# Beweise

## 2. Funktionen

### 2.2.1 Cauchy-Riemannschen Gleichungen I

- $f(z) = f(x+yi) = \tilde{f}(x,y)$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x+h,y) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h+yi) - f(x+yi)}{h}$

  $= f'(x+yi)$, falls $f$ komplex differenzierbar ist $\quad$ ! $h \in \mathbb{R}$

  (Differenzierbarkeit auf der $\mathbb{R}$e-Achse)

- $\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(x,y+h) - \tilde{f}(x,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+i(h+y)) - f(x+yi)}{h}$

  $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+ih+iy) - f(x+yi)}{h} = i \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+ih+iy) - f(x+yi)}{ih}$

  $= i f'(x+yi)$, falls $f$ komplex differenzierbar ist

  (Differenzierbarkeit auf der Im-Achse)

- Damit die Ableitungen gleich sind (eindeutig)

$$\Rightarrow \quad i \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$$

$\blacksquare$

### 2.2.2 Cauchy-Riemannschen Gleichungen II

- $f(x+yi) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $\quad$ $u, v$ sind reelle Funktionen

- $i \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$

  $i \frac{\partial}{\partial x}[u(x,y) + iv(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[u(x,y) + iv(x,y)]$

  $i \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x,y)$

• Koeffizientenvergleich (Re- bzw Im-Teile)

Imaginärteile $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \rightsquigarrow u_x = v_y$

Realteile $\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \rightsquigarrow -v_x = u_y$

■

# 3. Integrale

## 3.2.1 Cauchy-Integralsatz

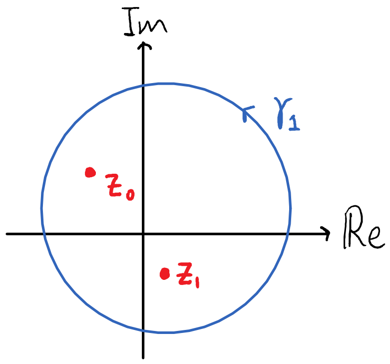
• Für eine geschlossene Kurve $\gamma$ gilt, dass die Endpunkten identisch sind

$\Rightarrow$ Wenn wir $\gamma$ im Interval $[a,b]$ definieren, so gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

■

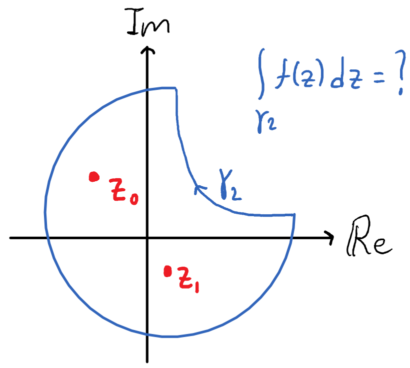
## 3.3.1

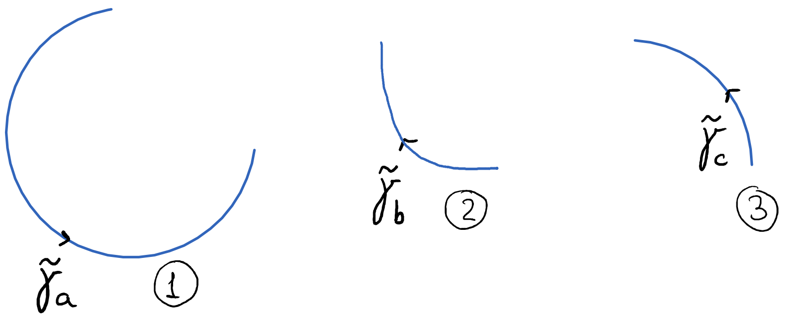



• Sagen wir mal $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma \in \mathbb{C}$

• Wir definieren $\gamma_2$ und wollen jetzt $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ berechnen

• Dafür definieren wir ein Paar Wegfragmente:



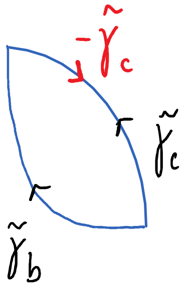




Wir haben $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_c$ und $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_a + \tilde{\gamma}_b$

