Theorie

1. Einführung

1.1 Die komplexe Einheit

→ Definition:

komplexe Einheit i → $\boxed{i^2 := -1}$ ⇝ „$i = \sqrt{-1}$"

Beispiel: Nullstellen von $x^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$,

$\Rightarrow x = \pm i$

Beispiel: Nullstellen von $x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm 2i$

$\Rightarrow x = -1 \pm 2i$

1.2 Darstellung

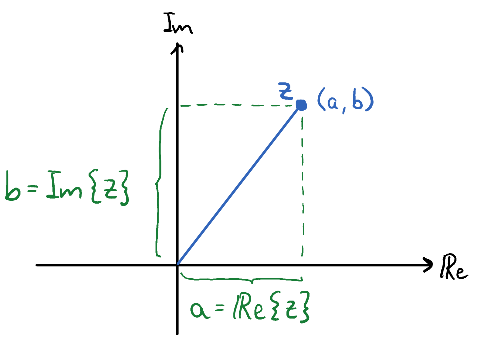
→ Alle komplexe Zahlen lassen sich mit *Realteil* und *Imaginärteil* beschreiben

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow z = a + bi \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= \mathbb{R}e\{z\} = \text{Realteil von } z \\ b &= \mathrm{Im}\{z\} = \text{Imaginärteil von } z \end{aligned}\right\} \; ! \; a, b \in \mathbb{R}$$

• Da es „biwertige" Zahlen sind („2-Dimensional") können wir komplexe Zahlen mit einem Punkt auf zwei Achsen (Real- und Imaginärteil) eindeutig graphisch darstellen ⇒ *Gauss'sche / Komplexe Zahlenebene*

Kartesische Form

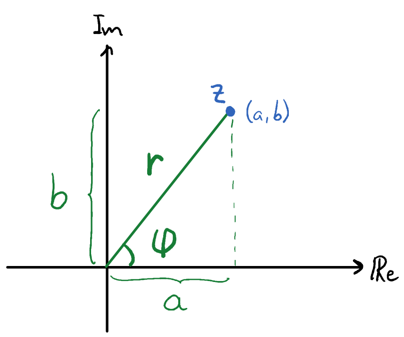
• „x,y" Koordinaten (Re, Im)



$\boxed{z = a + bi}$

Polarform I

• Betrag und Winkel ($|z|$, $\arg(z)$)



$\mathbb{R}e\{z\} = r\cos(\varphi)$, $\mathrm{Im}\{z\} = r\sin(\varphi)$

$\boxed{z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]}$

Polarform II

• Eulersche Identität

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$

• Da $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

$\Rightarrow \boxed{z = re^{i\varphi}}$

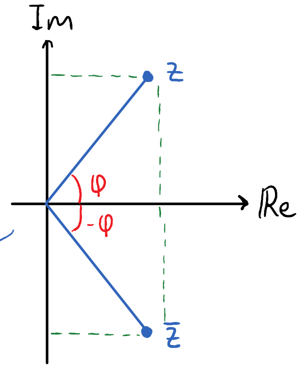
	Kart. Form	Polarform
Realteil $\mathrm{Re}\{z\}$	a	$r\cos(\varphi)$
Imaginärteil $\mathrm{Im}\{z\}$	b	$r\sin(\varphi)$
Betrag $\lvert z\rvert$	$\sqrt{a^2+b^2}$	r
Argument $\arg(z)$	$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	φ

1.3 Konjugation

→ Komplexe Konjugation ist definiert als die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = a+bi \mapsto \bar{z} = a-bi$

Kartesische Form $\quad z = a+bi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = a-bi$

Polarform $\begin{cases} z = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) & \Rightarrow \quad \bar{z} = r\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) \\ z = re^{i\varphi} & \Rightarrow \quad \bar{z} = re^{-i\varphi} \end{cases}$



$z \to \bar{z} \Rightarrow$ Spiegelung um die Realachse

- Eigenschaften

1. $z + \bar{z} = a+bi+a-bi = 2a = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$
2. $z - \bar{z} = a+bi-a+bi = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\{z\}$
3. $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = r^2 = \lvert z\rvert^2$

1.4 Moivrescher Satz

$$\boxed{\begin{gathered}[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \\ [re^{i\varphi}]^n = r^n e^{i\cdot n\cdot\varphi}\end{gathered}}$$

