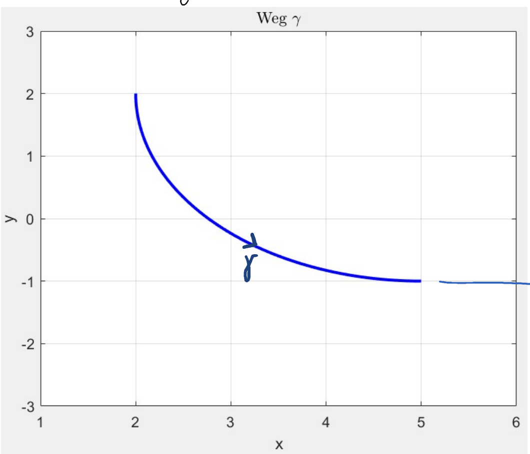
Extras

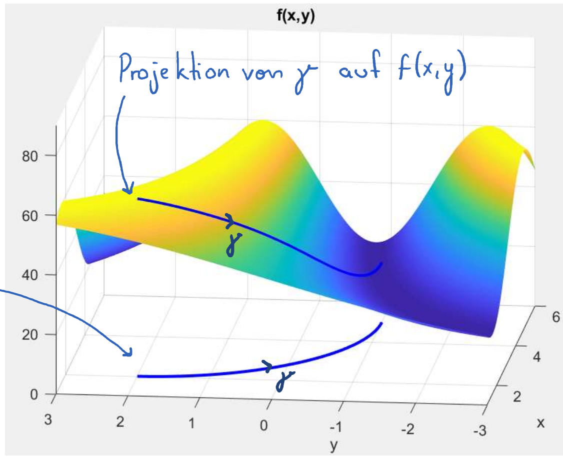
1. Wegintegrale

→ Komplexe Integrale können wegen der Mehrdimensionalität schwer verständlich sein

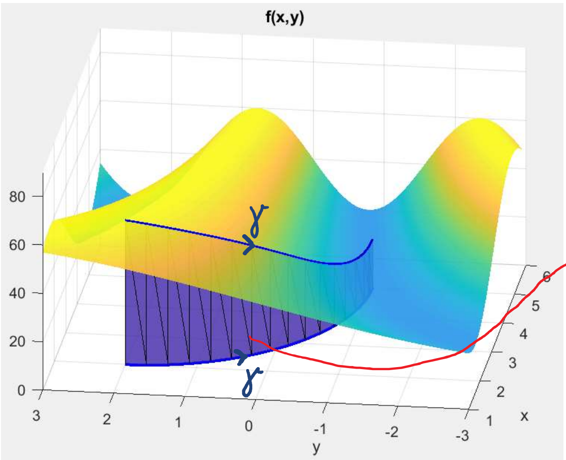
- Ich versuche hier eine graphische Interpretation der komplexen Integrale zu geben

→ Betrachte erst folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Integrationsweg γ





→ Wenn wir $f(x,y)$ über γ integrieren, berechnen wir effektiv die Fläche:



$$\int_\gamma f(x,y)\, ds$$

- Für Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ „$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$" ist es analog, aber da können wir nicht diese Fläche direkt „sehen". Dafür bräuchte man 4 Dimensionen.
- Was man machen kann, ist Realteil und Imaginärteil separat zu integrieren

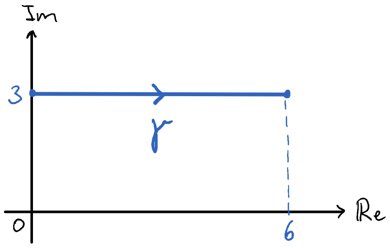
$$f(z) = \mathrm{Re}\{f(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{f(z)\} = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma u(x,y)\, ds + i \int_\gamma v(x,y)\, ds$$

→ Da u und v Funktionen von $\mathbb{C}$ (= „$\mathbb{R}^2$") $\to \mathbb{R}$ sind, können wir sie in 3 Dimensionen graphisch darstellen → Wie wir es in Serie 2, Aufgabe 7 gemacht haben

[Siehe Beispiel auf der nächsten Seite]

