Musterlösung

Aufgabe 1

Berechne das Integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta$

→ Variablenwechsel

- Variable: $z = e^{i\theta}$
- Grenzen: $z = e^{i\theta}$ für $\theta = [0, 2\pi] \Rightarrow$ 1x um den Einheitskreis
- Integrationslänge: $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Rightarrow d\theta = \frac{1}{iz}dz$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2}}{5-4\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}\,d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}}{5-4\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\,\frac{1}{iz}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{z^6+1}{2z^3}}{\frac{5z-2z^2-2}{z}}\,\frac{1}{iz}\,dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{2iz^3(5z-2z^2-2)}\,dz = -\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3\cdot 2(z-\frac{1}{2})(z-2)}\,dz = -\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^6+1}{z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)}\,dz$$

$\in |z|<1$ $\qquad \notin |z|<1$

→ Singularitäten:

- $z=0$, $z=\frac{1}{2}$, $z=2$

  Ordn. 3 $\quad$ Ordn. 1 $\quad$ Ordn 2

- Im Integrationsweg $|z|=1 \Rightarrow$ Nur Singularität $z=0$ & $z=\frac{1}{2}$

i. $\displaystyle \text{Res}(f\,|\,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^6+1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}\right] = \dots = \frac{21}{4}$

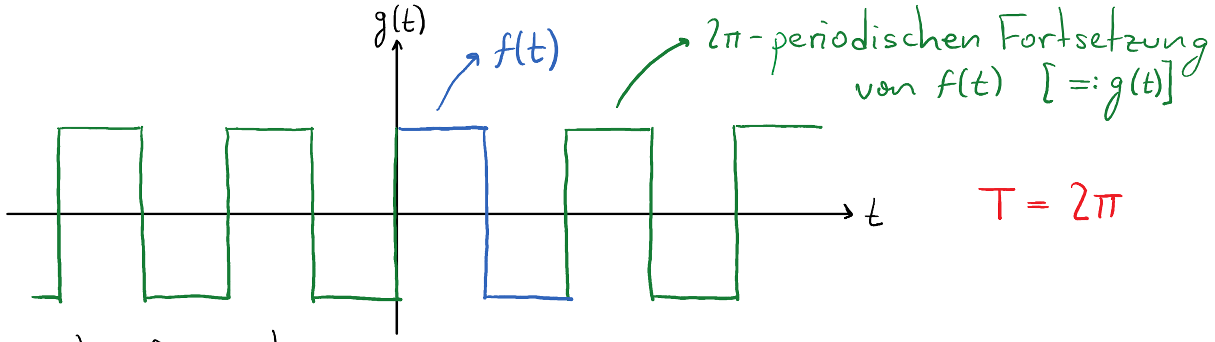
ii. $\displaystyle \text{Res}(f\,|\,\tfrac{1}{2}) = \lim_{z\to \frac{1}{2}}\frac{z^6+1}{z^3(z-2)} = \dots = -\frac{65}{12}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta = -\frac{1}{{}_{2}\cancel{4i}}\,\cancel{2}\pi\cancel{i}\left[\underset{\uparrow\,i.}{\frac{21}{4}} - \underset{\uparrow\,ii.}{\frac{65}{12}}\right] = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{63}{12}-\frac{65}{12}\right] = -\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{6}\right] = \frac{\pi}{12}$$

Aufgabe 2

Berechne die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \\ -1, & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$



$T = 2\pi$

→ Fourierkoeffizienten c_k

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-\frac{2\pi}{T}ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-ikt}\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\, e^{-ikt}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-ik} e^{-ikt}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{ik} e^{-ikt}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ik\pi}}{-ik} - \frac{1}{-ik} + \frac{e^{-2\pi ik}}{ik} - \frac{e^{-ik\pi}}{ik}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{ik} + \frac{1}{ik} + \frac{1}{ik} - \frac{(-1)^k}{ik}\right] = \frac{1-(-1)^k}{\pi i k}$$

$$\boxed{g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{-\frac{2\pi}{T}ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\pi i k}\, e^{-ikt}}$$