→ Polynome mit Grad q haben genau q Nullstellen

→ Falls ein Polynom mit reelle Koeffizienten eine komplexe Nullstelle z_0 hat, dann ist ihre konjugierte komplexe Zahl $\bar{z}_0$ auch eine Nullstelle [Beispiel 1.4.1]

→ Nullstellen von $z^n = a,\ a \in \mathbb{C}$

- Muss n Nullstellen haben
- $\lvert a\rvert = r_0,\ \arg(a) = \varphi_0$
- 2π-Periodizität: $r_0 e^{i\varphi_0 + 2\pi i k} = r_0 e^{i\varphi_0}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \quad z_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}$$

$(k = \{0, 1, \dots, n-1\})$

[Beispiel 1.4.2]

1.5 Konventionen

→ Es ist eine Konvention alle komplexe Zahlen in kartesische oder Polarform darzustellen

→ **Brüche**: Falls eine komplexe Zahl im Nenner gibt, so können wir den Bruch nicht direkt in kartesische Form darstellen

- Um das zu lösen, verwenden wir die Eigenschaft $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ [Beispiel 1.5.1]

1.6 Cos, Sin, Log

→ cos(z), sin(z)

$$\boxed{\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \qquad \boxed{\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

→ Logarithmus

- Eigenschaften

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log(a^n) = n \log(a)$
3. $e^{\ln(a)} = a \Rightarrow \ln(e^{i\varphi}) = i\varphi$
4. $z = re^{i\varphi} \Rightarrow \ln(z) = \ln(r) + i\varphi$

$$= \ln(|z|) + i \cdot \arg(z)$$

[Beispiel 1.6.1]

2. Funktionen

2.1 Komplexe Funktionen

→ Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$

→ Wir können komplexe Funktionen als eine zweidimensionale Funktion betrachten [Beispiel 2.1.1]

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= u(z) + i \cdot v(z) \\ f(x+yi) &= u(x+yi) + iv(x+yi) \\ \tilde{f}(x,y) &= \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y) \end{aligned}\right\}$$

$u(z) = \tilde{u}(x,y) = Re\{f(z)\}$ Realteil der Abbildung

$v(z) = \tilde{v}(x,y) = Im\{f(z)\}$ Imaginärteil der Abbildung

$$\underbrace{f(z) = f(x+yi)}_{\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}} = \underbrace{\tilde{f}(x,y)}_{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2}$$

2.2 Cauchy-Riemannsche Gleichungen

→ **Theorem:** Eine komplexe Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph wenn die Cauchy-Riemannschen Gleichungen erfüllt sind [Beispiel 2.2.1]

$$f(z) = f(x+yi) = u(x+yi) + iv(x+yi)$$

Methode 1

- Partielle Ableitungen von $f(x+yi)$

$$\boxed{i \frac{\partial}{\partial x} f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y} f(x+yi)}$$

[Beweis 2.2.1]

[Beispiel 2.2.1]

Methode 2

- Partielle Ableitungen von $Re\{f\}$ bzw $Im\{f\}$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x+yi) &= \frac{\partial}{\partial y} v(x+yi) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x+yi) &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x+yi) \end{aligned}}$$

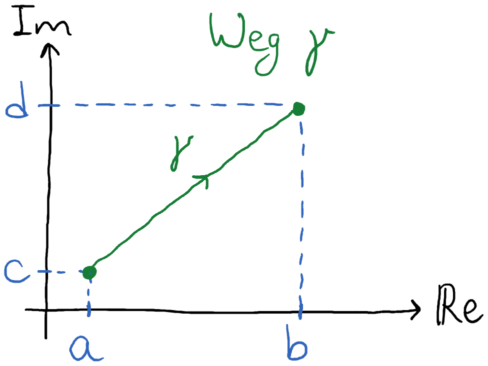
[Beweis 2.2.2]

⚠ holomorph = komplex differenzierbar = analytisch

3. Integrale

3.1 Kurvenintegrale

→ Wir wollen das Integral einer bestimmten Abbildung $f(z)$ auf einem bestimmten Weg integrieren



→ Das heisst, wir lassen alle Punkte auf dem Weg γ durch die Abbildung und summieren es am Ende

$$\underbrace{\text{„}\forall z \in \gamma \longrightarrow f(z) = \cdots \longrightarrow \sum\text{"}}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