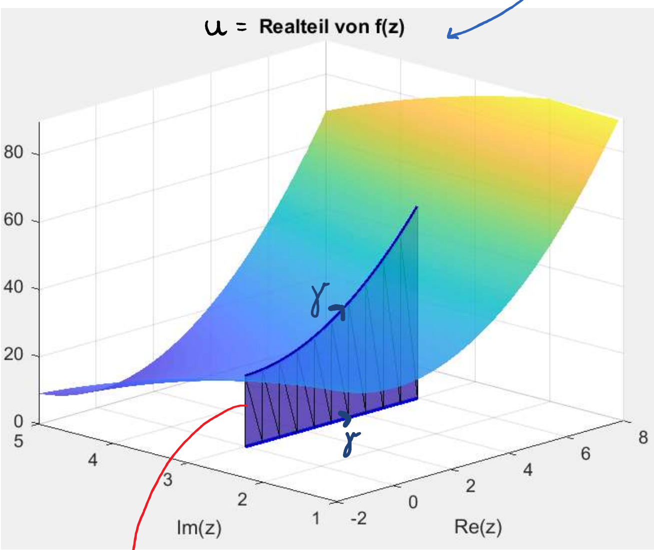
Beispiel: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Finde $\int_\gamma f(z)\,dz$

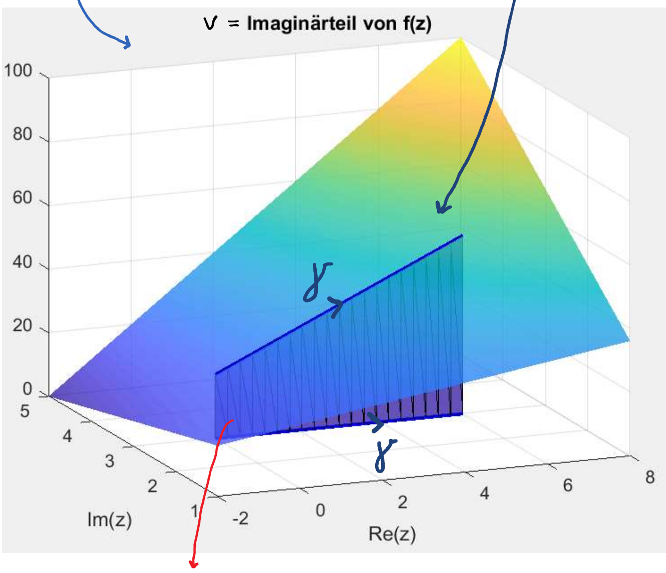


$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y) + i v(x,y)\,dz$$
$$= \underbrace{\int_\gamma u(x,y)\,dz}_{u:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_\gamma v(x,y)\,dz}_{v:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz + i \int_\gamma \mathrm{Im}\{f(z)\}\,dz$$

Projektion von γ auf $v(x,y)$





$$\int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma u(x,y)\,ds$$

[Linienintegral]

$$\int_\gamma \mathrm{Im}\{f(z)\}\,dz = \int_\gamma v(x,y)\,ds$$

$$= \int_0^1 u(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \left[(6t)^2 - 3^2\right]\sqrt{6^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 216t^2 - 54\,dt = \underline{18}$$

Parametrisierung von γ

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &:= 6t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6 \\ y(t) &:= 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \end{aligned}}$$

$$= \int_0^1 v(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 2 \cdot 6t \cdot 3 \cdot \sqrt{6^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 216t\,dt = \underline{108}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 18 + i \cdot 108$$

→ Für $f(z) \in \mathbb{C}$ ist also $\int_\gamma f(z)dz$ einfach das Integral von Realteil und Imaginärteil über γ, was diese Fläche entspricht

$$\underbrace{„\forall z \in \gamma \rightsquigarrow f(z) = z^2 \longrightarrow \Sigma"}_{\int_\gamma f(z)\,dz}$$

