PVK

Komplexe Analysis

FS 2020

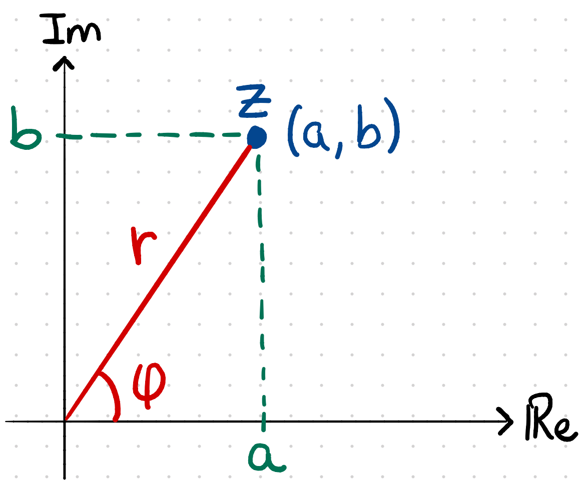
Eine kleine

Einführung

Eine komplexe Zahl

→ Alle komplexe Zahlen lassen sich mit ***Realteil*** und ***Imaginärteil*** beschreiben

$$z = a + bi \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= \mathrm{Re}\{z\} = \text{Realteil} \\ b &= \mathrm{Im}\{z\} = \text{Imaginärteil} \end{aligned}\right\} a, b \in \mathbb{R}\,!$$



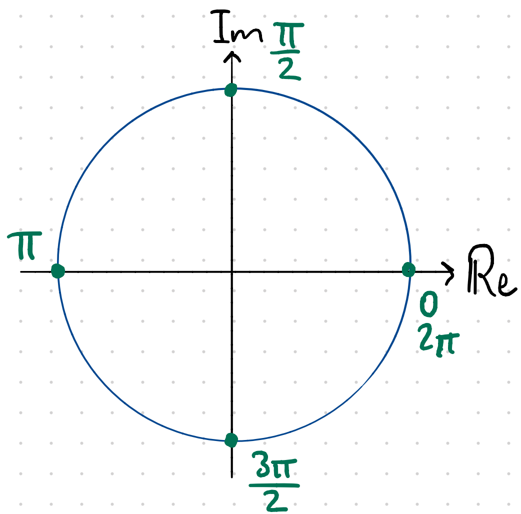
Kartesische Form

$$z = a + bi$$

Polarform

$$z = \underbrace{r}_{r = |z| = \text{Betrag}} e^{i\varphi} = r[\cos(\underbrace{\varphi}_{\varphi = \arg(z) = \text{Argument}}) + i\sin(\varphi)]$$

	Kart. Form	Polarform
Realteil Re	a	$r\cos(\varphi)$
Imaginärteil Im	b	$r\sin(\varphi)$
Betrag $\lvert z\rvert$	$\sqrt{a^2+b^2}$	r
Argument $\arg(z)$	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	φ



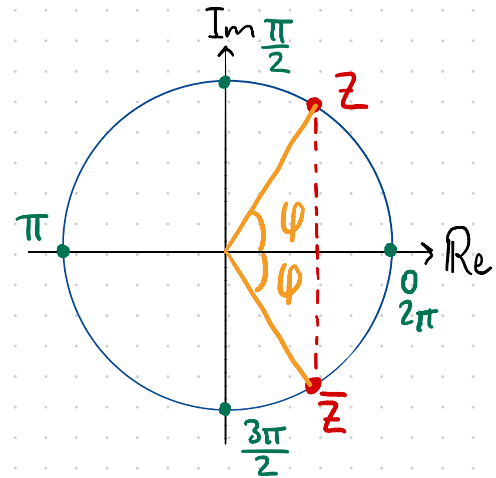
Beispiel: $z = -\sqrt{3} + i$

$\Rightarrow r =$

$\Rightarrow \varphi =$

→ Eigenschaften

- $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$
- $z - \overline{z} = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\{z\}$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

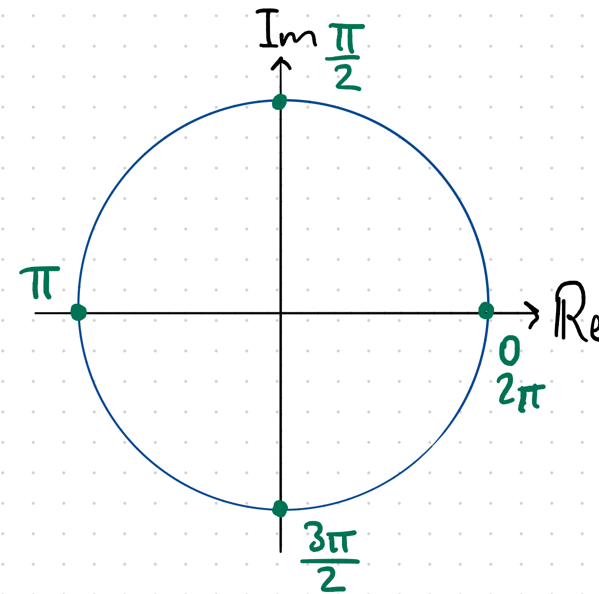


→ Moivrescher Satz

- 2π-Periodizität: $e^{i\varphi + 2\pi i k} = e^{i\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z^n = a = re^{i\varphi} \implies \boxed{z = r^{1/n}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}}, \quad k = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Beispiel: Finde alle Singularitäten von $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$



