Beispiele

1. Einführung

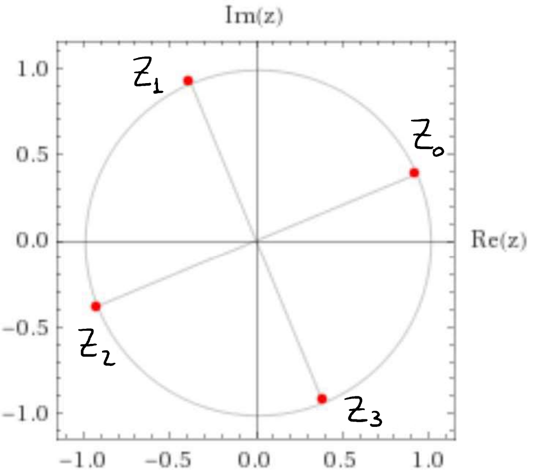
1.4.1 $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$. Gegeben ist eine Nullstelle $z_0 = +i$

$\Rightarrow$ Nur reelle Koeffizienten $\Rightarrow$ $z_1 = \bar{z}_0 = -i$ ist auch eine Nullstelle

1.4.2 $z^4 = i$. Finde alle Nullstellen

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2} + 2\pi i k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{i} = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}\right]^{1/4} = e^{i\left(\frac{\pi + 4\pi k}{8}\right)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3$$



Nullstellen
$$\begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}} \\ z_1 = e^{i\frac{5\pi}{8}} \\ z_2 = e^{i\frac{9\pi}{8}} \\ z_3 = e^{i\frac{13\pi}{8}} \end{cases}$$

• Beispiel: $\log(1+\sqrt{3}i) = \log(2e^{i\pi/6})$
$= \log(2) + i\frac{\pi}{6}$

1.5.1 $\dfrac{3+i}{3-i}$

$$\frac{3+i}{3-i} = \frac{3+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3^2 + 6i - 1}{10} = \frac{8}{10} + \frac{6}{10}i = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

↳ mit $\overline{(3-i)} = 3+i$ erweitern

1.6.1 $\log\left(\left[1+\sqrt{3}i\right]^2\right)$

$$\log\left(\left[1+\sqrt{3}i\right]^2\right) = 2\log\left(1+\sqrt{3}i\right) = 2\log\left(2e^{i\pi/6}\right) = 2\log(2) + i\frac{\pi}{3}$$

2. Funktionen

2.1.1 $f(z) = z^2$ [mit $z = x + yi$]

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{Re\{f(z)\}} + \underbrace{(2xy)}_{Im\{f(z)\}} i$$

$$\Rightarrow u(x+yi) = \tilde{u}(x,y) = Re\{f(x+yi)\} = x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow v(x+yi) = \tilde{v}(x,y) = Im\{f(x+yi)\} = 2xy$$

2.2.1

→ Beispiel 1: $f(z) = z^2$

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

- $i\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = i\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2xyi - y^2) = i(2x + 2yi) = 2xi - 2y$
- $\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xyi - y^2) = 2xi - 2y$ $\overset{?}{=}$

Ja, also ist $f(z) = z^2$ holomorph

→ Beispiel 2: $f(z) = \bar{z}$

$$f(x+yi) = \overline{(x+yi)} = x - yi$$

- $i\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = i\frac{\partial}{\partial x}(x - yi) = i$
- $\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y}(x - yi) = -i$

$\overset{?}{=}$ Nein, also ist $f(z) = \bar{z}$ nicht holomorph

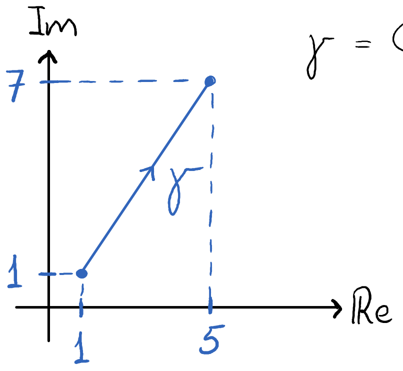
→ Beispiel 3: $f(z) = \bar{z}$

$$f(x+yi) = x - yi \Rightarrow u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$$

- $\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = 1 \overset{?}{=} -1 = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \rightsquigarrow$ Nein, also ist $f(z) = \bar{z}$ nicht holomorph
- $\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = 0 \overset{?}{=} 0 = \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \longrightarrow$ Ja, aber

3. Integrale

3.1.1 Finde die Parametrisierung von γ



γ = Gerade mit Anfangspunkt $1+i$ und Endpunkt $5+7i$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (1+i) + (4+6i)t, \quad t \in [0,1]$$

! Parametrisierungen sind nich eindeutig

Bsp.: $\gamma_2(t) = (1+i) + (2+3i)t, \quad t \in [0,2]$ ist auch eine gültige Parametrisierung für γ

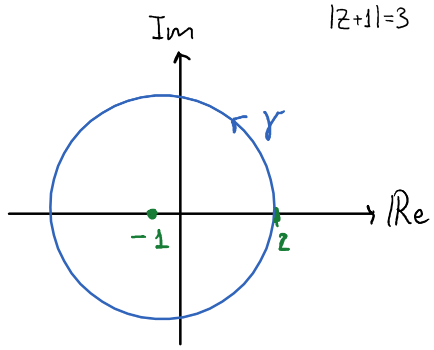
3.1.2 Berechne $\int_\gamma z\,dz$, wobei γ den Weg aus Beispiel 3.1.1 entspricht