→ Um nur die komplexe Zahlen auf γ zu integrieren, verwenden wir die sogenannte *Parametrisierung* von γ

→ Eine Parametrisierung ist eine Funktion $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die für eine laufende Variable t im Intervall $[a,b]$, alle gewühschten komplexen Zahlen z auf dem Weg γ gibt [Beispiel 3.1.1]

→ So gilt dann

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

[Beispiel 3.1.2]

→ Eigenschaften

1. Linearität: $\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$

2. $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{-\gamma} f(z)\,dz$ → $-\gamma$ = die in ungekehrte Richtung durchlaufende Kurve

3. Ist γ eine Kette von Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ so gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_k^N \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$

4. Durchläuft γ den Weg $\tilde{\gamma}$ k mal, so gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = k \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$

3.2 Cauchy-Integralsatz

→ Sei $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, eine in ganz U stetige Funktion. Dann gilt

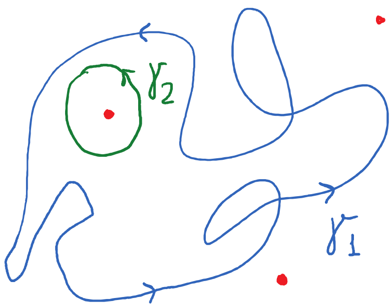
1. $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für *alle geschlossene* Kurven $\gamma \in U$ [Beweis 3.2.1]
   (unabhängig vom Weg) [Beispiel 3.2.1]
2. $f(z)$ besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$

→ Interpretation: Sei $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph*, γ *geschlossen*, U *einfach zusammenhängend*

- Falls es innerhalb der von γ eingeschlossen Fläche ***keine*** Singularität gibt, so ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- Falls es jetzt eine Singularität innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt, so gilt die Aussage $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ ***nicht*** [Beispiel 3.2.2]

3.3 Homotopie Invarianz

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U und γ_1, γ_2 geschlossen. Das Integral über γ_1 und γ_2 ist gleich (und unabhängig vom Weg) sofern die Singularitäten innerhalb der von γ_1 bzw γ_2 eingeschlossene Fläche erhalten sind.

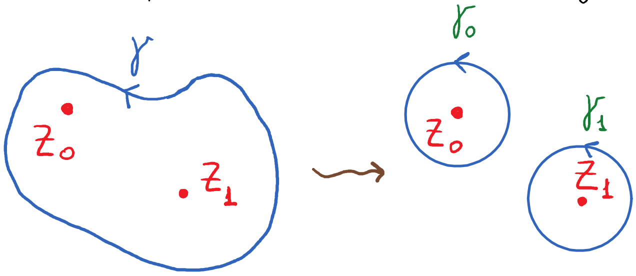


• Singularität von $f(z)$

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

[Beweis 3.3.1]

- Homotopie-Invarianz ermöglicht uns die Singularitäten zu isolieren



$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

$$\boxed{\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \sum_k^N \int_{\gamma_k} f(z)\,dz}$$

[Beweis 3.3.2] [Beispiel 3.3.1]

3.4 Umlaufzahl

→ Sagt uns wie oft eine Singularität von einer Kurve γ umgelaufen wird

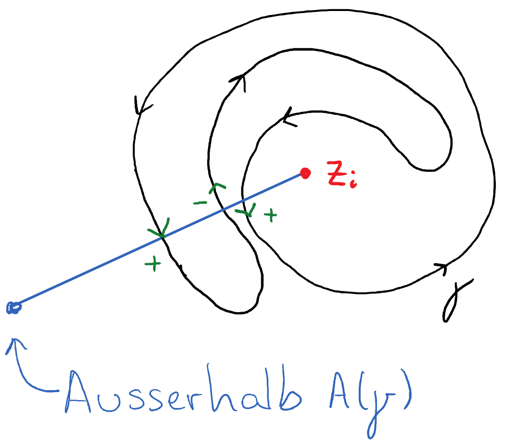
$\mathrm{Ind}_\gamma(z_k) = u \Rightarrow$ Singularität z_k wurde u-mal von γ umgelaufen

$$\boxed{\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \sum_k^N \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z_k)\cdot \int_{\gamma_k} f(z)\,dz}$$