→ Fourierkoeffizienten a_k, b_k

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1-(-1)^k}{\pi i k} + \frac{1-(-1)^{-k}}{-\pi i k} = \cancel{\frac{1-(-1)^k}{\pi i k}} - \cancel{\frac{1-(-1)^k}{\pi i k}} = 0$$

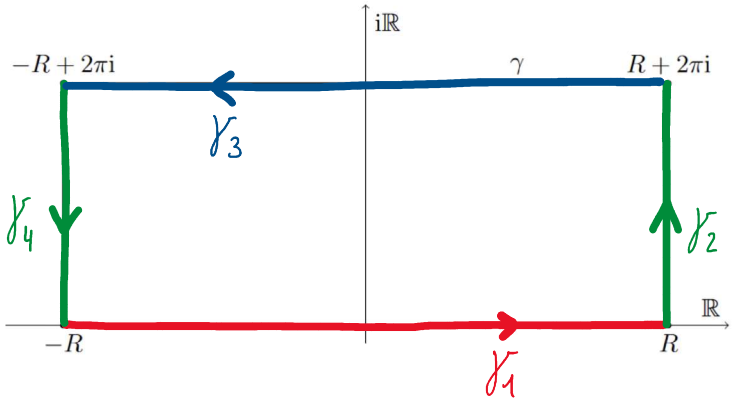
Macht Sinn, $g(t)$ ist ungerade

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \cancel{i}\left(\frac{1-(-1)^k}{\pi \cancel{i} k} - \frac{1-(-1)^{-k}}{-\pi \cancel{i} k}\right) = \frac{1-(-1)^k}{\pi k} + \frac{1-(-1)^k}{\pi k} = \frac{2-2(-1)^k}{\pi k}$$

$$\boxed{g(t) = \cancelto{0}{\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \cancelto{0}{a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)} + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^k}{\pi k} \cos(kt)}$$

Aufgabe 3

Sei $0 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$ indem Sie über den Weg γ integrieren



i. $\gamma_3(t) = t + 2\pi i, \quad t \in [R,-R]$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{at+2\pi i a}}{1+e^{t+2\pi i}}\,dt = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1+e^t}\, e^{2\pi i a}\,dt$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} -e^{2\pi i a}\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = -e^{2\pi i a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$$

ii. $\gamma_2(t) = R + 2\pi i t, \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{e^{aR+a2\pi i t}}{1+e^{R+2\pi i t}} \cdot 2\pi i\,dt = \int_0^1 \frac{e^{aR}\cdot e^{2\pi i a t}}{1+e^{R}\cdot e^{2\pi i t}} \cdot 2\pi i\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int_0^1 \left|\frac{e^{aR}\cdot e^{2\pi i a t}}{1+e^{R}\cdot e^{2\pi i t}}\right| \cdot 2\pi i\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{aR}}{1+e^{R}e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt$$

Since $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{e^{aR}}{1+e^R} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

iii. $\gamma_4(t) = -R + 2\pi i t, \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -\int_0^1 \frac{e^{-aR+a2\pi i t}}{1+e^{-R+2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt = -\int_0^1 \frac{e^{-aR}\cdot e^{2\pi i a t}}{1+e^{-R}\cdot e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{e^{R(1-a)}\,e^{2\pi i a t}}{e^R + e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt \qquad 0 < a < 1 \Rightarrow 0 < 1-a < 1$$

$\Rightarrow$ Genau wie $\gamma_2 \rightsquigarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz \to 0$

Singularitäten von $\frac{e^{az}}{1+e^z} \rightarrow 1+e^z = 0 \implies e^z = -1$

$\implies z = i(\pi + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$

$z = \pi i, 3\pi i, \ldots$
$-\pi i, -3\pi i, \ldots$

Nur $z = \pi i$ ist in der von γ eingeschlossene Fläche

$$\operatorname{Res}(f|\pi i) \implies \frac{e^{az} \rightarrow h(z)}{1+e^z \rightarrow g(z)} \qquad \operatorname{Res}(f|\pi i) = \frac{h(z)}{g'(z)} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$$

$$\implies 2\pi i \cdot e^{\pi i(a-1)} = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}}_{\to 0} + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \underbrace{\cancel{\int_{\gamma_4} f(z)\,dz}}_{\to 0} \right)$$

$$-2\pi i\, e^{a\pi i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - e^{2\pi i a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi i a}}$$