- $f(z) = z$
- $\gamma(t) = (1+i) + (4+6i)t, \; t \in [0,1] \rightsquigarrow \gamma'(t) = 4+6i$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [(1+i)+(4+6i)t] \cdot (4+6i)\,dt$$

$$= \int_0^1 (1+i)(4+6i) + (4+6i)^2 t\,dt = -2+10i-10+24i = -12+34i$$

3.2.1 Berechne $\int_{|z+1|=3} z^3\,dz$



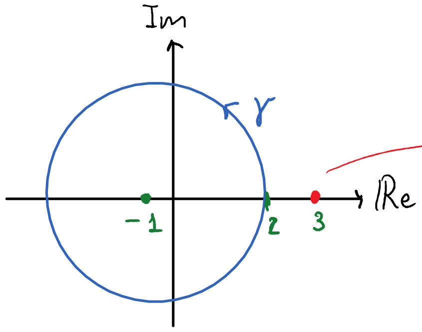
$f(z) = z^3$, $U = \mathbb{C}$, γ geschlossen

$\Rightarrow$ Funktion ist in ganz U holomorph

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=3} z^3\,dz = 0$$

3.2.2

→ Beispiel 1: Berechne $\int_{|z+1|=3} \frac{1}{z-3}\,dz$

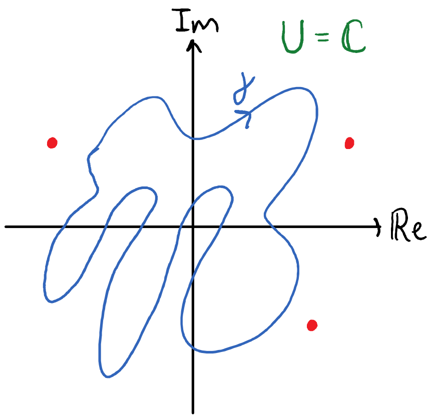


$f(z) = \frac{1}{z-3}$, $U = \mathbb{C}$, γ geschlossen

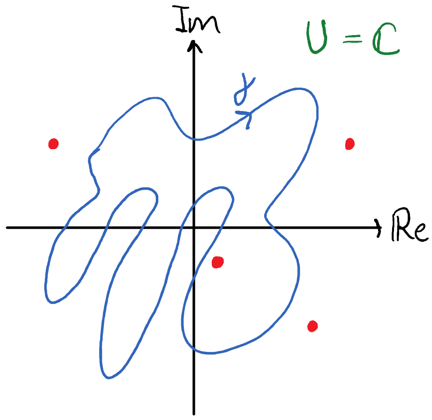
- Singularität bei $z = 3$ → ausserhalb $A(\gamma)$!

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=3} \frac{1}{z-3}\,dz = \boxed{0}$$

→ Beispiel 2: Gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$?   • = Singularität von $f(z)$

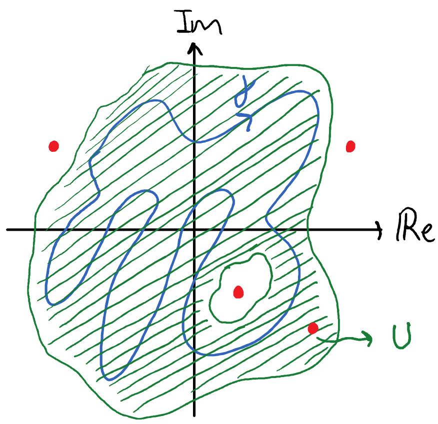


$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$



keine aussage

$\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0 \right)$



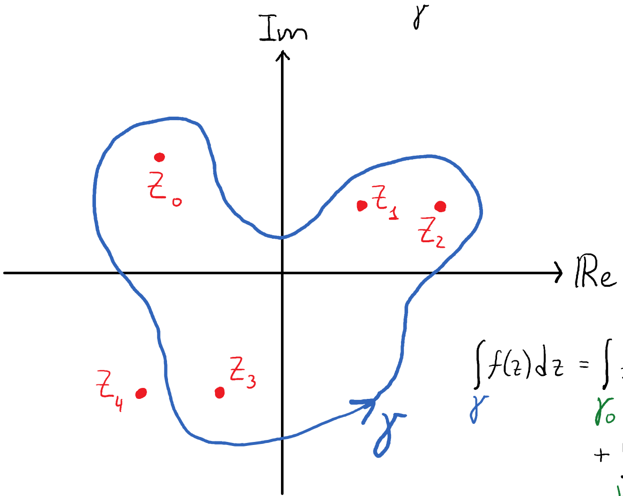
keine aussage

$\left(\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0 \right)$

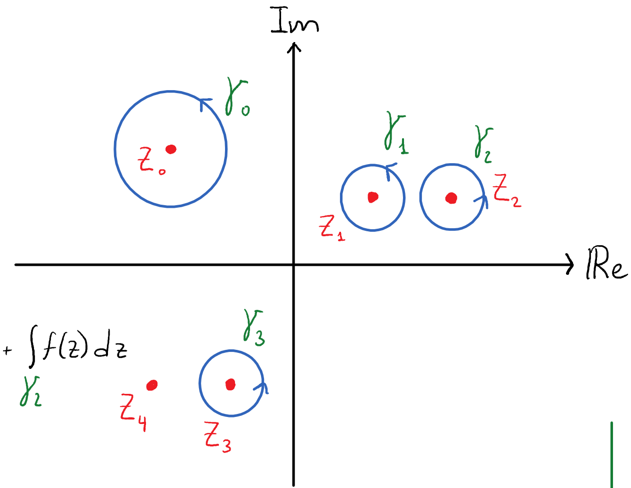
wobei $f: U \to \mathbb{C}$

3.3.1

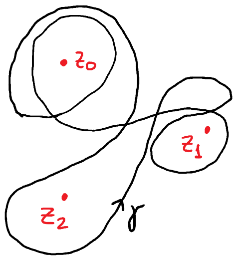
Vereinfache $\int_\gamma f(z)\,dz$ (isoliere alle Singularitäten)