Betrachte $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_a} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz$ mit $\tilde{\gamma}_a = \gamma_1 - \tilde{\gamma}_c$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \sigma$$

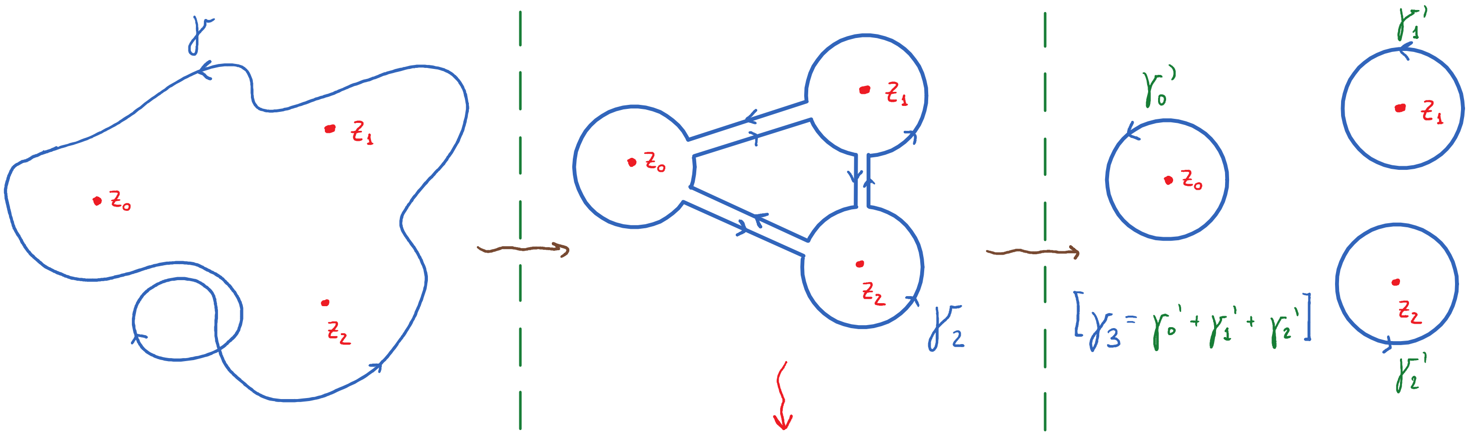


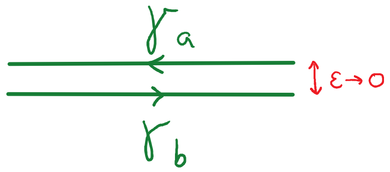

da $\int_{\tilde{\gamma}_b} f(z)\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_c} f(z)\,dz = 0$$

Satz von Cauchy

## 3.3.2 Isolierung der Singularitäten




Mit $\varepsilon \to 0$ ist $\gamma_a = -\gamma_b \Rightarrow \int_{\gamma_a} f(z)\,dz + \int_{\gamma_b} f(z)\,dz = 0$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Bem.: $\gamma_0, \gamma_1$ und $\gamma_2$ enthalten nur *eine* Singularität

## 3.7.1 Maximumsprinzip

→ Mittelwertsatz: $f(a) = \int_0^1 f(re^{2\pi i t} + a)\,dt$

$\Rightarrow f(a) \leq \max\limits_{t \in [0,1]} f(re^{2\pi i t} + a)$ = grösste Wert von $f$ auf dem Kreis

$\Rightarrow$ Hat $f$ ein lokales Maximum, so muss $f$ in einer Umgebung von $z$ konstant sein

→ Analog für Minima mit $f(a) \geq \min\limits_{t \in [0,1]} f(re^{2\pi i t} + a)$

$\rightarrow$ Da $f(z) = \mathrm{Re}\{f(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{f(z)\}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{f(a)\} = \int_0^1 \mathrm{Re}\{f(re^{2\pi i t} + a)\}\,dt \rightsquigarrow \mathrm{Re}\{f(a)\} \leq \max_{t\in[0,1]} \mathrm{Re}\{f(re^{2\pi i t} + a)\}$$

oder $\geq$ min

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}\{f(a)\} = \int_0^1 \mathrm{Im}\{f(re^{2\pi i t} + a)\}\,dt \rightsquigarrow \mathrm{Im}\{f(a)\} \leq \max_{t\in[0,1]} \mathrm{Im}\{f(re^{2\pi i t} + a)\}$$

oder $\geq$ min

$\Rightarrow$ Realteil und Imaginärteil besitzen auch keine lokale Extrema

# 4. Residuensatz

## 4.1.1 Res(f | z_k) für Singularität mit Grad n

i) $f(z) = C_{-n}(z-z_0)^{-n} + C_{-n+1}(z-z_0)^{-n+1} + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z-z_0) + \dots$