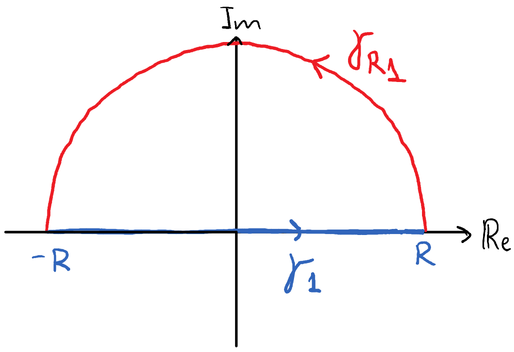
Aufgabe 4

Berechne die Fouriertransformation von $f(t) = \frac{t}{(t^2+1)^2}$ [Tipp: Residuensatz]

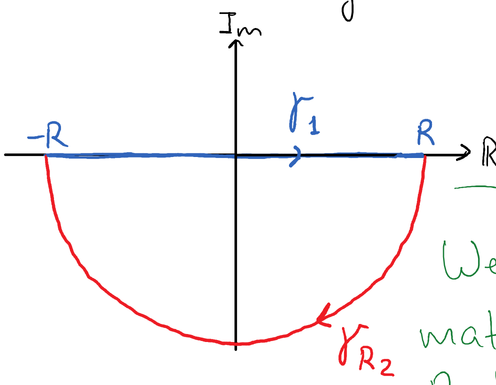
$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2} e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \, dt, \quad g(t) := \frac{t e^{-i\omega t}}{(t^2+1)^2}$$

da $|g(t)| = \left| \frac{t e^{-i\omega t}}{(t^2+1)^2} \right| = \left| \frac{t}{(t^2+1)^2} \right| \leq \mathcal{O}(t^{-2}) \Rightarrow$ Theorie: Uneigentliche Integrale

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \Rightarrow$ wir müssen sehen welche Halbebene die Richtige Lösung liefert



oder



Weg geht in math. negative Richtung

$\gamma_{R_1}(t) = Re^{it}, \; t \in [0, \pi]$

$$\int_{\gamma_{R_1}} g(z) \, dz = \int_0^{\pi} \frac{Re^{it} e^{-i\omega Re^{it}}}{((Re^{it})^2 + 1)^2} iRe^{it} \, dt = \int_0^{\pi} \frac{Re^{it} e^{-i\omega R\cos(t)} \cdot e^{\omega R \sin(t)}}{(R^2 e^{2it} + 1)^2} \, dt$$

$$\int_{\gamma_{R_1}} |g(z)| \, dz \leq \int_0^{\pi} \frac{R e^{R\omega \sin(t)}}{(R^2 e^{2it} + 1)^2} \, dt$$

da die Exponentialfunktion hier schneller als Polynome mit R wächst (da $\sin(t) > 0$ für $t \in [0, \pi]$ ist) wird $\frac{R e^{R\omega \sin(t)}}{(R^2 e^{2it}+1)^2}$ für $R \to \infty$ divergieren

für die untere Halbebene

Aber für $t \in [\pi, 2\pi]$ ist $\sin(t) < 0$ und $\frac{R e^{R\omega \sin(t)}}{(R^2 e^{2it}+1)^2} \to 0$ falls $R \to \infty$