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$$

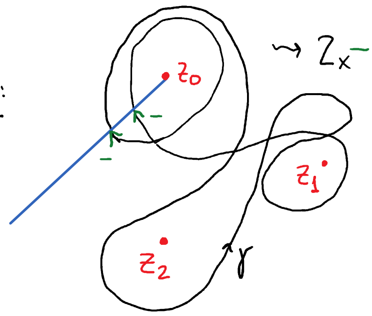


3.4.1 Sei eine holomorphe Funktion f und ein Integrationsweg γ gegeben. Vereinfache $\int_\gamma f(z)\,dz$



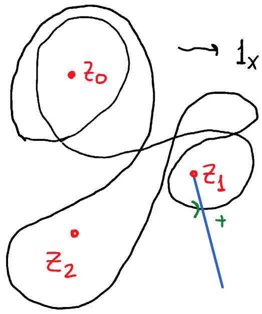
Wir müssen erst $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)\ \forall z_i \in A(\gamma)$ finden

<u>für z_0:</u>



$\rightsquigarrow 2\times - \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = -2$

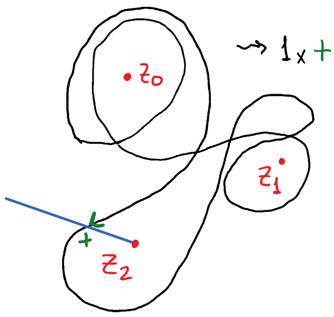
<u>für z_1:</u>



$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = 1$

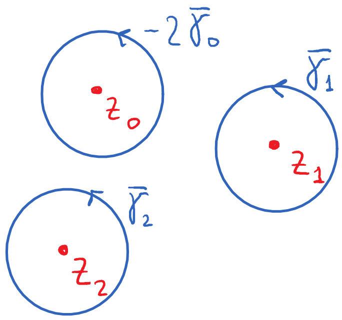
$\Downarrow$

<u>für z_2:</u>



$\rightsquigarrow 1\times + \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = 1$

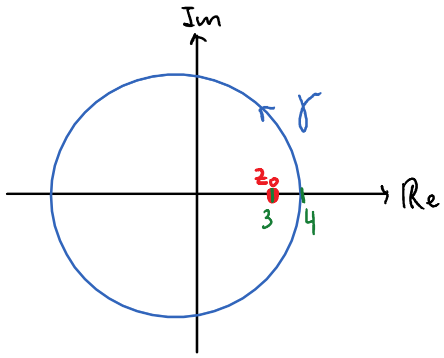
$\Rightarrow$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underset{\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)}{-2}\int_{\bar{\gamma}_0} f(z)\,dz + \underset{\mathrm{Ind}_\gamma(z_1)}{1}\int_{\bar{\gamma}_1} f(z)\,dz + \underset{\mathrm{Ind}_\gamma(z_2)}{1}\int_{\bar{\gamma}_2} f(z)\,dz$$

3.5.1

→ **Beispiel 1:** Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz$



Wenn wir uns das Integral ansehen, merken wir, dass eine Ähnlichkeit zu dem Beispielsintegral besteht

$$\underbrace{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}\ \approx\ \underbrace{\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z-3}\,dz}$$

Das Integral wäre gleich, falls $f(z)=1$, $z_0=3$ und $\gamma \to |z+1|=5$

Die Bedingungen, damit die Integralformel auch mit unseren Werten funktioniert, sind:

i. $f(z)=1$ muss ganz (überall holomorph) in $A(\gamma)$ sein ✓

ii. $z_0=3$ ist die einzige Singularität in γ ✓

↳ wäre $z_0=3$ ausserhalb $A(\gamma)$ ⇒ Satz von Cauchy ⇒ $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$

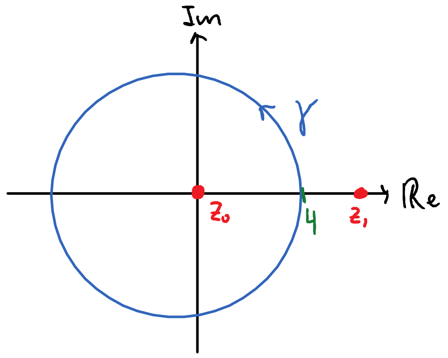
Da die Bedingungen erfüllt sind, gilt

$$f(3) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=5} \frac{f(z)}{z-3}\,dz,$$ wobei $f(z)=1$ wie wir es vorher definiert haben

da $f(z)=1 \Rightarrow f(3)=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=5}\frac{1}{z-3}\,dz \rightsquigarrow$ nach $\int_{|z+1|=5}\frac{1}{z-3}\,dz$ aufgelöst

$$\Rightarrow \int_{|z+1|=5}\frac{1}{z-3}\,dz = \boxed{2\pi i}$$

→ Beispiel 2: Wir berechnen $\int_{|z+1|=5}\frac{\sin(z)}{z\cdot(z-7)}\,dz$



Wir haben hier nicht nur eine, sondern zwei Singularitäten (bei $z_0=0$ und $z_1=7$). Da aber nur eine Singularität innerhalb von $\gamma: |z+1|=5$ liegt, sind die Bedingungen für die Cauchy-Integralformel erfüllt

$$\underbrace{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}\ \approx\ \underbrace{\int_{|z+1|=5}\frac{\sin(z)}{z(z-7)}\,dz} = \int_{|z+1|=5}\frac{f(z)}{z}\,dz \text{ für } f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7}$$

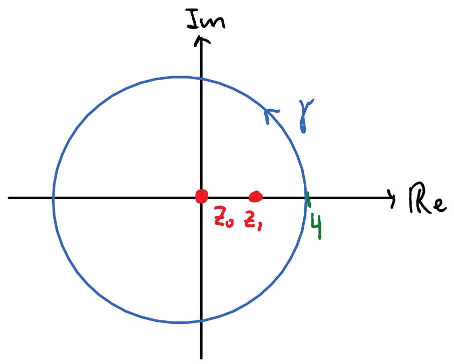
i. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z-7}$ ist ganz in γ ✓ ($z_1=7$ ist ausserhalb γ!)

ii. $z_0=0$ ist die einzige Singularität in γ ✓

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad \text{mit } f(z) := \frac{\sin(z)}{z-7},\ \gamma: |z+1|=5,\ z_0=0$$

$$\frac{\sin(0)}{0-7} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z+1|=5}\frac{f(z)}{z}\,dz \Rightarrow \int_{|z+1|=5}\frac{f(z)}{z}\,dz = \int_{|z+1|=5}\frac{\sin(z)}{z\cdot(z-7)}\,dz = \boxed{0}$$