↳ Laurent-Reihe geht nur bis $(z-z_0)^{-n}$ (grad n)

ii) $(z-z_0)^n f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z-z_0) + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + C_0(z-z_0)^n + C_1(z-z_0)^{n+1} + \dots$

iii) $\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = C_{-n+1} + \dots + (n-1)C_{-1}(z-z_0)^n + nC_0(z-z_0)^{n-1} + (n+1)(z-z_0)^n + \dots$

$\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = \dots + (n-1)n\,C_{-1}(z-z_0)^n + n(n-1)\,C_0(z-z_0)^{n-2} + (n+1)n(z-z_0)^{n-1} + \dots$

$\vdots$

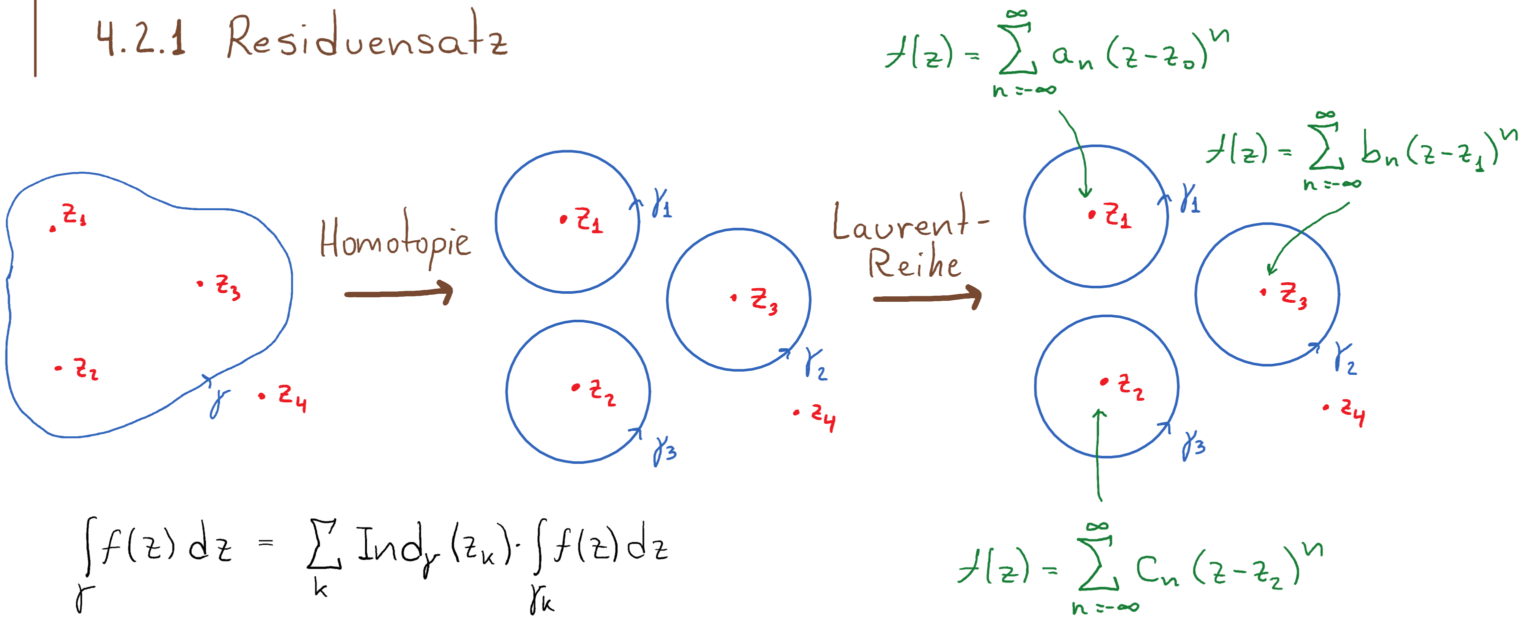
$\Rightarrow \frac{d^{n-1}}{dz}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = \dots (n-1)!\,C_{-1} + n!\,C_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$

iv) $\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = \dots (n-1)!\,C_{-1} + n!\,C_0\,\cancel{(z-z_0)}^{\,0} + \frac{(n+1)!}{2!}\cancel{(z-z_0)^2}^{\,0} + \dots$