[Beispiel 3.4.1]

→ $\mathrm{Ind}_\gamma(z_i)$ berechnen

- Wir bilden eine Gerade von ausserhalb γ bis zur Singularität und zählen wie viele male γ unsere Gerade im positiven ↺ bzw negativen ↻ Sinn schneidet



$2\times \oplus + 1\times \ominus = 1\times \oplus$

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(z_i) = \underline{1}$

[↺ ⊕ Math. positiv
↻ ⊖ Math. negativ]

3.5 Integralformel von Cauchy

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in U$ und jede geschlossene Kurve γ in U, die z_0 einmal im mathematisch positiven (γ) Sinn umläuft.

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$$

⚠ $f(z_0)$ ist $f(z)$ ausgewertet an der Stelle $z = z_0$

[Beispiel 3.5.1]

- Wir integrieren $\frac{f(z)}{z-z_0}$, wobei es nur **eine** Singularität an der Stelle $z=z_0$ innerhalb der von γ eingeschlossene Fläche gibt (da $f(z)$ ganz in U ist

⇒ keine Singularität von $f(z)$ in $A(\gamma)$)

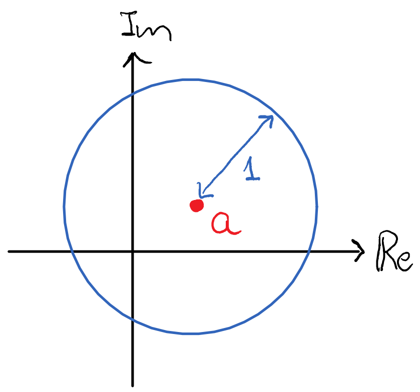
→ Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz}$$

$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)$ [Beispiel 3.5.2]

3.6 Mittelwertsatz

→ Setze die Parametrisierung eines Kreises in der Integralformel von Cauchy $(r=1)$



$$\boxed{f(a) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{Umfang eines Kreises mit Radius } r=1} \int_0^{2\pi} f(\underbrace{e^{it}+a}_{\text{alle Punkte auf dem Kreis}})\, dt}$$

Umfang eines Kreises mit Radius $r = 1$

alle Punkte auf dem Kreis (Radius = 1, Mittelpunkt = a)

→ Interpretation

Auswertung der Funktion f an der Stelle a = Mittelwert der Umgebung

3.7 Maximumsprinzip

→ Realteil bzw. Imaginärteil einer holomorphen Funktion besitzt keine lokale Maxima oder Minima (Minimumsprinzip für Minima), <u>ausser wenn sie konstant ist</u> [Beispiel 3.7.1] [Beweis 3.7.1]

↓

Satz von Liouville: Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ beschränkt und ganz $\Rightarrow$ f ist konstant

beschränkt: $\exists c \in \mathbb{R}$ s.d. $|f(z)| < c \;\forall z \in \mathbb{C}$

ganz: f ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ keine Singularitäten

4. Residuensatz

4.1 Residuum

→ Definition: Der *Residuum* $\mathrm{Res}(f|z_0)$ der Funktion f an der Stelle z_0 ist definiert als der (-1)-te Koeffizient c_{-1} der Laurententwicklung von f mit Entwicklungspunkt z_0

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

also das was $\frac{1}{z-z_0}$ multipliziert [Beispiel 4.1.1]

→ Berechnung von $\mathrm{Res}(f|z_k)$

i. Pole n-te Ordnung

$$\boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) := \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_i)^n f(z) \right]}$$

[Beweis 4.1.1]

ii. Pole 1. Ordnung [Beispiel 4.1.2]

$$\boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) = \lim_{z\to z_i} (z-z_i) f(z)} \quad \text{oder} \quad \boxed{\mathrm{Res}(f|z_i) = \frac{h(z_i)}{g'(z_i)}}$$

falls $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ und $h(z_i) \neq 0$

iii. Wesentliche Singularitäten

⇒ Laurententwicklung [Beispiel 4.1.1]

4.2 Residuensatz

→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in U

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_k \mathrm{Ind}_\gamma(z_k) \cdot \mathrm{Res}(f|z_k)}$$