Funktionen

Funktionen in $\mathbb{C}$

$\rightarrow f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ Re, Im

$$z \longmapsto f(z) = \underset{[z = x+yi]}{f(x+yi)} = \tilde{f}(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \operatorname{Re}\{f(z)\} \\ \to \operatorname{Im}\{f(z)\} \end{matrix}$$

Beispiel: $f(z) = z^2$

→ Cauchy-Riemannsche Gleichungen

Variante 1

$$\boxed{i \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)}$$

$$\left[i f_x = f_y \right]$$

Variante 2

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \end{aligned}}$$

$$\left[\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right]$$

⚠ holomorph = komplex differenzierbar = analytisch

Beispiel: $f(z) = z + 3\bar{z}$ → Ist f holomorph?

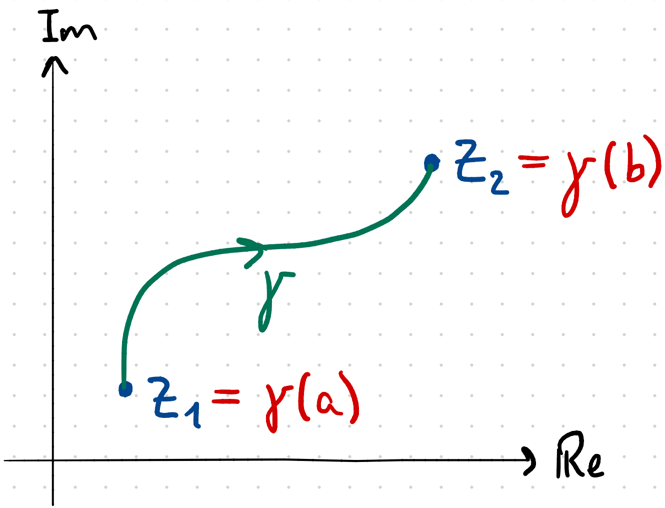
$\left[i f_x = f_y \right]$ oder $\begin{bmatrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{bmatrix}$

Integrale

Kurvenintegrale

→ Interpretation ⇒ Extras

→ Parametrisierung

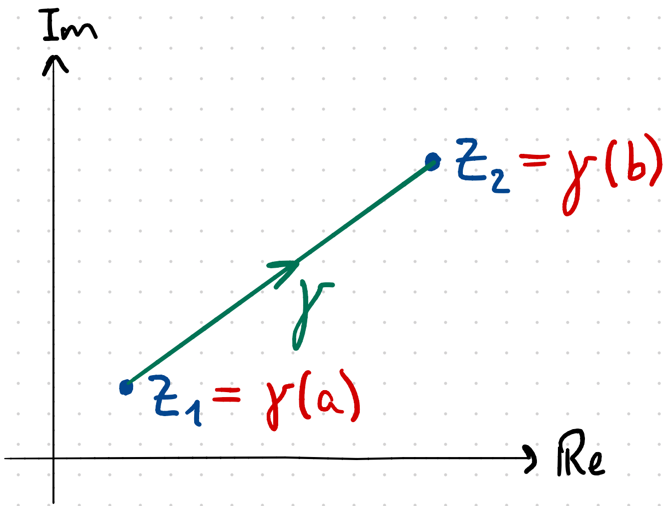


[alle z auf $\gamma \to z = \gamma(t)$]

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t), \quad t \in [a,b]$$

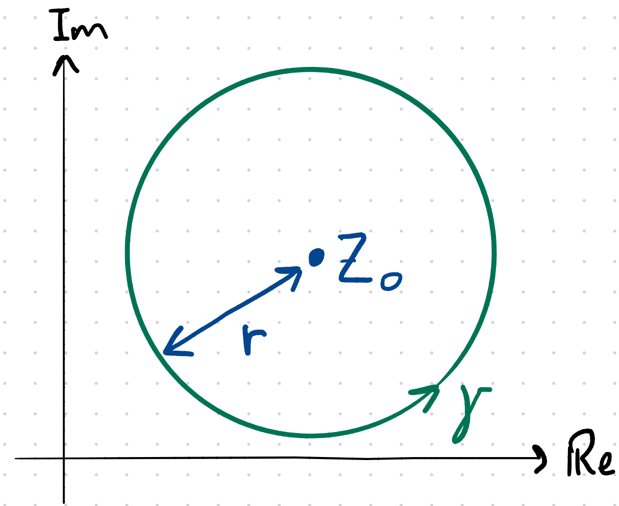
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt}$$