$= (n-1)!\,C_{-1}$

$$\Rightarrow C_{-1} = \operatorname{Res}(f|z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

## 4.2.1 Residuensatz




$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \operatorname{Ind}_\gamma(z_k)\cdot \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

$$= \sum_k \operatorname{Ind}_\gamma(z_k)\cdot \int_{\gamma_k} \sum_i C_i^k (z-z_k)^i\,dz$$

→ Wir verwenden die Eigenschaft $\int_{\gamma'} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, falls $z_0 \in A(\gamma')$)

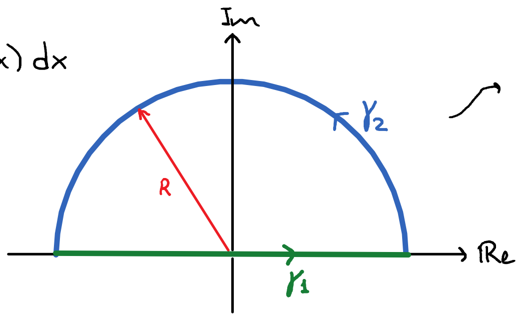
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\cdot 2\pi i\, C_{-1}^k \longrightarrow C_{-1}^k =: \mathrm{Res}(f|z_k)$$

$$= 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k)\,\mathrm{Res}(f|z_k)$$

$\blacksquare$

## 4.3.1 Uneigentliche Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$




$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist gerade $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ für $R \to \infty$

$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$

$$\left[\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx\right]$$

$\rightarrow$ Wir betrachten $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

$\hookrightarrow$ Was wir mit $R \to \infty$ suchen

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(R\cdot e^{it})\cdot Rie^{it}\,dt \quad (\text{Parametrisierung} \to \text{Halbkreis } Re^{it} \text{ für } t\,[0,\pi])$$

Falls $f(z) = \mathcal{O}(z^{-2}) \Rightarrow f(R\cdot e^{it}) = \mathcal{O}(R^{-2}) \rightarrow e^{it}$ spielt keine Rolle, da $|e^{it}| = 1$

$\Rightarrow f(R\cdot e^{it})\cdot Rie^{it} = \mathcal{O}(R^{-1})$ $\qquad (|Re^{it}| = R)$

Wenn wir das jetzt mit $R \to \infty$ betrachten $\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \underbrace{f(Re^{it})\cdot Rie^{it}}_{\mathcal{O}(R^{-1})} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(Re^{it})\,Rie^{it}\,dt = \int_{\gamma_2} 0\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{0} = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im} \geq 0}} \mathrm{Res}(f|z_k)$$

$A(\gamma)$ für $R \to \infty$ ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im} \geq 0}} \mathrm{Res}(f|z_k)$$

$\blacksquare$

### 4.4.1 Integrale mit $e^{it}$, $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$

→ Variablenwechsel mit $z = e^{\frac{2\pi}{T}it}$

$$\int_{mT}^{\ell T} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (\ell - m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz$$

∘ Grenzen: Das Laufen von $e^{\frac{2\pi}{T}it}$ → Parametrisierung eines Kreises von $mT$ bis $\ell T$ entspricht gerade $(\ell-m)$ Umdrehungen um den Einheitskreis (ganze Umdrehungen)

∘ Integrationsvariable: Wir haben $z = e^{\frac{2\pi}{T}it}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2\pi i}{T} e^{\frac{2\pi}{T}it} = \frac{2\pi i z}{T} \Rightarrow dt = \frac{T}{2\pi i z}$$

$$\Rightarrow \int_{mT}^{\ell T} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (\ell - m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}$$

■