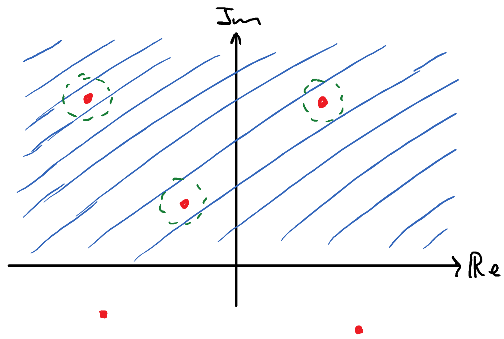
[Beweis 4.2.1]
[Beispiel 4.2.1]

wobei z_k innerhalb $A(\gamma)$ liegt

4.3 Uneigentliche Integrale

→ Sei f eine absolut integrierbare Funktion in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass sie schneller abfällt als x^{-2}. Dann gilt [Beweis 4.3.1][Beispiel 4.3.1]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \mathrm{Im}(z_k)\geq 0}} \mathrm{Res}(f|z_k)}$$

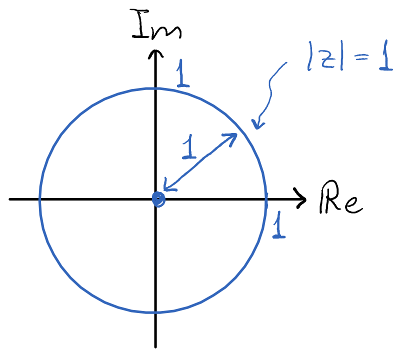


↓ Residuensatz für Singularitäten mit $\mathrm{Im}(z_k) \geq 0$

4.4 Integrale mit $e^{\cdot it}$, $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$

→ Im Abschnitt **3.1** haben wir die *Parametrisierung* von γ betrachtet. Mit der Parametrisierung eines Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt $z = 0$ ($\Rightarrow \gamma(t) = e^{\frac{2\pi}{T}it}$, $t \in [0, T]$) können wir reelle Integrale wieder auf komplexwertige Integrale bringen (mit Hilfe einer „Rückparametrisierung"). Generell gilt: [Beweis 4.4.1][Beispiel 4.4.1]

$$\boxed{\int_{Tm+c}^{Tl+c} f\left(e^{\frac{2\pi}{T}it}\right) dt = (l-m) \int_{|z|=1} f(z) \frac{T}{2\pi i z}\, dz}$$



$l, m \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$

→ Für $\cos(\cdot t)$, $\sin(\cdot t)$ $\Rightarrow$ $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ [Beispiel 4.4.2]

→ So können wir reellwertige Integrale ganz einfach mit Residuensatz lösen

→ Das geht natürlich nur für Funktionen die nur $e^{\cdot it}$ enthalten, wobei alle Exponentialfunktion die gleiche Periode haben.

5. Fourier

1. Fourier-Reihen

→ Eine Funktion heisst periodisch, falls

$$\exists p > 0, \text{ sodass } f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

p heisst *Periode* von f (die kleinste Periode heisst *Fundamentalperiode*)

→ Gerade / Ungerade Fortsetzung

$f(x)$ = Stückweise-Funktion (Im Intervall $[0, L]$)

$\tilde{f}(x)$ = periodische Fortsetzung von $f(x)$ (Im Intervall $]-\infty, \infty[$)

- Gerade Fortsetzung von $f(x) \Rightarrow \tilde{f}(x)$ ist gerade $(\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x))$
- Ungerade Fortsetzung von $f(x) \Rightarrow \tilde{f}(x)$ ist ungerade $(\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x))$

[Beispiel 5.1.1]

→ Darstellung von periodische Funktionen durch trigonometrische Funktionen $(\cos(x), \sin(x))$

→ Ein trigonometrisches Polynom mit Grad N ist eine Linearkombination von trigonometrische Funktionen:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad \text{oder} \quad \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2\pi i k x}{T}} dx \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$=$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} k x\right) dx \quad (k \geq 0)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} k x\right) dx \quad (k \geq 1)$$

→ Eigenschaften

(1) $\int_{-a}^{a} f(x) g(x) \, dx$ mit $f(-x) = f(x)$ (gerade), $g(-x) = -g(x)$ (ungerade) $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x) g(x) = 0$

• Symmetrisches Integrieren (von $-a$ bis a für $a \in \mathbb{R}$) einer ungeraden und geraden Funktion ist immer Null