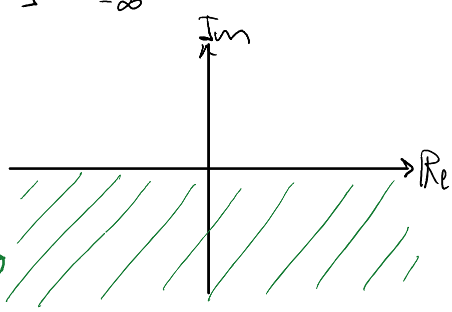
$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_{R_2}} g(z) \, dz = 0$$

math. neg. Richtung

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im} < 0}} \mathrm{Res}(f|z_k) = \lim_{R \to \infty} \Big[\underbrace{-\int_{\gamma_{R_2}} g(z) \, dz}_{\to 0} - \int_{-R}^{R} g(z) \, dz \Big] = -\int_{-\infty}^{\infty} g(z) \, dz$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \, dz = -2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im} < 0}} \mathrm{Res}(f|z_k)$$

↳ untere Halbebene



- Singularitäten: $t^2+1=0 \Rightarrow t=\pm i$

$$g(t)=\frac{te^{-i\omega t}}{(t^2+1)^2}=\frac{te^{-i\omega t}}{(t+i)^2(t-i)^2}$$

Grad 2

Nur $z_1=-i$ liegt bei $\mathrm{Im}<0$

- Residuum:

$$\mathrm{Res}(g|-i)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z+i)^2}\frac{ze^{-i\omega z}}{(z-i)^2\cancel{(z+i)^2}}\right]=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{-i\omega z}}{(z-i)^2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{(ze^{-i\omega z})'(z-i)^2-ze^{-i\omega z}\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4}=\lim_{z\to -i}\frac{(e^{-i\omega z}+z(-i\omega)e^{-i\omega z})(z-i)^2-2ze^{-i\omega z}(z-i)}{(z-i)^4}$$

$$=\frac{(e^{-\omega}-\omega e^{-\omega})\cdot(-4)+2ie^{-\omega}(-2i)}{16}=\frac{\cancel{-4e^{-\omega}}+4\omega e^{-\omega}+\cancel{4e^{-\omega}}}{16}=\frac{1}{4}\omega e^{-\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{f\}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{(t^2+1)^2}e^{-i\omega t}dt=-2\pi i\left(\frac{1}{4}\omega e^{-\omega}\right)=-\frac{1}{2}\pi i\omega e^{-\omega}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \begin{cases} 1/6, & 0 \leq x \leq 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3ix$

Berechne $h(4)$, wobei $h(x) = (f * g)(x)$ $\qquad \left[(a*b)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)\, b(x-\tau)\, d\tau \right]$

$$\Rightarrow h(4) = (f * g)(4) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(4-\tau)\, d\tau$$

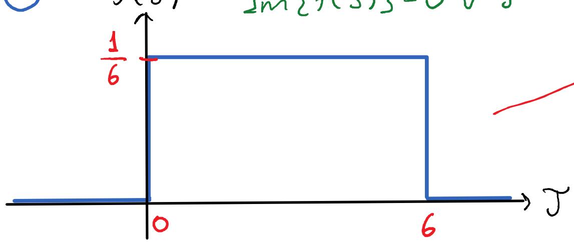
$$\overset{①}{=} \int_0^6 \frac{1}{6} g(4-\tau)\, d\tau \overset{②}{=} \int_0^6 \frac{1}{6} \cdot \left[(4-\tau)^2 - 3i(4-\tau) \right] d\tau$$

$$\overset{③}{=} \frac{1}{6} \left[-\frac{(4-\tau)^3}{3} + \frac{3i\,(4-\tau)^2}{2} \right]_0^6$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{8}{3} + 6i \right) - \left(-\frac{64}{3} + 24i \right) \right]$$

$$= \frac{8+64}{6 \cdot 3} + \frac{6-24}{6} i = \boxed{4 - 3i}$$

① $\quad f(\tau) \quad \operatorname{Im}\{f(\tau)\} = 0 \ \forall \tau$



$g(4-\tau)$

Wenn wir $f(\tau)$ mit irgend etwas multiplizieren, haben wir nur im Interval $[0, 6]$ etwas unterschiedlich Null

(Da $f(\tau) = 0 \ \forall\, \tau \notin [0, 6]$)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(4-\tau)\, d\tau = \int_0^6 \frac{1}{6} g(4-\tau)\, d\tau$$