Gerade



$$\gamma(t) = z_2 t + (1-t) z_1$$
$$t \in [0,1]$$

Kreis



$$\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

<u>Beispiel:</u> Berechne $\int\limits_{\boxed{|z|=1}} \frac{1}{z}\,dz$

↳ Kreis mit Mittelpunkt (0,0) und Radius $r = 1$

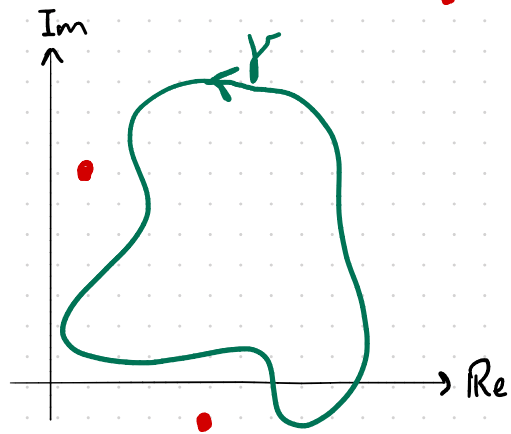
γ geschlossen

Satz von Cauchy

→ γ geschlossen, f holomorph. Falls es keine Singularität innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt, so ist $\int_\gamma f(z) = 0$

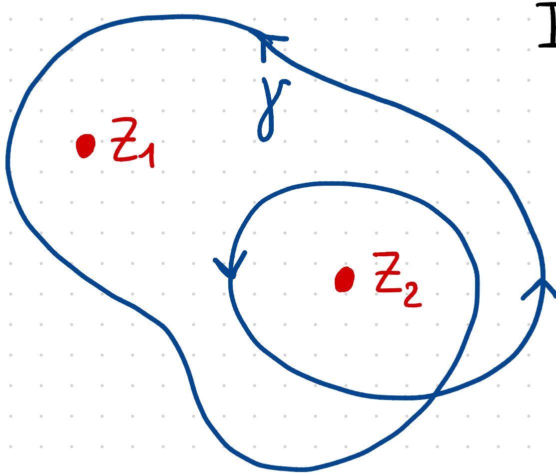
• = Singularität

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$



Umlaufzahl → $\mathrm{Ind}_\gamma(z_k)$

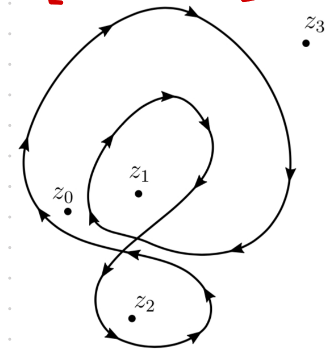
→ Sagt uns wie oft eine Singularität von einer Kurve γ umgelaufen wird



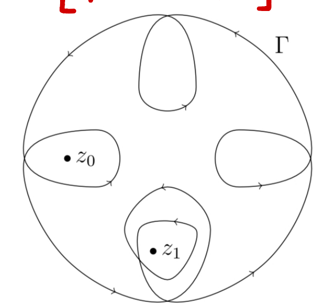
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) =$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) =$$

[FS2017]

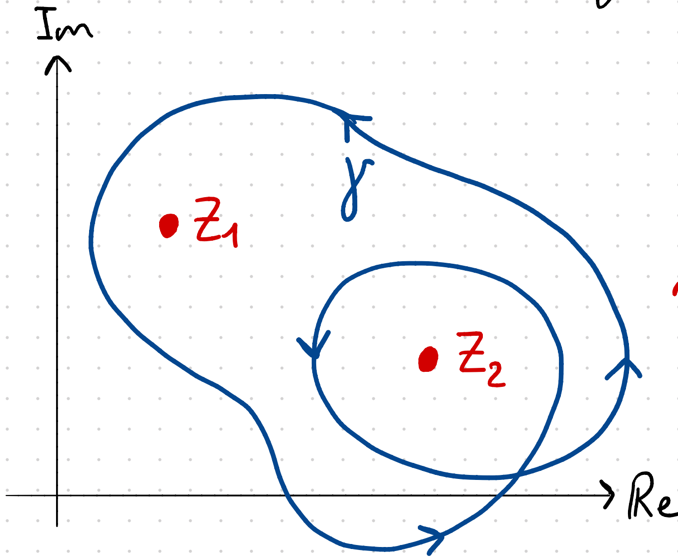


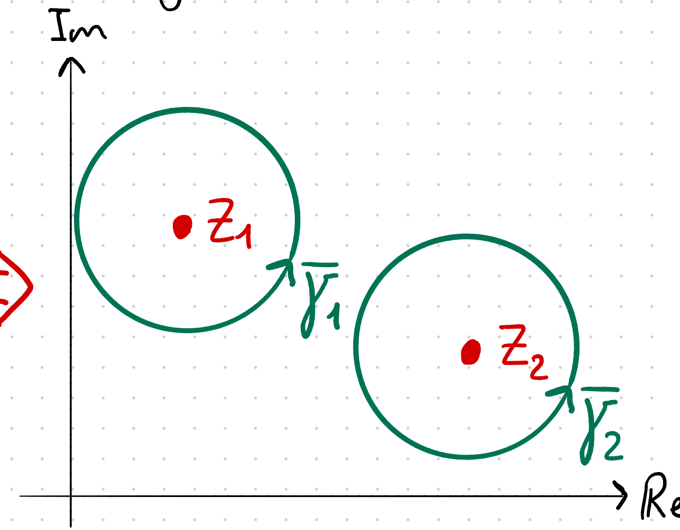
[FS2016]