→ Beispiel 3: Wir berechnen $\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz$



Hier haben wir zwei Singularitäten aber beide liegen innerhalb γ. Wir können hier ***nicht*** Cauchy-Integralformel direkt anwenden

(nur eine Singularität in γ nicht erfüllt)

Aber wir können unsere Funktion umformeln, so dass wir mehrere Funktionen mit je eine Singularität erhalten ⇒ *Partialbruchzerlegung* (PBZ)

$$\frac{z^2-z+1}{(z-1)z} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{h(z)} - \underbrace{\frac{1}{z}}_{g(z)}$$

Cauchy-Integralformel anwendbar? ✓ ✓

$$\Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\,dz = \underbrace{\int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz}_{i.} - \underbrace{\int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz}_{ii.}$$

i. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz$

$f(z) := 1$, $\gamma: |z+1| = 5$, $z_0 := +1 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz \Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i$$

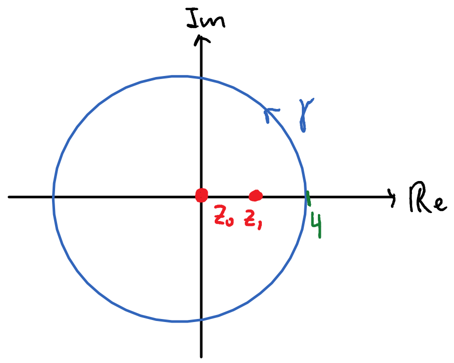
ii. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz$

$f(z) := 1$, $\gamma: |z+1| = 5$, $z_0 := 0 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz \Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z-1}\,dz - \int\limits_{|z+1|=5} \frac{1}{z}\,dz = \underset{i.}{2\pi i} - \underset{ii.}{2\pi i} = \boxed{0}$$

→ Beispiel 3: Wir berechnen $\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz$



Hier haben wir zwei Singularitäten aber beide liegen innerhalb γ. Wir können hier **nicht** Cauchy-Integralformel direkt anwenden

(nur eine Singularität in γ nicht erfüllt)

Aber wir können unsere Funktion umformeln, so dass wir mehrere Funktionen mit je eine Singularität erhalten ⇒ *Partialbruchzerlegung* (PBZ)

$$\frac{1}{(z-1)z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{z^2-z+1}{(z-1)z} = \underbrace{\frac{z^2-z+1}{z-1}}_{h(z)} - \underbrace{\frac{z^2-z+1}{z}}_{g(z)}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \underbrace{\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z-1}\,dz}_{i.} - \underbrace{\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z}\,dz}_{ii.}$$

Cauchy-Integralformel anwendbar? ✓ ✓

i. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z-1}\,dz$

$f(z) := z^2-z+1,\quad \gamma: |z+1|=5,\quad z_0 := 1 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z-1}\,dz \Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z-1}\,dz = 2\pi i$$

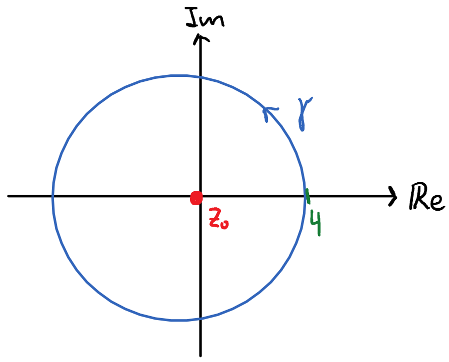
ii. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \approx \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z}\,dz$

$f(z) := z^2-z+1,\quad \gamma: |z+1|=5,\quad z_0 := 0 \rightsquigarrow f(z_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z}\,dz \Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)z}\,dz = \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z-1}\,dz - \int\limits_{|z+1|=5} \frac{z^2-z+1}{z}\,dz = \underbrace{2\pi i}_{i.} - \underbrace{2\pi i}_{ii.} = 0$$

3.5.2 Wir berechnen $\int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3} \, dz$



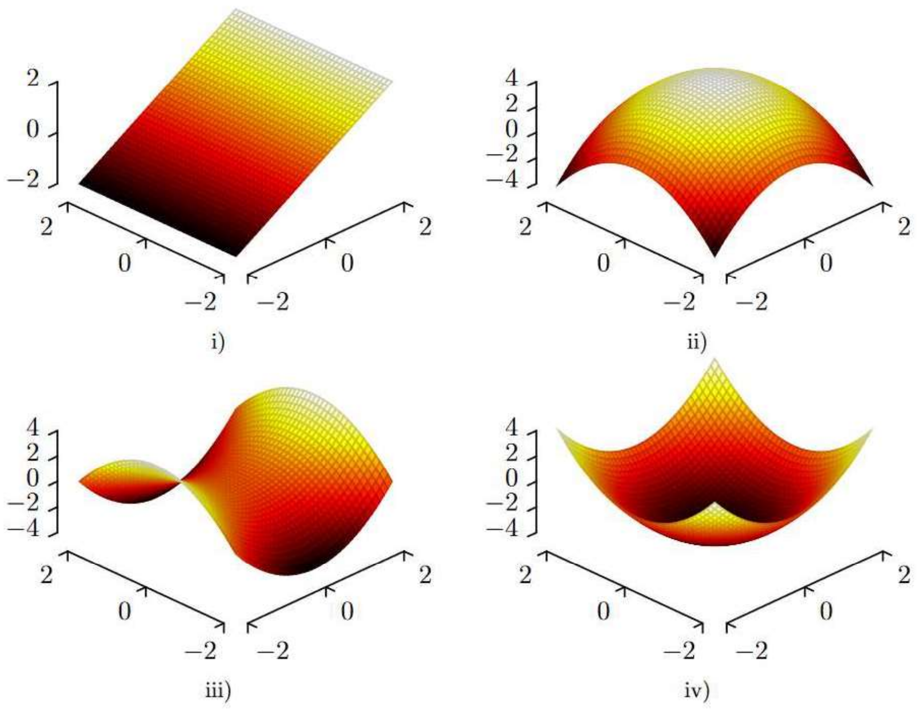
Da wir eine dreifache Singularität an der Stelle $z=0$ haben, müssen wir die Ableitung der Cauchy-Integralformel verwenden. In diesem Fall für $n=2$.