② Definition von $g(4-\tau)$ einsetzen:

$g(\tau) = \tau^2 - 3i\tau$

$g(4-\tau) = (4-\tau)^2 - 3i(4-\tau) \Rightarrow \int_0^6 \frac{1}{6} g(4-\tau)\, d\tau = \int_0^6 \frac{1}{6} \left[(4-\tau)^2 - 3i(4-\tau) \right] d\tau$

③ Polynome integrieren

$$\int (4-\tau)^2\, d\tau = -\frac{1}{3}(4-\tau)^3 + c$$

$$\int -3i(4-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \cdot 3i\,(4-\tau)^2 + c$$

Aufgabe 6

Berechne C_{49} der 1-periodischen Funktion $f(t) = \frac{1}{4 - e^{2\pi i t}}$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4-e^{2\pi i t}}\, e^{-\frac{2\pi}{T} i k t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{4-e^{2\pi i t}}\, e^{-2\pi i k t}\, dt$$

→ Integral hat nur exp(...) und die Periode entspricht gerade die Grenzen [0,1]

⇒ Variablenwechsel $z = e^{2\pi i t}$

- Variable: $z = e^{2\pi i t}$
- Grenzen: $z = e^{2\pi i t}$ für $t \in [0,1]$ ⇒ 1x um den Einheitskreis
- Integrationslänge: $\frac{dz}{dt} = 2\pi i\, e^{2\pi i t} = 2\pi i z \Rightarrow dt = \frac{1}{2\pi i z} dz$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{4-e^{2\pi i t}}\, e^{-2\pi i k t}\, dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{4-z}\, z^{-k}\, \frac{1}{2\pi i z}\, dz = \frac{i}{2\pi}\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-4)\, z^{k+1}}\, dz$$

$$e^{-2\pi i k t} = \left(e^{-2\pi i t}\right)^{-k} = z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

↳ Residuensatz!

→ Singularitäten: [γ = Einheitskreis, $|z|=1$ ⇝ $A(\gamma)$ = der von γ eingeschlossene Fläche]

- Bei $z = 4$, Ordnung 1, ausserhalb $A(\gamma)$
- Bei $z = 0$, Ordnung $k+1$, innerhalb $A(\gamma)$

→ Residuum: nur für $z = 0$

$$\operatorname{Res}(f|z=0) = \frac{1}{k!}\lim_{z\to 0}\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{k+1}\frac{1}{(z-4)\, z^{k+1}}\right] = \frac{1}{k!}\lim_{z\to 0}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{1}{z-4}\right]$$

$$\Rightarrow C_k = \frac{i}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-4)\, z^{k+1}}\, dz = \frac{i}{\cancel{2\pi}}\cdot \cancel{2\pi} i \operatorname{Res}(f|0) = -\frac{1}{k!}\lim_{z\to 0}\frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{1}{z-4}\right]$$

$$\Rightarrow C_{49} = -\frac{1}{49!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{49}}{dz^{49}}\Big[\underbrace{\frac{1}{z-4}}_{g(z) := \frac{1}{z-4}}\Big]$$

$$\left.\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{z-4} = (z-4)^{-1}\\
g'(z) &= -1\,(z-4)^{-2}\\
g^{(2)}(z) &= 2\cdot 1\,(z-4)^{-3} = 2\,(z-4)^{-3}\\
g^{(3)}(z) &= -3\cdot 2\cdot 1\,(z-4)^{-4} = -6\,(z-4)^{-4}\\
g^{(4)}(z) &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(z-4)^{-5} = 24\,(z-4)^{-5}
\end{aligned}\right\}\quad g^{(k)}(z) = (-1)^k\, k!\,(z-4)^{-(k+1)}$$

$$\Rightarrow C_{49} = -\frac{1}{49!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{49}}{dz^{49}}\left[\frac{1}{z-4}\right] = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{49!}}\underbrace{(-1)^{49}}_{\cancel{-}1}\cancel{49!}\,\underbrace{(-4)^{-(49+1)}}_{(-1)^{-50} = +1} = \boxed{\frac{1}{4^{50}}}$$