(2) $\cos(x)$ ist eine gerade Funktion $[\cos(-x) = \cos(x)]$
$\sin(x)$ ist eine ungerade Funktion $[\sin(-x) = -\sin(x)]$

(3)

$g(x)$ gerade, $u(x)$ ungerade:

- $g(x) \cdot u(x)$ ist ungerade
- $g(x) \cdot g(x)$ und $u(x) \cdot u(x)$ sind gerade
- $\int_{-a}^{a} u(x)\, dx = 0$
- $\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 2 \int_{0}^{a} g(x)\, dx$

(4) Für die Fourier-Koeffizienten gilt also

<u>$f(x)$ gerade</u> $(f(-x) = f(x))$

$$b_k = 0 \quad \forall k$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

<u>$f(x)$ ungerade</u> $(f(-x) = -f(x))$

$$a_k = 0 \quad \forall k$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) dx$$

[Beispiel 5.1.2]

(5) Für a_k, b_k und c_k muss man nur durch eine ganze Periode integrieren, egal wo man startet

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T} kx}\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T} kx}\, dx \quad \text{sofern } b - a = T$$

$$= \int_{c-T/2}^{c+T/2} f(x)\, e^{-\frac{2\pi}{T} kx}\, dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

→ Umformeln (komplex ⟷ reell)

$a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$ für $k > 0$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$ und $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$ für $k > 0$

→ Satz von Dirichlet

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

→ Satz von Parseval: Sei f eine 2π-periodische reellwertige Funktion
Dann gilt: [Beispiel 5.1.3]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

2. Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} \, dt$$

[Beispiel 5.2.1]

→ Inverse Fouriertransformation

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t} \, d\omega$$

$\hookrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}(\omega)\}(t) = f(t)$

→ Eigenschaften

1. $\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\} = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$
2. $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = i\omega \hat{f}(\omega)$
3. $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
5. $\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$ [Faltung]

[Beispiel 5.2.2]

→ Satz von Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 \, ds$$

[Beispiel 5.2.3]

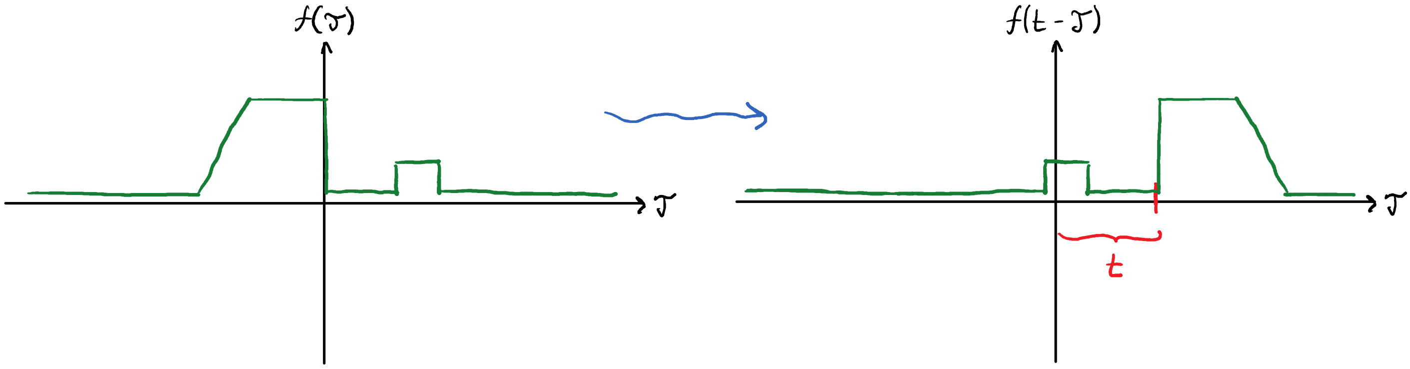
3. Faltung

$$\boxed{(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau}$$ [Beispiel 5.3.1]

→ Eigenschaften

1. $\mathcal{F}\{f*g\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)$ [Beispiel 5.3.2]
2. $(f*g)(t) = (g*f)(t)$

$g(t-\tau) \Rightarrow$ Spiegelung an der y-Achse
\+ Verschiebung um t nach **rechts**



[$t > 0 \Rightarrow$ Verschiebung nach rechts]