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} \, dz \quad \approx \quad \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3} \, dz$$

$$f(z) := 1, \quad \gamma: |z+1|=5, \quad z_0 := 0 \quad \rightsquigarrow \quad f^{(2)}(z) = \frac{d^2}{dz^2}(1) = 0 \Rightarrow f^{(2)}(z_0) = 0$$

$$0 = \frac{2}{2\pi i} \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3} \, dz \quad \Rightarrow \quad \int_{|z+1|=5} \frac{1}{z^3} \, dz = 0$$

3.7.1 Welche der folgenden Graphen stellen sicherlich *nicht* den Realteil einer holomorphen Funktion dar?



→ Maximums-/Minimumsprinzip ⇒ f (bzw. Re und Im) besitzt keine lokale Extrema ⇒ ii. und iv. sind sicher nicht holomorph.

4. Residuensatz

4.1.1 Finde $\mathrm{Res}(f \mid z=0)$ für $f(z) = z^3 e^{2/z}$

(Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$)

$$z^3 e^{2/z} = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \frac{1}{z^{k-3}}$$

$c_{-1} \Rightarrow$ das was $\frac{1}{z}$ multipliziert

$\Downarrow$

also bei $k=4$

bei $k=2 \Rightarrow c_{-1} = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Res}(f \mid z=0) = \frac{2}{3}}$$

4.1.2 Finde $\mathrm{Res}(f \mid z_k)$ für alle Singularitäten z_k für $f(z) = \tan(z)$

→ $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \Rightarrow$ Singularitäten von $\tan(z)$ sind die Nullstellen von $\cos(z)$

$\Rightarrow$ 1. Ordnung an der Stelle $z = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

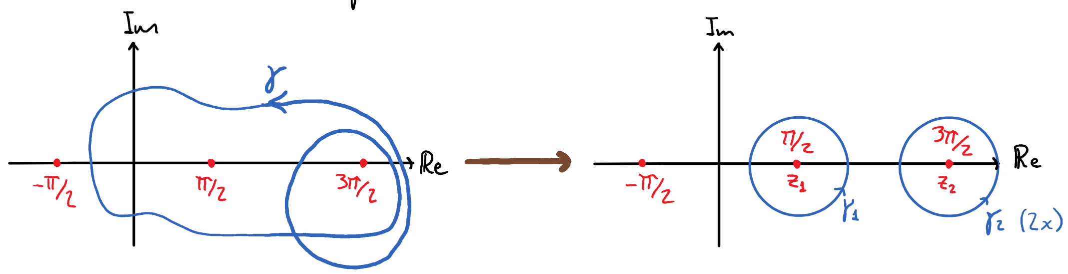
→ Da $\cos(z)$ periodisch ist, haben alle Singularitäten identische Eigenschaften

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f \mid z = \frac{\pi}{2}) = \mathrm{Res}(f \mid z = \frac{3\pi}{2})$ usw

$$\mathrm{Res}(f \mid \pi/2) = \lim_{z \to \pi/2} (z - \pi/2) \tan(z) = \lim_{z \to \pi/2} (z - \pi/2) \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \lim_{z \to \pi/2} \frac{\sin(z) + (z - \pi/2)\cos(z)}{-\sin(z)} = \boxed{-1}$$

oder $f(z) = \frac{\sin(z) \to h(z)}{\cos(z) \to g(z)} \Rightarrow \mathrm{Res}(f \mid \pi/2) = \frac{h(\pi/2)}{g'(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{-\sin(\pi/2)} = \boxed{-1}$

4.2.1 Berechne $\int_\gamma \tan(z)\, dz$



$\mathrm{Res}(f \mid \pi/2) = \mathrm{Res}(f \mid 3\pi/2) = -1$ [Beispiel 4.1.2]

$$\Rightarrow \int_\gamma \tan(z)\, dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\, \mathrm{Res}(f \mid z_k) = 2\pi i \left(1 \cdot (-1) + 2(-1)\right) = \boxed{-6\pi i}$$

4.3.1 Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$\rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fällt schneller oder gleich ab als x^{-2} $\Rightarrow$ wir können die Methode für uneigentliche Integrale verwenden

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} \rightsquigarrow \text{Nur Singularitä } z=i \text{ erfüllt } \mathrm{Im} \geq 0$$

$$\mathrm{Res}(f|i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)}\frac{1}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im}\geq 0}} \mathrm{Res}(f|z_k) = \cancel{2\pi i}\cdot\frac{1}{\cancel{2i}} = \pi$$

4.4.1 Berechne $\int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt$

- Funktion enthält nur Exponentialfunktionen mit Periode 2π
- Variablentransformation: $z := e^{it}$
- Neue Grenzen: $t\in[0,4\pi]$ für e^{it} entspricht gerade 2 Umdrehungen um den Einheitskreis
- $\frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi} \frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \int_{2\times|z|=1} \frac{\cancel{z}}{1+2z}\cdot\frac{1}{i\cancel{z}}\,dz = 2\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\frac{1}{i}\,dz = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz$$

- Integrationsweg: Einheitskreis
- Singularitäten: einfache Polstelle an der Stelle $z=-\frac{1}{2}\in A(\gamma)$ Einheitskreis

$$g(z) := \frac{1}{1+2z} \rightsquigarrow \mathrm{Res}(g|z=-\tfrac{1}{2}) = \lim_{z\to -1/2}(z+\tfrac{1}{2})\frac{1}{1+2z} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(g|z=-\tfrac{1}{2}) = \cancel{2}\pi i\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \pi i$$