Homotopie Invarianz

→ Homotopie Invarianz ermöglicht uns die Singularitäten zu isolieren





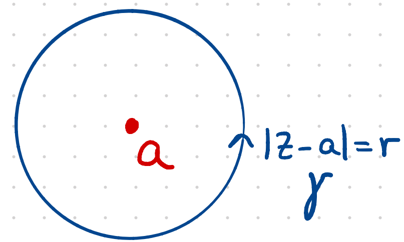
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k}^{N} \operatorname{Ind}_{\gamma}(z_k) \int_{\overline{\gamma}_k} f(z)\,dz$$

$\overline{\gamma}_k$ ↳ $1\times$ in math pos. Richtung

Mittelwertsatz

→ $f(a)$ = Mittelwert der Abbildungen am Rand (Kreis mit $r=1$)

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + a)\, dt}$$



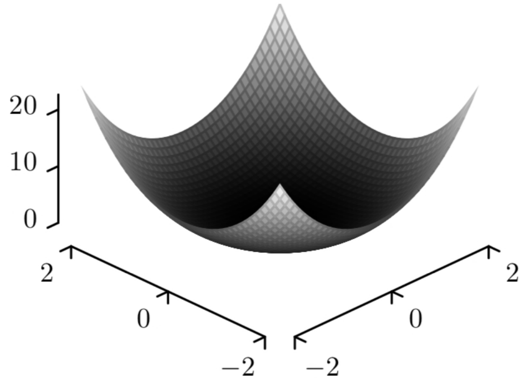
$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma f(z)\, dz$$

Maximumsprinzip

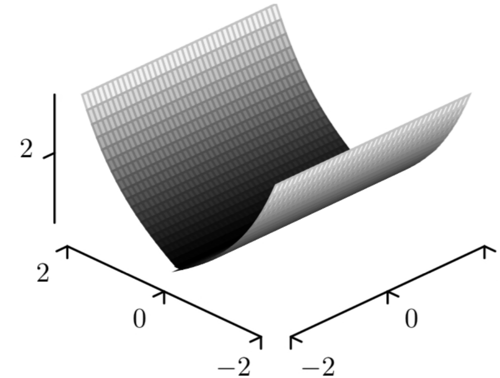
→ Realteil bzw Imaginärteil einer holomorphen Funktion besitzt keine ***lokale*** Maxima o er Minima, ausser wenn sie konstant ist

Beispiel:

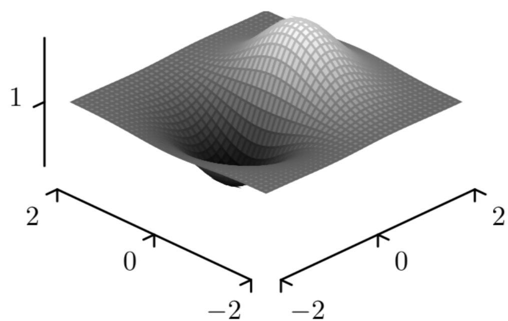
[FS 2019]



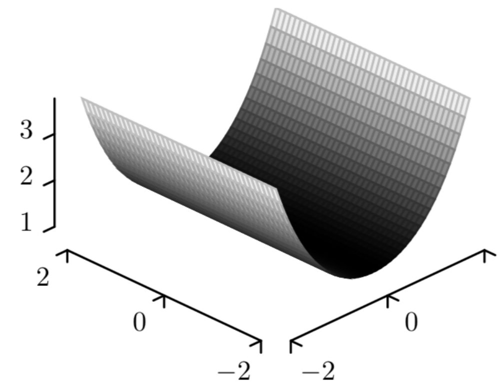
i.



ii.



iii.



iv.

Residuensatz

Reihen

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

Taylor

sin, cos, exp, log

Konvergenzradius ∞

Geometrische Reihe

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad |q| < 1 = \sigma$$

Konvergenzradius

Beispiel: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}, \; z_0 = 0$ [FS 2018]

Residuum

$\rightarrow c_{-1}$ von $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ $\rightarrow$ also das was $\frac{1}{z-z_0}$ multipliziert

i. Pol 1. Ordnung: 2 Methoden

1. $\boxed{\operatorname{Res}(f|z_i) = \lim_{z \to z_i} (z-z_i) f(z)}$

2. $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ mit $h(z_i) \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$

ii. Pol m-te Ordnung:

iii. Wesentliche Singularität:

