Komplexe Analysis - The Big Picture

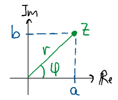
Komplexe Zahlen

→ komplexe Einheit $\boxed{i^2 = -1}$

→ $z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow z = a + bi$
- $a = \mathrm{Re}\{z\}$ = Realteil von z
- $b = \mathrm{Im}\{z\}$ = Imaginärteil von z

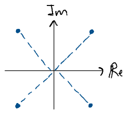
→ Re, Im, $|\cdot|$, Arg, Log, $\bar{z}$

→ $z = x + yi$
1. Kartesische Form
2. Polarform (Periodizität)



	Kart. Form	Polarform
Realteil $\mathrm{Re}\{z\}$	a	$r\cos(\varphi)$
Imaginärteil $\mathrm{Im}\{z\}$	b	$r\sin(\varphi)$
Betrag $\lvert z\rvert$	$\sqrt{a^2+b^2}$	r
Argument $\arg(z)$	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	φ

→ De Moivre



$z^n + a \rightsquigarrow z^n = -a = re^{\varphi i}$

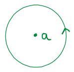
$\Rightarrow z = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi i k}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ n unterschiedliche Lösungen!!!

Funktionen

→ Cauchy-Riemannschen Gl.
1. $i\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$
2. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

→ Mittelwertsatz

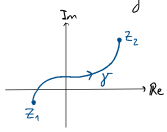


$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 f(e^{2\pi i t} + a)\,dt}$

→ Max-/Minprinzip
- keine lokale Maxima

Integrale

→ Parametrisierung



$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

→ Satz von Cauchy
1. γ geschlossen
2. keine Singularität innerhalb $A(\gamma)$

$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$

→ Integralformel von Cauchy
1. $f(z)$ holomorph und besitzt keine Singularität innerhalb $A(\gamma)$
2. $z_0 \in A(\gamma)$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

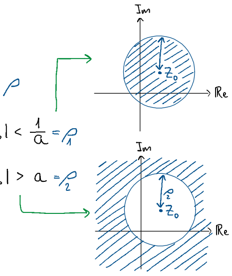
Reihen

→ Laurententwicklung $\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n}$

→ Geometrische Reihe
- Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius ρ

$\frac{1}{1-\text{etwas mit } z}$: $\quad \frac{1}{1-a(z-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < \frac{1}{a} = \rho$

$\frac{1}{1-\text{etwas mit } 1/z}$: $\quad \frac{1}{1-\frac{a}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1}{(z-z_0)^n}, \quad |z-z_0| > a = \rho$



→ Trigonometrische Funktionen
- Taylorentwicklung
1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
2. $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
3. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Singularitäten

→ Hebbar
- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow \mathrm{Res}(f|z_0) = 0$

→ Polstelle
- $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) \neq 0 \Rightarrow$ n-te Ordnung

  $\Rightarrow$ Termen mit negativen Exponenten kommen in endlicher Anzahl [Laurententwicklung]
- $\mathrm{Res}(f|z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$

→ Wesentlich
- $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ divergiert für $\forall n$

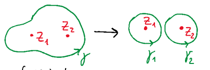
  $\Rightarrow$ Laurententwicklung hat unendlich viele Termen mit negativen Exponenten
- $\mathrm{Res}(f|z_0) = C_{-1}$ der Laurententwicklung
- trigonometrische Funktionen mit $\frac{1}{z}$ als Argument

  $\Rightarrow$ sehr wahrscheinlich wesentliche Singularität

  ↳ cos, sin, exp

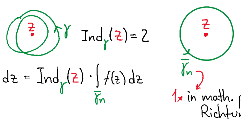
Residuensatz

→ Homotopie



$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

→ Index



$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 2$

$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{Ind}_\gamma(z) \cdot \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$

