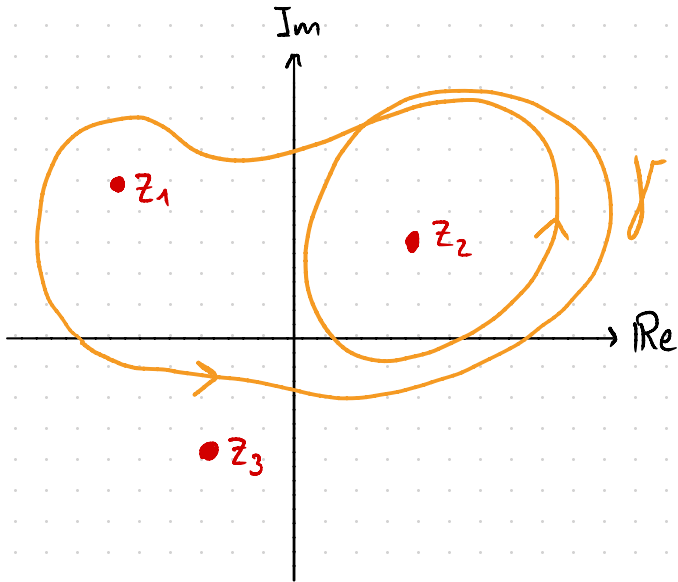
Wesentliche Singularität: Laurententwicklung

# Residuensatz

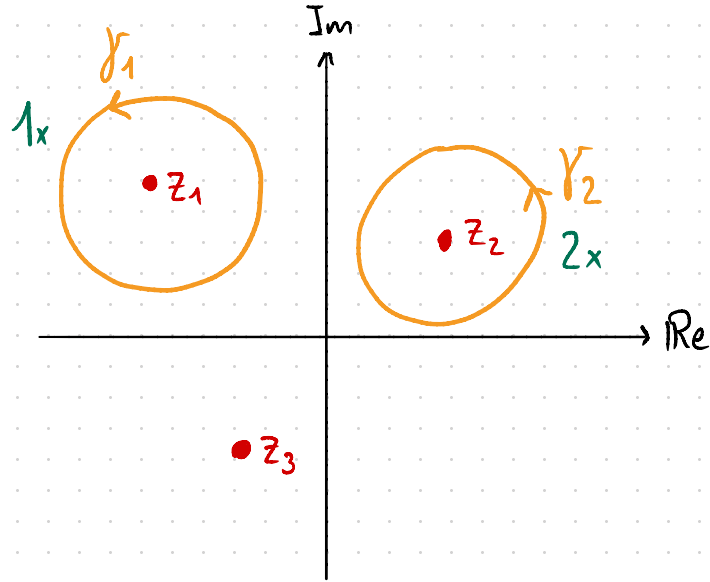
→ Was wir schon wissen

$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorph

- Singularität von  $f$



Homotopie  
Invarianz



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_k \text{Ind}_{\gamma_k}(z_k) \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

$\gamma_k \rightarrow 1x$  in Math. pos. Richtung

# Residuensatz

$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorph

- Singularität von  $f$

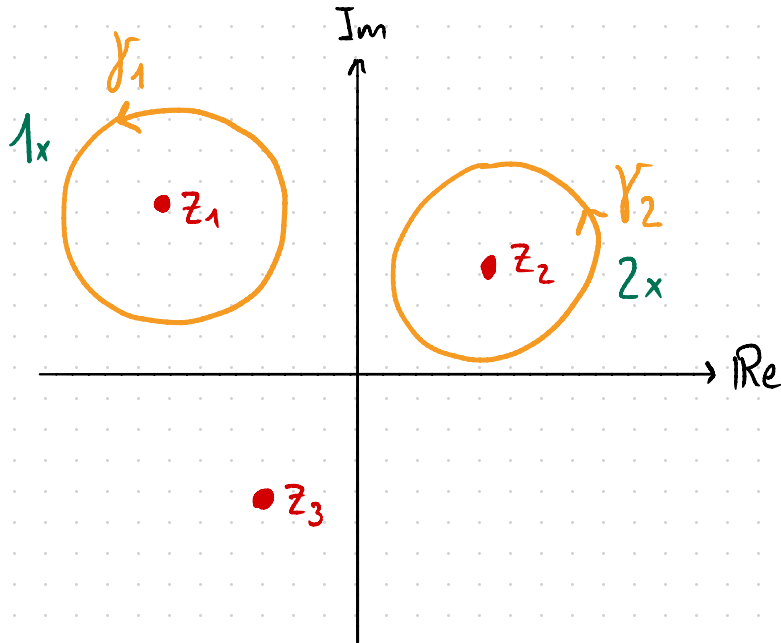
1. Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-z_0)^k, \quad |z-z_0| < \sigma$$

2. Integral von  $(z-z_0)^k$

Serie 4 A4

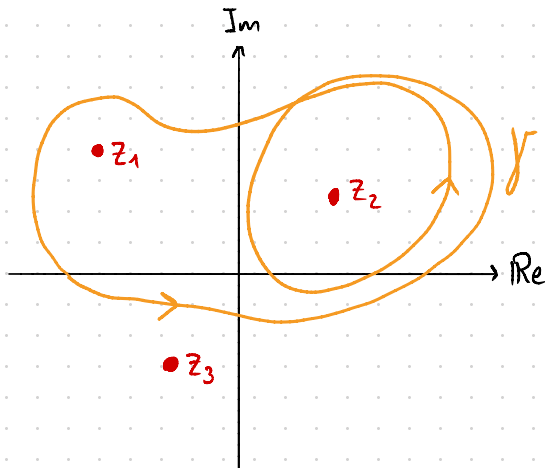
$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



# Residuensatz

$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  holomorph

- Singularität von  $f$



$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Ind}_{\gamma}(z_k) \cdot \text{Res}(f|z_k)$$

$\forall \text{ Sing} \in A(\gamma)$

$C_{-1}$  von der LE  
mit EP  $z = z_k$