Residuum

$\rightarrow c_{-1}$ von $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \rightarrow$ also das was $\frac{1}{z-z_0}$ multipliziert

i. Pol 1. Ordnung: 2 Methoden

1. $$\boxed{\text{Res}(f|z_i) = \lim_{z \to z_i} (z-z_i) f(z)}$$

2. $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ mit $h(z_i) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

ii. Pol m-te Ordnung:

$$\boxed{\text{Res}(f|z_i) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[(z-z_i)^m f(z) \right]}$$

iii. Wesentliche Singularität:

Residuum

→ c_{-1} von $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ → also das was $\frac{1}{z-z_0}$ multipliziert

i. Pol 1. Ordnung: 2 Methoden

1. $$\boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) = \lim_{z\to z_i} (z-z_i) f(z)}$$

2. $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$ mit $h(z_i)\neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

ii. Pol m-te Ordnung:

$$\boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[(z-z_i)^m f(z)\right]}$$

iii. Wesentliche Singularität: Laurententwicklung

→ Wesentlich: Generell exp, cos, sin, log mit Argument $\approx \frac{1}{z^a}$

Bsp.: $e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{\boxed{k=-\infty}}^{0} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow z=0$, Wesentlich

[EP $z=0$]

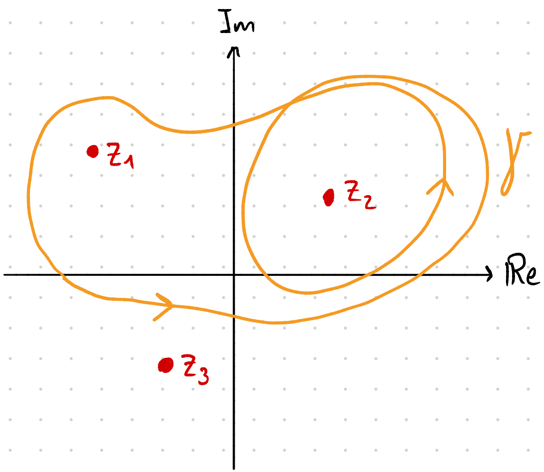
→ Polynom/trigonometrische Funktion im Nenner

Bsp.: $\frac{1}{(z-3)(z-2)^2}$ Bsp.: $\frac{1}{z\sin(z)}$

Residuensatz

$f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f holomorph

- Singularität von f

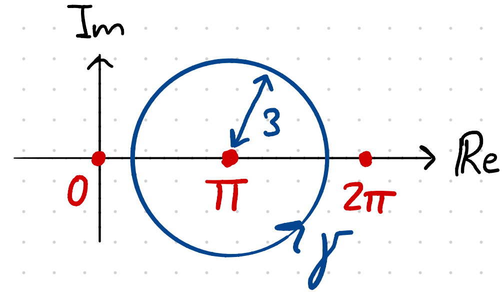


$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k) \cdot \mathrm{Res}(f \mid z_k)}$$

$\forall$ Sing $\in A(\gamma)$

C_{-1} von der LE mit EP $z = z_k$

<u>Beispiel</u>: $\displaystyle\int_{|z-\pi|=3} \frac{1}{z\sin(z)}\,dz$



→ Pol 2. Ordnung bei $z=0$

→ Pol 1. Ordnung bei $z=\pi k \neq 0,\ k\in\mathbb{Z}$

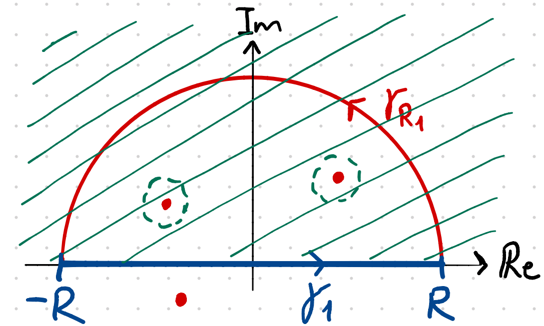
$$\int_{|z-\pi|=3} \frac{1}{z\sin(z)}\,dz =$$

Uneigentliche Integrale

→ Falls eine Funktion schneller als x^{-2} abfällt

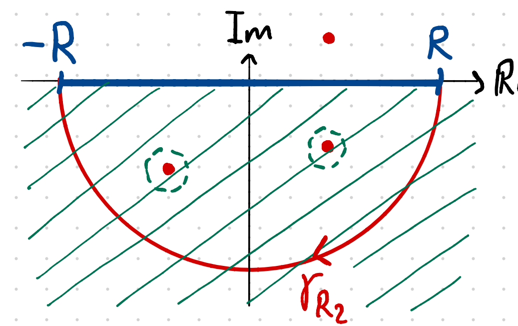
$$2\pi i \sum_{Im>0} \mathrm{Res}(f|z_k) = \lim_{R\to\infty} \cancel{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}^{\,0} + \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im>0} \mathrm{Res}(f|z_k)}$$



$$-2\pi i \sum_{Im<0} \mathrm{Res}(f|z_k) = \lim_{R\to\infty} \cancel{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}^{\,0} + \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{Im<0} \mathrm{Res}(f|z_k)}$$