1x in math. pos. Richtung

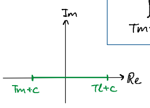
→ Residuum
- C_{-1} von der Laurententwicklung
- Pol n-te Ordnung: $\mathrm{Res} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_i)^n f(z)\right]$
- exp, sin, cos etc mit $\frac{1}{z}$ als Argument $\Rightarrow$ Wesentlich [generell]

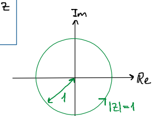
  Taylorentwicklung

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(f|z_k)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_k)}$$

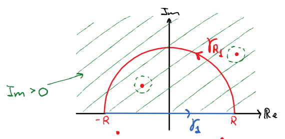
→ Integrale mit e^{aiz}, $\cos(az)$, $\sin(az)$
1. Funktion enthält nur exp, cos, sin
2. Integralgrenzen entsprechen ein Vielfaches der Periode

$$\boxed{\int_{Tm+c}^{Tl+c} f(e^{\frac{2\pi}{T}it})\,dt = (l-m)\int_{|z|=1} f(z)\frac{T}{2\pi i z}\,dz}$$

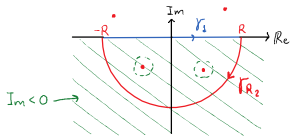




→ Uneigentliche Integrale
- f fällt schneller als $x^{-2} \rightsquigarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ [man muss es beweisen können!]
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ Beide obere-/untere Halbebene konvergieren
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \Rightarrow$ Selber schauen welche Variante konvergiert



$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}>0}\mathrm{Res}(f|z_k)}$



$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}<0}\mathrm{Res}(f|z_k)}$

Fourier

→ Fourierreihe

$$f(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{2\pi}{T}ikt}}_{\text{komplexe}} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\tfrac{2\pi}{T}kt\right) + b_k\sin\left(\tfrac{2\pi}{T}kt\right)}_{\text{reelle}}$$

$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-\frac{2\pi}{T}ikx}\,dx \quad (k \in \mathbb{Z})$

$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right)dx \quad (k \geq 0)$

$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right)dx \quad (k \geq 1)$

$a_k = C_k + C_{-k}$ und $b_k = i(C_k - C_{-k})$ für $k > 0$

$C_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ und $C_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ für $k > 0$

- f gerade & ungerade

  f gerade $\Rightarrow b_k = 0, \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right)dx$

  f ungerade $\Rightarrow a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\tfrac{2\pi}{T}kx\right)dx$

→ Parseval
- f 2π-periodisch

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)}$$

→ Fouriertransformation

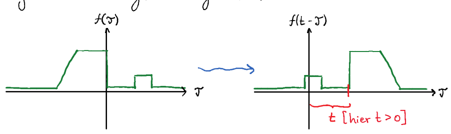
$$\boxed{\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt}$$

- Eigenschaften
1. $\widehat{(f(t)+g(t))}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
2. $\widehat{(tf(t))}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)$
3. $\widehat{(f(t)\cdot g(t))}(\omega) = \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$
4. $\widehat{\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$
5. $\widehat{(f(t-a))}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$

→ Plancherel $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega}$

→ Faltung $\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau}$

- Eigenschaft $(f*g)(t) = (g*f)(t)$



1. $g(\tau)$ spiegeln und um t verschieben $\Rightarrow g(t-\tau)$
2. $g(t-\tau)$ mit $f(\tau)$ multiplizieren und von $-\infty$ nach $+\infty$ integrieren

Laplace

→ Existenz der Laplace-Transformation
1. f ist von exponentieller Ordnung

   $\exists\, c, s_0 > 0$ s.d. $|f(t)| \leq Ce^{s_0 t}$ für $\forall t > 0$
2. Integrierbarkeit

   $\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty, \; T > 0$

→ Darstellung: $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f\}$; Originalfunktion f

→ Eigenschaften
1. $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$
2. $\frac{d}{dt}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0)$
3. $t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

→ Differentialgleichungen
1. $\frac{d^n}{dt^n}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
2. Auf $F(s)$ lösen

   $\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung $+ \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ t^n e^{-at}$