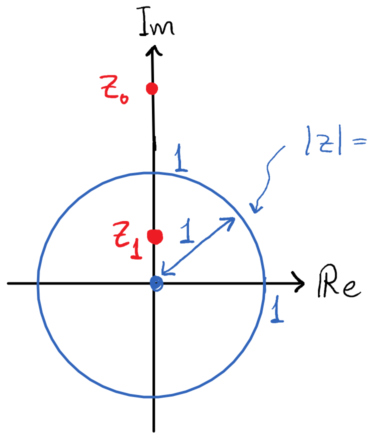
$$\Rightarrow \int_0^{4\pi}\frac{e^{it}}{1+2e^{it}}\,dt = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+2z}\,dz = \frac{2}{i}\cdot\pi i = 2\pi$$

4.4.2 Berechne $\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt$

- Funktion enthält nur Exponentialfunktionen mit Periode 2π $\left(\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$
- Variablentransformation: $z := e^{it}$
- Neue Grenzen: $t \in [-2\pi, 4\pi]$ für e^{it} entspricht gerade 3 Umdrehungen um den Einheitskreis $(4\pi - (-2\pi) = 6\pi = 3\cdot(2\pi))$
- $\frac{dz}{dt} = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}$
- $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z+z^{-1}}{2i}$

$$\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt = \int_{3\times|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz}\,dz = 3\int_{|z|=1} \frac{2\cancel{i}}{2\sqrt{2}i - z + z^{-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{i}z}\,dz = 6\int_{|z|=1} \frac{1}{2\sqrt{2}iz - z^2 + 1}\,dz$$

$$= -6\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)(z-\sqrt{2}i+i)}\,dz$$



- Integrationsweg: Einheitskreis
- Singularitäten: $z_0 = \sqrt{2}i + i$, $z_1 = \sqrt{2}i - i$

Nur z_1 liegt in $|z| = 1$

$$\mathrm{Res}(g \mid \sqrt{2}i - i) = \lim_{z \to (\sqrt{2}i - i)} \cancel{(z-\sqrt{2}i+i)} \frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)\cancel{(z-\sqrt{2}i+i)}} = -\frac{1}{2i}$$

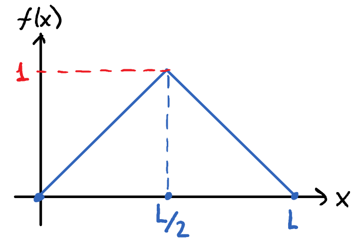
$$\Rightarrow \int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\sin(t)}\,dt = -6\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-\sqrt{2}i-i)(z-\sqrt{2}i+i)}\,dz = \cancel{-}6\left(\cancel{2}\pi\cancel{i}\cdot\left[\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2i}}\right]\right)$$

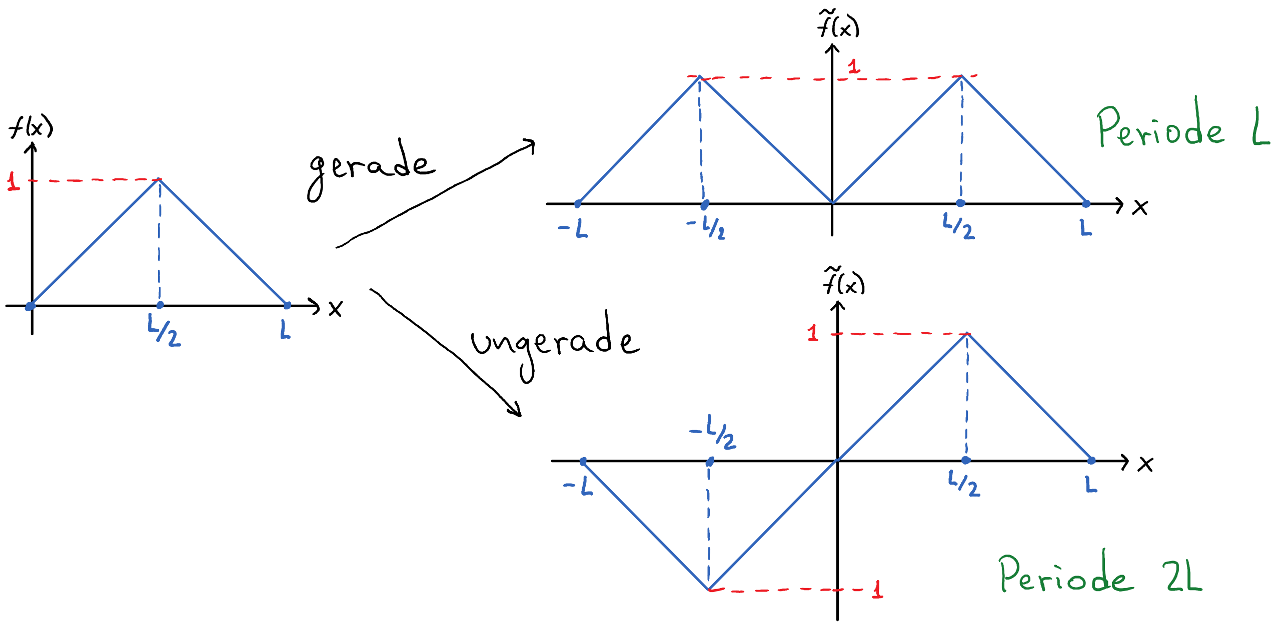
$$= \underline{6\pi}$$

5. Fourier

5.1.1

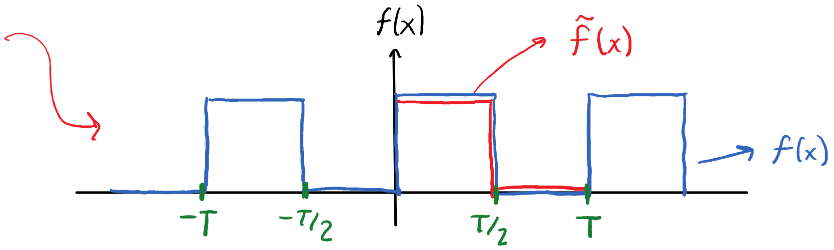
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad \longrightarrow$$