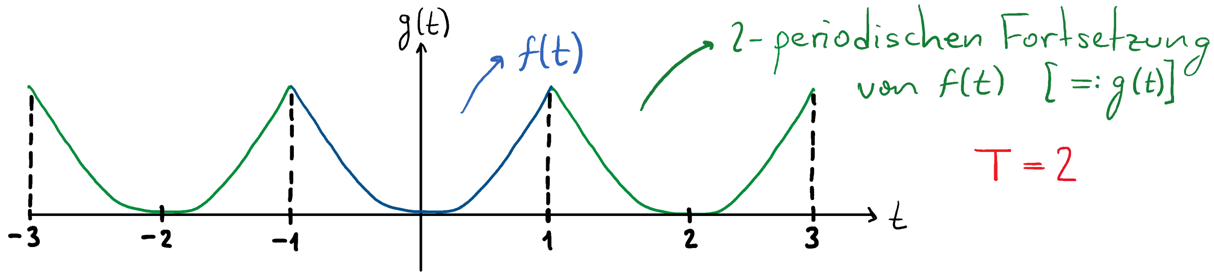
Aufgabe 7

Gegeben sei für $x \in [-1,1]$ die Funktion $f(x) = x^4$

a) Für die 2-periodischen Fortsetzung von f bestimme die Fourierreihe in Sinus-Cosinus-Form

b) Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ mit Hilfe des Resultats aus **a)** $\left[\text{Hinweis: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\right]$

a)



$\rightarrow f(x)$ ist gerade $\Rightarrow b_k = 0 \quad \forall k$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = 2\int_0^1 t^4\cos(\pi k t)\,dt$$

$$\rightarrow \int_0^1 t^4 \cos(\pi k t)\,dt = \cancel{t^4 \cdot \frac{1}{\pi k}\sin(\pi k t)\Big|_0^1} - \frac{4}{\pi k}\int_0^1 t^3 \sin(\pi k t)\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2 k^2} t^3 \cos(\pi k t)\Big|_0^1 - \frac{12}{\pi^2 k^2}\int_0^1 t^2 \cos(\pi k t)\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2 k^2}(-1)^k - \frac{12}{\pi^2 k^2}\left(\cancel{\frac{1}{\pi k} t^2 \sin(\pi k t)\Big|_0^1} - \frac{2}{\pi k}\int_0^1 t\sin(\pi k t)\,dt\right)$$

$$= \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} + \frac{24}{\pi^3 k^3}\left(-\frac{1}{\pi k} t\cos(\pi k t)\Big|_0^1 + \cancel{\frac{1}{\pi k}\int_0^1 \cos(\pi k t)\,dt}\right)$$

$$= \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2} - \frac{24(-1)^k}{\pi^4 k^4} \Rightarrow a_k = 8(-1)^k\left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^4 k^4}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^4\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} t^4\,dt = 2\int_0^1 t^4\,dt = 2\,\frac{1}{5}t^5\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

$\rightarrow$ Fourierreihe von f

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} 8(-1)^k\left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^4 k^4}\right)\cos(\pi k t)$$

b) $f(t) = \frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} 4(-1)^k \left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^4 k^4}\right) \cos(\pi k t)$

→ Parseval bringt uns hier nicht viel, da wir sonst auch etwas mit k^{-8} haben würden. Aber eine geschickte Auswertung von f liefert uns die Antwort

$$f(1) = \frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} 8 \cancel{(-1)^k} \left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^4 k^4}\right) \overbrace{\cos(\pi k)}^{\cancel{(-1)^k}}$$

$$1 = \frac{1}{5} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{6}{\pi^4 k^4}\right) = \frac{1}{5} + \frac{8}{\pi^2}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)$$

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{8}{\cancel{\pi^2}} \cdot \frac{\cancel{\pi^2}}{6} - \frac{48}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = -\frac{\pi^4}{48}\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) = \cancel{-}\frac{\pi^4}{48} \cdot \frac{\cancel{-}8}{15} = \pi^4 \cdot \frac{2^3}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}}$$