2. Mengen

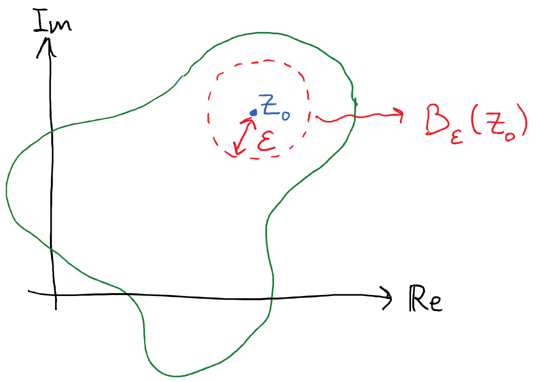
→ Teilmengen von $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \dots$ können verschiedene Eigenschaften haben. Diese Eigenschaften können uns sagen, wie bestimmte Abbildungen oder komplexe Integrale, zum Beispiel, sich verhalten werden. Hier werden wir grundsätzlich 4 Eigenschaften betrachten:

i. Offen

in $\mathbb{R}$: $U \subset \mathbb{R}$ heisst offen, falls $\forall x \in U \; \exists \, \varepsilon > 0$ s.d. $x + \varepsilon \in U$

in $\mathbb{C}$: $U \subset \mathbb{C}$ heisst offen, falls $\forall z \in U \; \exists \, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in U$, wobei

$B_{\varepsilon>0}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$



<u>Beispiel</u>: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$

für Werte $x \in U$ mit $x \to -\infty$ ist es klar, dass es offen ist. Für $x \to 1$ können wir auch unendlich nahe entfernt sein (Abstand kann unendlich klein sein, dass heisst, wir können immer näher dran kommen ($\varepsilon > 0$) ohne die Grenze zu überschreiten ($\Rightarrow x + \varepsilon > 0$ ist immer noch in U))

↳ $0.99999\ldots + 10^{-999\ldots} \in U$

<u>Beispiel</u>: $U \subset \mathbb{R}$, $U :=]-\infty, 1]$

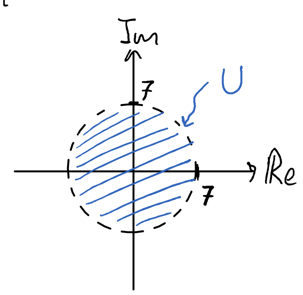
für $x \to -\infty$ ist es offen, aber für $x \to 1$ ist es nicht offen, weil $1 \in U$ und $1 +$ irgend eine Zahl grösser als Null ist dann nicht mehr in U.

Hier haben wir eine Mischung von offen und nicht offen. U ist also <u>nicht</u> offen (Schau mal die Definition von offen: $\forall x \in U \dots$)

!

<u>Beispiel</u>: $B_7(0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 7 \}$ ist offen

$\forall z \in B_7(0) \; \exists \, B_{\varepsilon>0}(z)$ s.d. $B_{\varepsilon>0}(z) \in B_7(0)$



Beispiel: $U := \mathbb{C}$, U ist offen

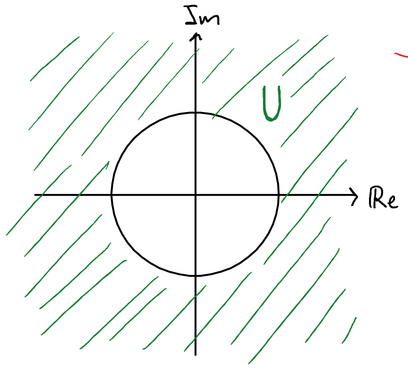
Beispiel: $U := \emptyset = \{\}$, U ist offen (kein $z \Rightarrow \forall z$ erfüllt)

ii. **Abgeschlossen:** $U \subset \mathbb{C}$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist

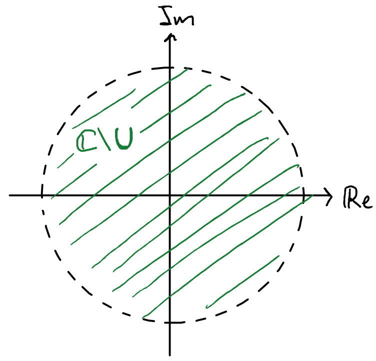
↳ Komplementärmenge einer offenen Menge

Beispiel: $U \subset \mathbb{C}$, $U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 3 \}$

$\mathbb{C} \setminus U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 \} = B_3(0) \rightsquigarrow B_R(z_0)$ ist immer offen, also ist U abgeschlossen