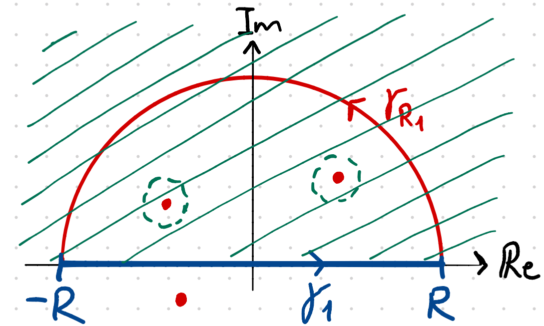


Uneigentliche Integrale

→ Falls eine Funktion schneller als x^{-2} abfällt

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

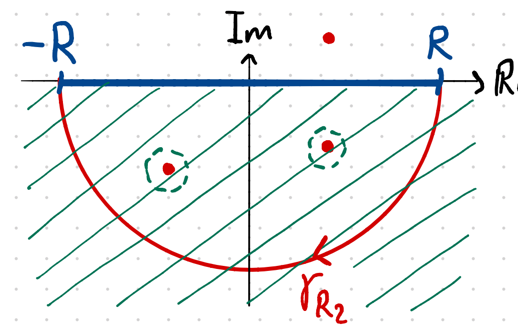
⇒ obere oder untere Halbebene



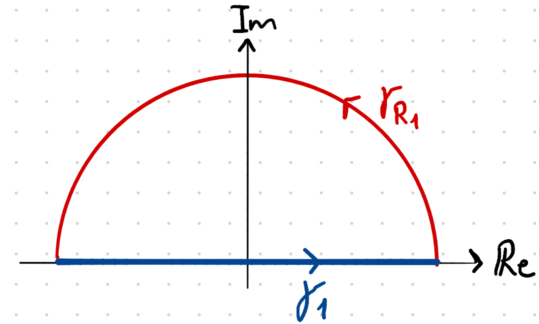
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

⇒ nicht sicher → Abschätzen

Bsp.: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-it}\, dt$ [Q&A Session]



Beispiel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

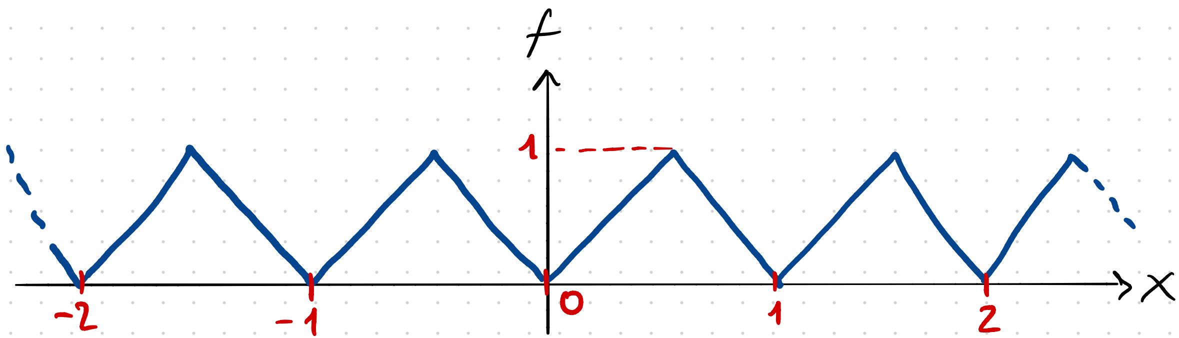


Fourier-Reihen

Fourierreihen

→ f Periodisch $\Rightarrow \exists T > 0$ s.d. $f(x + \boxed{k} T) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$

kleinste T = Fundamentalperiode



→ Darstellung von periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen

exp(i·), cos, sin

komplex

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi i n x}{T}}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}}$$

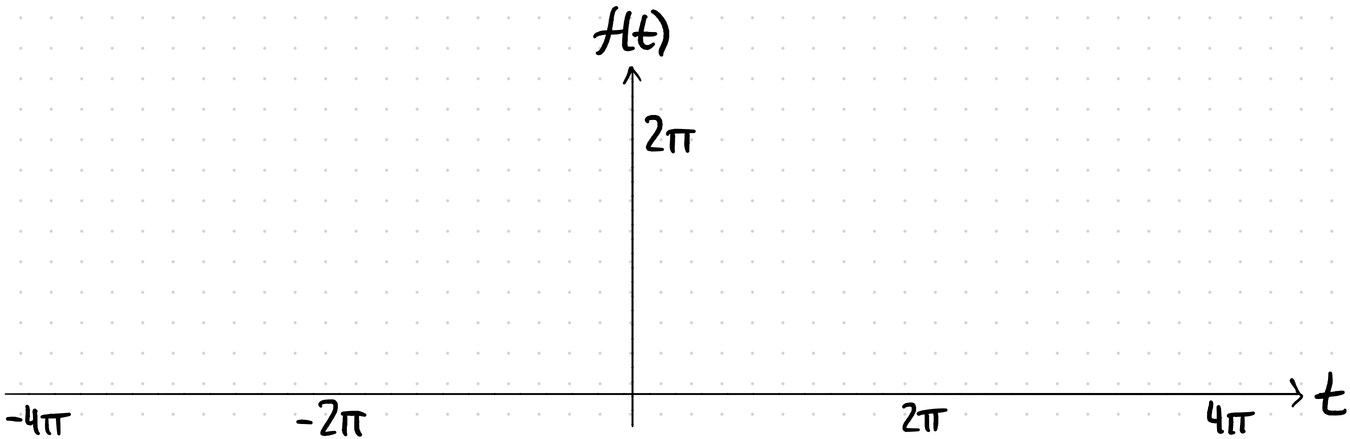
reell

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \quad (n \geq 1)$$

<u>Beispiel</u>: Berechne die Fourierreihe von $\tilde{f}(t) := t, \; t \in [0, 2\pi]$