5.1.2 Berechne die Fourierreihe der T-periodischen Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases}$$



$$\rightarrow a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\Big|_0^{T/2}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n) = 0 \qquad [\sin(n\pi) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}]$$

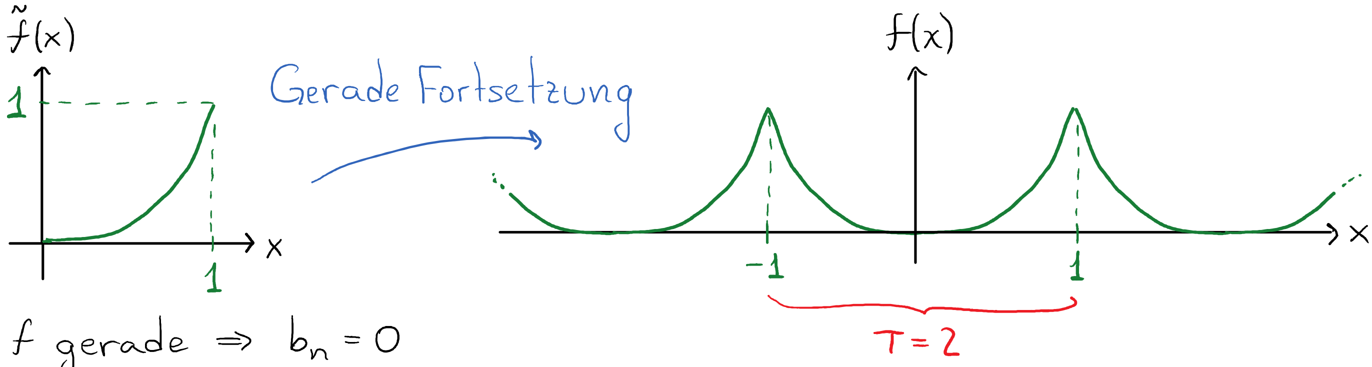
$$\rightarrow b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\Big|_0^{T/2}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos(n\pi) + 1 = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 1\,dx = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

5.1.2 Bestimme die Fourierreihe der geraden Fortsetzung von $\tilde{f}(x) = x^2,\ x \in [0,1]$



$\rightarrow f$ gerade $\Rightarrow b_n = 0$

$$\rightarrow a_n = 2\cdot\frac{2}{2}\int_0^1 t^2\cos\left(\frac{2\pi}{2}nt\right)dt = 2\int_0^1 t^2\cos(\pi n t)\,dt$$

$$= 2\left[t^2\frac{1}{\pi n}\sin(n\pi t)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{2}{\pi n}\sin(n\pi t)\,t\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\,t\cos(\pi n t)\Big|_0^1 - \frac{4}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \cos(\pi n t)\,dt = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$\rightarrow a_0 = 2\,\frac{2}{2}\int_0^1 t^2\,dt = 2\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n x)$$

5.1.3 Berechne $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4 n^4}$ mit Hilfe der 2π-periodisch geraden Fortsetzung von $f(x) = x^2,\ x \in [0,\pi]$

$\rightarrow f$ gerade $\Rightarrow b_n = 0$

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(n\cdot t)\,dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} \qquad a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

$\rightarrow a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad b_n = 0$

Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right) = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5}-\frac{\pi^4}{9}\right) = \underline{\frac{\pi^4}{90}}$$

5.2.1 Finde die Fouriertransformation $\hat{f}(\omega)$ von $f(t) = \begin{cases} 1, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{T/2}^{T/2} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega T/2} + \frac{1}{i\omega}e^{i\omega T/2}$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \Rightarrow \underline{\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \qquad \left[\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}\right]$$

5.2.2 Gegeben $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2}$, finde $F\{tf''(t-3)\}(\pi)$

$$F\{tf''(t-3)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}F\{f''(t-3)\} = i\frac{d}{d\omega}\left(i\omega F\{f'(t-3)\}\right)$$

$$= i\frac{d}{d\omega}\left((i\omega)^2F\{f(t-3)\}\right) = -i\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2e^{-3i\omega}\hat{f}(\omega)\right]$$

$$= -i\frac{d}{d\omega}\left[e^{-3i\omega}\right] = -3e^{-3i\omega}$$

$$\Rightarrow F\{tf''(t-3)\}(\pi) = -3e^{-3\pi i} = \underline{3}$$

5.2.3 Berechne $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega$ mit Hilfe der FT von $f(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

$$\rightarrow \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega} + \frac{1}{i\omega}e^{i\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\omega) \qquad \left[\mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}\right]$$

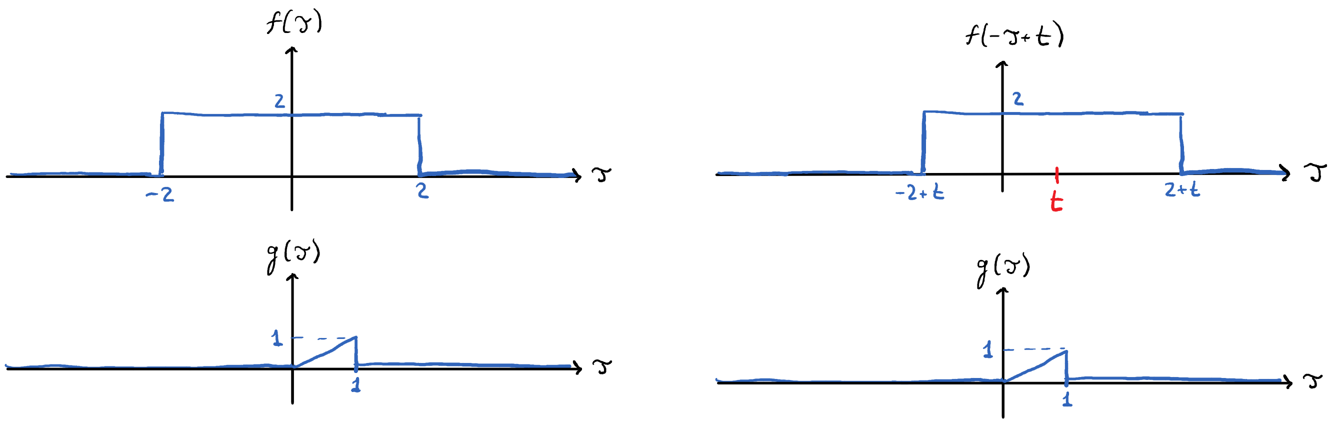
→ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, dt$ [Satz von Plancherel]

$$\int_{-1}^{1} |1|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, 2 \, \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega$$