Wir kennen f (Periodisierung von t^4 zwischen $t \in [-1,1]$) $\Rightarrow f(1) = 1^4 = 1$

Aufgabe 8

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Welche der folgenden Funktionen ist im Allgemein *nicht* holomorph?

i. $g(z) = f(z)^3$ **ii.** $g(z) = f(z^4)$ **iii.** $g(z) = f(\bar{z})$ **iv.** $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

Generell:

→ Zusammensetzung holomorpher Funktionen ist holomorph (*)

Bsp.:
- $f(z)^n$, $n \in \mathbb{Z}$
- $f_1(f_2(z))$, f_1, f_2 holomorph
  ↳ $e^{f(z)}$, $f(e^z)$, auch mit sin, cos etc

- Das wäre der Fall für i und ii

→ Funktionen mit $\bar{z}$, $Re\{z\}$, $Im\{z\}$, $|z|$, $\arg(z)$ sind nicht holomorph

- $f(\bar{z})$ → Beispiel: $\underset{\text{holomorph}}{f(z) = z} \Rightarrow f(\bar{z}) = \underset{\text{nicht holomorph}}{\bar{z}}$

⇒ $f(\bar{z})$ ist generell nicht holomorph

→ Für $\overline{f(\bar{z})}$:

f holomorph $\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$

$$\Rightarrow \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (\bar{z}-z_0)^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k}\, \overline{(\bar{z}-z_0)}^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} (z-\bar{z}_0)^k \Rightarrow \text{holomorph}$$

- $c_k, \overline{c_k}$ ⇒ nur eine Konstante
- $z_0, \bar{z}_0$ ⇒ nur eine Konstante (Entwicklungspunkt)
- z ⇒ holomorph (*)

Aufgabe 9

Sei $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$. Bestimme $\int\limits_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^3}{(z-1)^2}\right) = \frac{3z^2(z-1)^{\cancel{2}\to 1} - 2\cancel{(z-1)}z^3}{(z-1)^{\cancel{4}\to 3}} = \frac{3z^2(z-1) - 2z^3}{(z-1)^3} = \frac{3z^3 - 3z^2 - 2z^3}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{z^2(z-3)}{(z-1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{z^2(z-3)}{(z-1)^3}}{\frac{z^3}{(z-1)^2}} = \frac{z-3}{z(z-1)}$$

→ Wir suchen $\int\limits_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)}\,dz$

- Singularitäten: $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ → Beide sind in $A(\gamma)$
- Residuum: $\downarrow$ $\downarrow$ Ordnung 1

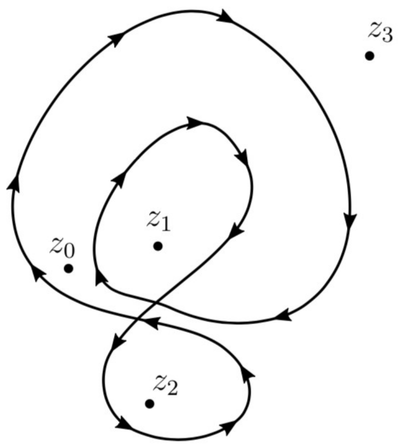
$$\text{Res}(f|0) = \lim_{z\to 0} \cancel{z}\,\frac{z-3}{\cancel{z}(z-1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\text{Res}(f|1) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\,\frac{z-3}{z\cancel{(z-1)}} = \frac{-2}{1} = -2$$