a) Finde die komplexe Reihe (c_n)

b) Finde die reelle Reihe (a_n & b_n)

Beispiel: a) Finde die komplexe Reihe (c_n)

Beispiel: b) Finde die reelle Reihe (a_n & b_n)

$$c_k = \begin{cases} \frac{i}{k}, & k \neq 0 \\ \pi, & k = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow a_n = c_n + c_{-n}$

$\rightarrow b_n = i(c_n - c_{-n})$

Satz von Parseval

komplex

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

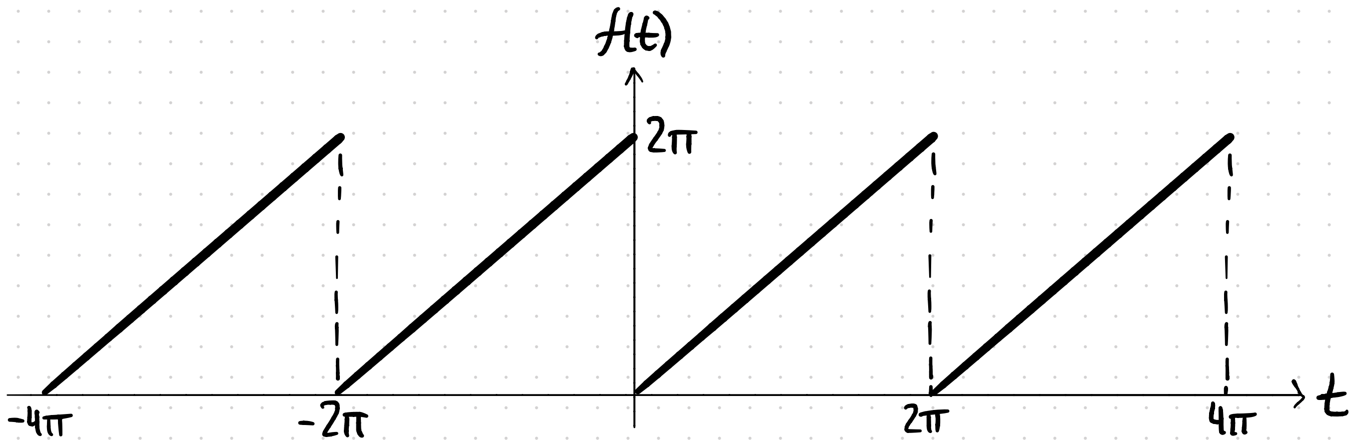
reell

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)}$$

[komplex] [reell]

Beispiel: Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ mit Hilfe der Fourierreihe von $\tilde{f}(t) := t,\ t \in [0, 2\pi]$ und Satz von Parseval



Satz von Parseval: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

1

2

$$c_k = \begin{cases} \pi, & k=0 \\ \frac{i}{k}, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a_k = \begin{cases} 2\pi, & k=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{2}{k} \quad (k \neq 0)$$

① $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt =$$

② $$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2$$

$$\textcircled{1}\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \quad = \quad \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{4}{3}\pi^2 \qquad\qquad \pi^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Prüfung

a) Finde die Fourier-Reihe von $\tilde{f}(t)$

↳ in die Definition einsetzen (c_n, a_n, b_n)

↳ Integrale mit $e^{it \cdot}$, $\cos(\cdot)$, $\sin(\cdot)$ (Residuensatz)

b) Berechne die relle/komplexe Reihe

↳ $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ $\quad c_n \rightleftarrows a_n, b_n$

c) Berechne $\sum_{k}^{\infty} \cdots (k) \approx \sum c_k^2$ oder $\sum a_k^2 + b_k^2$

↳ Parseval

Fourier Transformation

Fouriertransformation

$$\boxed{\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

→ Inverse FT: $$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\{ \underbrace{\mathcal{F}\{f\}(\omega)}_{\text{FT}} \}(t)}_{\text{Inv FT}} = f(t)$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$!

Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

→ Eigenschaften

1. $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)$

2. $f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$

3. $\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$

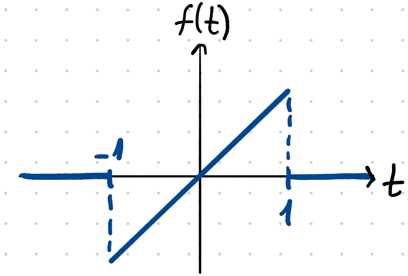
4. $f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

5. $f(t)\, g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2\pi}\, (f * g)(\omega)$

Faltung

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau) \, d\tau$$

Beispiel: Finde die FT von $f(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



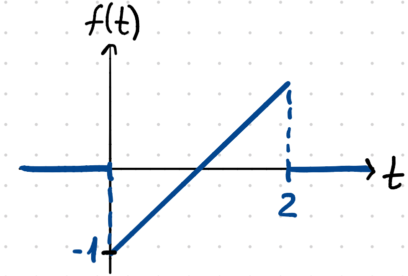
Satz von Plancherel

→ $\hat{f}(\omega)$ ist die FT von $f(t)$ ⇝ $\hat{f}(\omega) = F\{f\}(\omega)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega}$$

Beispiel: Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\cos(x)-\sin(x))^2}{x^4}\,dx$

Beispiel: Finde die FT von $f(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$



$$\left[f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega) \right]$$

Prüfung

a) Finde die FT von f

↳ in die Definition einsetzen

↳ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$ mit $f(t) \leq t^{-2}$ (Residuensatz)

↳ Partielle Integration

b) Berechne $\int_a^b$ von etwas $\approx \hat{f}(\omega)^2$

↳ Plancherel

→ Faltung: $\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$ ⇝ $\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) \, d\tau}$

Laplace Transformation

Laplacetransformation

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

→ **Existenz**

1. f ist von exponentieller Ordnung

$\exists\, c, s_0 > 0$ s.d. $|f(t)| \leq Ce^{s_0 t}, t > 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ existiert für $Re\{s\} > s_0$

2. Integrierbarkeit

$\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty,\ T > 0$ $\Rightarrow$ f stetig zwischen 0 und ∞

Warum $\mathrm{Re}\{s\} > s_0$?

→ Nehmen wir mal an, dass $f(t) = e^{s_0 t}$

Beispiel:

$\rightarrow f(t) = e^{-2t}$

$\rightarrow f(t) = e^{t^2}$

$\rightarrow f(t) = \frac{1}{t-3}$

$\rightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Laplacetransformation

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

→ Eigenschaften

1. $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$

2. $f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-as} F(s)$

3. $\frac{d}{dt} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0)$

4. $t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

5. $f(t)\, g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (f * g)(s)$

Faltung

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$$

Beispiel: Löse $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = e^t$, $\dot{y}(0) = y(0) = 0$

$\hookrightarrow \frac{d}{dt} f(t)$

$$\left[\begin{array}{lcl} \frac{d}{dt} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0) \\ t^n e^{-at} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{lcl} \frac{d}{dt} f(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0) \\ t^n e^{-at} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \end{array}\right]$$

Prüfung

a) Existiert $\mathcal{L}\{f\}$?

↳ Bedingung für Existenz

→ Faltung: $f(t)\cdot g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (f*g)(s)$

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau}$$

b) Finde $\mathcal{L}\{f\}$

↳ In die Definition einsetzen

c) Differentialgleichung

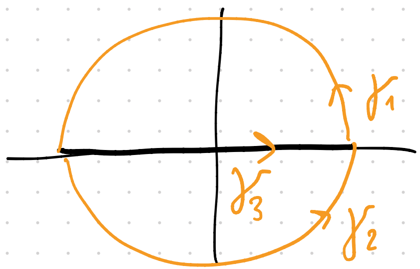
↳ $\frac{d}{dt}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s)-f(0)$

↳ $t^n e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

1. DGL $\ddot{y}(t)+\dots=\dots$
2. $\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)+\dots\}=\mathcal{L}\{\dots\}$
3. $Y(s)=\dots$ PBZ
4. $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\dots\}$

Ende?

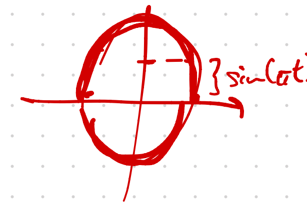
Beispiel: Finde $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} e^{-it} \, dt$



$Re^{\pi i t}$ $[0,1]$

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{(\underbrace{Re^{\pi i t}}_{1})^2}\right| \underbrace{\left|e^{-iRe^{\pi i t}}\right|}_{|\cdot| \neq 1} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{|R^2 \underbrace{e^{\pi i t 2}}_{1}|} e^{-iR(\cos(\pi t)+i\sin(\pi t))} dt$$



$$= \frac{1}{R^2} \int_0^1 \underbrace{\left|e^{-iR\cos(\pi t)}\right|}_{1} e^{R\sin(\pi t)} dt$$

$t \in [0,1] \rightarrow \sin(\pi t) > 0$

$t \in [1,2] \Rightarrow \sin(\pi t) < 0$

$$= \frac{1}{R^2} \int_0^1 e^{R\sin(\pi t)} dt$$

$\sin(\pi t) > 0$

$\Rightarrow R\sin(t) \rightarrow \infty$

$\lim_{R\to\infty}$

$\sin(\pi t) < 0$

Untere Half