→ $(f*g)(t)$ berechnen

1. Eine der Funktionen **spiegeln** und **verschieben**
2. Finde die Multiplikation der beiden Funktionen
3. Multiplikation von 2. integrieren $(-\infty, \infty)$

} Mit Fallunterscheidung in Abhängigkeit von t

$$(f*g)(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot \underbrace{g(\overset{1.}{t-\tau})}_{2.}\, d\tau}_{3.}$$

$$\left[(f*g)(t) = (g*f)(t)\right]$$

6. Laplace

1. Laplace - Transformation

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

→ Existenz der Laplace-Transformation

1. Die Funktion muss von *exponentieller Ordnung* sein, das heisst,

$$\exists\, C, s_0 > 0 \quad \text{s.d.} \quad |f(t)| \leq C e^{s_0 t} \quad \text{für } t > 0$$

⇝ $|f(t)|$ darf nicht schneller als $Ce^{s_0 t}$ wachsen, weil sonst $f(t) \cdot e^{-s_0 t}$ divergiert

⇒ Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-s_0 t}\, dt = \mathcal{L}\{f\}(s)$ divergiert (existiert nicht)

2. Integrierbarkeit $\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty$, $T > 0$

⇒ bereits erfüllt, wenn $f(t)$ *stückweise stetig* in $t \in [0, \infty]$ ist

• Wenn 1. und 2. erfüllt sind, so existiert $\mathcal{L}\{f\}(s)$ für $\mathrm{Re}\{s\} > s_0$

[Beispiel 6.1.1]

→ Darstellung (Doetsch-Symbole $\circ\!\!-\!\!\bullet$)

Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f\}$

$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

Originalfunktion f

Beispiel:

$$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0)$$

$$t^n e^{-at} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

[Beispiel 6.1.2]

→ Lösen von Differentialgleichungen: mit $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(0)$, $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$

[Beispiel 6.1.3]

Tipps

→ Komplexwertige Integrale

- weg geschlossen ⇒ Residuensatz, weg offen ⇒ Parametrisierung
- Keine Singularität im Integrationsweg ⇒ $\int_\gamma f(z)dz = 0$
- Residuensatz 4 life → keine Integralformel (man kann alles mit Residuensatz lösen)

→ Reihen

- Polynom im Nenner ⇒ Geometrische Reihe [+ Partialbruchzerlegung]

  Konvergenzradius beachten! $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \; |q| < 1$

- e^{-z}, $\cos(-z)$, $\sin(-z)$ .... ⇒ Taylorreihe

→ Residuum

- $\operatorname{Res}(f|a) = c_{-1}$ von $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$
- Grad der Singularität bestimmen ⇒ entsprechende Formel verwenden

→ Reellwertige Integrale

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ mit $f \leq \mathcal{O}(t^{-2})$ ⇒ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{\substack{k \\ \operatorname{Im} \geq 0}} \operatorname{Res}(f|z_k)$ $\left[\text{Bsp.: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^3+3}\,dx\right]$
- $\int_{Tm+c}^{Tl+c} f(e^{\frac{2\pi i t}{T}})\,dt = (l-m) \int_{|z|=1} f(z) \cdot \frac{T}{2\pi i z}\,dz$ $[l, m \in \mathbb{Z},\; c \in \mathbb{R}]$ $\left[\text{Bsp.: } \int_0^{4\pi} \frac{\cos(t)}{2e^{it}+3}\,dt\right]$

→ Fouriertransformation

- Gut zu wissen: $\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \sqrt{2\pi}\,(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$
- Muss man den Wert eines Integrals berechnen, welches irgendwie das Quadrat von $\hat{f}(t)$ ist ⇒ *Plancherel*

→ Fourierreihe

- Was so aussieht wie eine Fourierreihe, ist auch eine Fourierreihe
- Ist f gerade oder ungerade? ⇒ $a_n = 0$ oder $b_n = 0$
- Muss man den Wert einer Summe berechnen, welche irgendwie das Quadrat von c_k oder a_k, b_k ist ⇒ *Parseval*

→ Laplacetransformation

- Differentialgleichung $\Rightarrow \frac{d}{dt} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0)$

$\Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} f(t) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

$\Rightarrow$ Auf $F(s)$ lösen $\Rightarrow$ Partialbruchzerlegung + $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\; t^n e^{-at}$