$\left| \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2$ ist eine gerade Funktion $\Rightarrow \int_0^\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}$

$$2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

5.3.1 Berechne $(f * g)(t)$ für $f(t) = \begin{cases} 2, & |t| \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



für $t < -2$ oder $t > 3 \Rightarrow (f * g)(t) = 0$

für $-2 \leq t \leq -1 \Rightarrow (f * g)(t) = \int_0^{t+2} 2 \cdot \tau \, dt = (t+2)^2$

für $-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow (f * g)(t) = \int_0^1 2 \tau \, dt = 1$

für $2 \leq t \leq 3 \Rightarrow (f * g)(t) = \int_{-2+t}^{1} 2 \cdot \tau \, dt = 1 - (t-2)^2$

$$(f * g)(t) = \begin{cases} (t+2)^2, & -2 \leq t < 1 \\ 1, & -1 \leq t \leq 2 \\ 1 - (t-2)^2, & 2 < t \leq 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

5.3.2 Drücke die Fouriertransformation der Funktion $\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} g(s) \, ds$ durch $\hat{g}(\omega)$ aus

→ Wir verscuchen im ersten Schritt $\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} g(s) \, ds$ als eine Faltung darzustellen

$$\int_{\boxed{-\infty}}^{\boxed{t}} \underline{e^{s-t}} \, g(s) \, ds \approx \int_{\boxed{-\infty}}^{\boxed{\infty}} \underline{h(t-s)} \, g(s) \, ds$$

→ Wir sehen, dass $h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

→ Vielleicht kann man es besser sehen, wenn wir eine Transformation durchführen

$$a := t - s \Rightarrow ds = -da \qquad \begin{matrix} s = -\infty \Rightarrow a = \infty \\ s = t \Rightarrow a = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} g(s)\, ds = -\int_{\infty}^{0} e^{-a} g(t-a)\, da = \int_{0}^{\infty} e^{-a} g(t-a)\, da$$

• Da $(f * g) = (g * f)$ gilt, können wir unsere Faltung auch anders darstellen

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\infty}} \underline{e^{-a}}\, g(t-a)\, da \approx \int_{\boxed{-\infty}}^{\boxed{\infty}} \underline{h(a)}\, g(t-a)\, da$$

• Hier ist es einfach zu sehen, dass $h(a)$ irgendwie $= e^{-a}$ ist. Da wir nicht $g(t)$ kennen, muss $h(t)$ diese Beschränkung von $t \in [0, \infty]$ haben.

$$\text{Also } h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \widehat{(h * g)} = \sqrt{2\pi}\, \hat{h}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

$$\text{und } \hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t(i\omega + 1)}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega + 1} e^{-t(i\omega+1)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega + 1}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega + 1} \cdot \hat{g}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{i\omega + 1}$$

6. Laplace

6.1.1

i. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = e^{t^3}$ existiert **nicht** (**1.** nicht erfüllt)

ii. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = \frac{1}{t-2}$ existiert **nicht** (2. nicht erfüllt) bei $t=2$ nicht integrierbar

iii. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ existiert

1. erfüllt
2. $\int_{-T}^{T} \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| dt = 2\int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[4\sqrt{t}\right]_0^T = 4\sqrt{T} < \infty \quad \forall\, T > 0$

iv. $\mathcal{L}\{f\}(s)$ von $f(t) = (e^t)^7$ existier für $s > 7$

2. erfüllt

1. $(e^t)^7 = e^{7t} \rightsquigarrow e^{7t} \overset{?}{\leq} Ce^{s_0 t} \Rightarrow$ erfüllt, falls $C > 1,\ s_0 > 7$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f\}(s)$ existiert für $\mathrm{Re}\{s\} > s_0 = 7$

6.1.2

→ Beispiel 1: $Y(s) = \frac{3}{(s+1)^4}$. Finde $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$

$$\left[\ \mathcal{L}\{t^n e^{-at}\} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}\ \right]$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{3}{3!}\,\frac{3!}{(s+1)^4} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{3!}{(s+1)^4}\right\} = \frac{1}{2}t^3 e^{-t}$$

$n = 3$
$a = 1$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^3 e^{-t}$$

→ Beispiel 2: $\ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t)$. Berechne $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\}(s)$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\}(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}(s) - \frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0} = s\left(s\,\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0)\right) - \dot{y}(0)$$

$$= s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)$$

6.1.3 Löse $\ddot{y}(t) - y(t) = e^t$, $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ $\left[t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \right]$

$\rightarrow \mathcal{L}\{\frac{d^2}{dt^2} y(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} y(t)\}(s) - \frac{d}{dt} y(t)\Big|_{t=0} = s(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y(0)) - \dot{y}(0)$

$= s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) = s^2 Y(s)$

$\rightarrow \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$

$\rightarrow \mathcal{L}\{e^t\}(s) = \frac{1}{s-1} \Longrightarrow s^2 Y(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s-1)}$

$= \frac{1}{(s+1)(s-1)^2}$

$\rightarrow$ Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$

$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{-1/4}{s-1} + \frac{1/2}{(s-1)^2} + \frac{1/4}{s+1}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}\} = -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}$

$n=0$, $a=-1$ $\quad$ $n=1$, $a=-1$ $\quad$ $n=0$, $a=1$

$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sinh(t)$