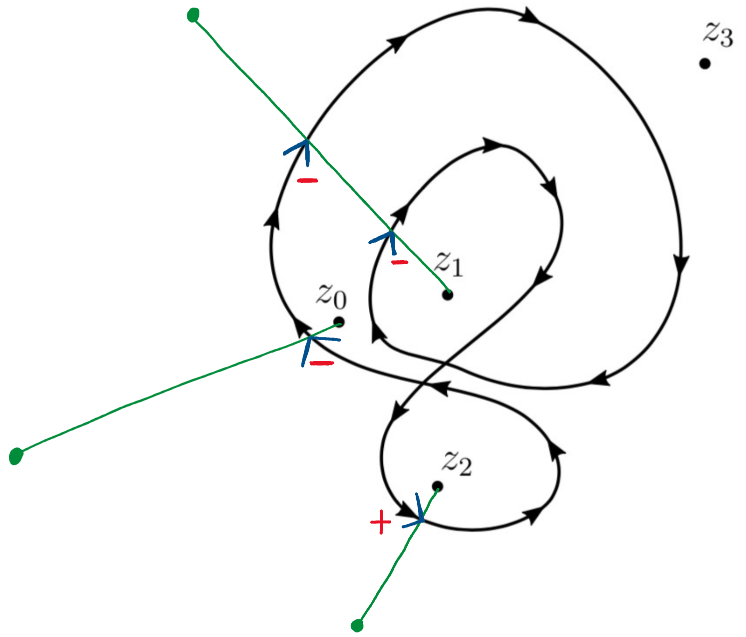
$$\Rightarrow \int\limits_{|z|=2} \frac{z-3}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f|z_k) = 2\pi i\,(3-2) = 2\pi i$$

Aufgabe 10

Bestimme die Windungszahl der Kurve γ um die Punkte z_0, z_1, z_2, z_3



• Wir bilden eine Gerade von ausserhalb γ bis zur Singularität und zählen wie viele male γ unsere Gerade im positiven bzw negativen Sinn schneidet



$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 1 \times - = \underline{-1}$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = 2 \times - = \underline{-2}$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = 1 \times + = \underline{0}$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_3) = \underline{0}$

Aufgabe 11

In welchen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f(x+yi) = \frac{x^2-y^2}{x-yi}$ holomorph?

$\rightarrow f$ holomorph $\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$

- $\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x-yi}\right) = \frac{2x(x-yi)-(x^2-y^2)}{(x-yi)^2} = \frac{x^2+y^2-2xyi}{(x-yi)^2}$
- $\frac{\partial}{\partial y} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x-yi}\right) = \frac{-2y(x-yi)-(x^2-y^2)(-i)}{(x-yi)^2} = \frac{x^2i+y^2i-2yx}{(x-yi)^2}$

$$i\frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)$$

$$\Rightarrow i\left(\frac{x^2+y^2-2xyi}{\cancel{(x-yi)^2}}\right) = \frac{x^2i+y^2i-2yx}{\cancel{(x-yi)^2}}$$

$$\Rightarrow \cancel{ix^2}+\cancel{iy^2}+2xyi = \cancel{x^2i}+\cancel{y^2i}-2yx$$

$$\Rightarrow 2xyi+2xy = 0$$

$$2xy(i+1) = 0$$

$\Rightarrow f$ ist holomorph, falls

$x=0, \quad y\neq 0$

$y=0, \quad x\neq 0 \qquad [(x,y)\neq(0,0)]$

Aufgabe 12

Finde die Laplace Transformation $Y(s)$ der DGL

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\frac{d}{dx}y(x) + y(x) = e^{-5x}\sin(x), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\frac{d}{dx}y(x) + y(x)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-5x}\sin(x)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y(x)\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}y(x)\right\} + \mathcal{L}\left\{y(x)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-5x}\sin(x)\right\}$$

$$\underbrace{s\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dx}y(x)\right\} - \frac{d}{dx}y(x)\Big|_{x=0}}_{2} + 2\big(\underbrace{sY(s) - y(0)}_{2}\big) + Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+5)^2+1}}_{1}$$

$$s\big(\underbrace{sY(s) - y(0)}_{2}\big) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+5)^2+1}$$

$$s^2Y(s) - s - 2 + 2sY(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{(s+5)^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+3) - s - 4 = \frac{1}{(s+5)^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+3}\left(\frac{1}{(s+5)^2+1} + s + 4\right)$$

1 $e^{at}\sin(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

2 $\dfrac{d}{dx}f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0)$