→ für $z \in U$ ist U für $r \to \infty$ (also in Polarform) offen aber für $r \to 3$ nicht offen $\Rightarrow U$ ist nicht offen



$\mathbb{C} \setminus U$ ist offen

Beispiel: $U := \mathbb{C}$

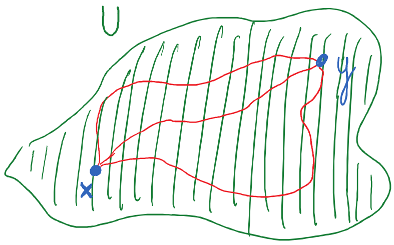
U ist offen (Bedingung für alle $z \in U = \mathbb{C}$ erfüllt. Da U die ganze komplexe Ebene entspricht, sind alle mögliche z in U)

$U \setminus \mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C} = \emptyset = \{\}$. Wie wir schon gesehen haben, ist die leere Menge offen. $\Rightarrow U$ ist abgeschlossen

$\mathbb{C}$ ist offen und abgeschlossen

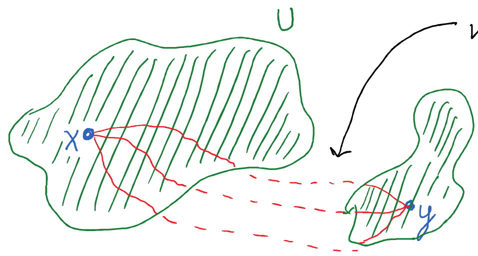
⚠ Wenn eine Menge Halboffen (↱ manchmal offen, manchmal nicht) ist (also eine Mischung wie bei $]3, 2]$, zum Beispiel), dann sagen wir einfach, dass die Menge nicht offen ist (offen nur falls Bedingung für $\forall z$ erfüllt ist!) Gleich für abgeschlossen: Falls $\mathbb{C} \setminus U$ offen ist, dann ist U abgeschlossen. Aber falls $\mathbb{C} \setminus U$ manchmal offen und manchmal nicht offen ist, dann ist U nicht abgeschlossen

iii. **Wegzusammenhängend**: für jedes Paar x, y $(x, y \in U)$ gibt es einen <u>stetigen</u> Weg von x nach y.



Wegzusammenhängend

Für alle Paare x, y $(x, y \in U \subset \mathbb{C})$ existiert ein Weg, die die beiden verknüpft und <u>komplett</u> in U liegt



nicht stetig!

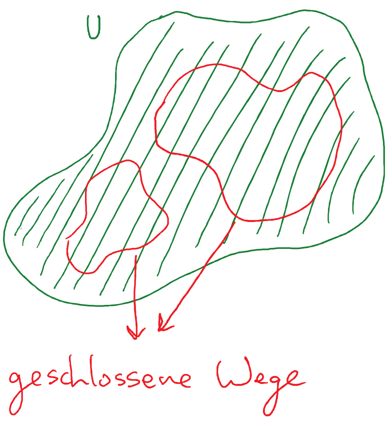
nicht wegzusammenhängend

Es ist unmöglich x und y durch einen stetigen Weg zu verknüpfen. Generell sind <u>disjunkte</u> Mengen nicht wegzusammenhängend

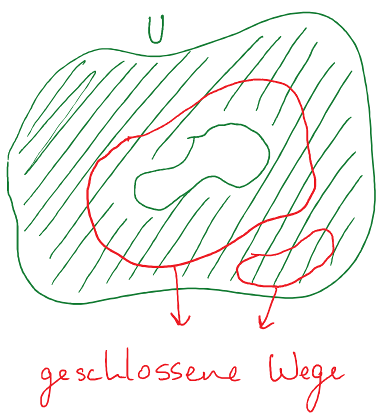
↳ $A, B \subset \mathbb{C}$, $A \cap B = \emptyset$

iv. **Einfach zusammenhängend**: Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, falls sie wegzusammenhängend <u>und</u> Nullhomotop ist. Nullhomotop heisst, dass „bei geschlossene Wege nur Elemente von U enthalten sind (in die geschlossene Fläche)".

↳ stetig

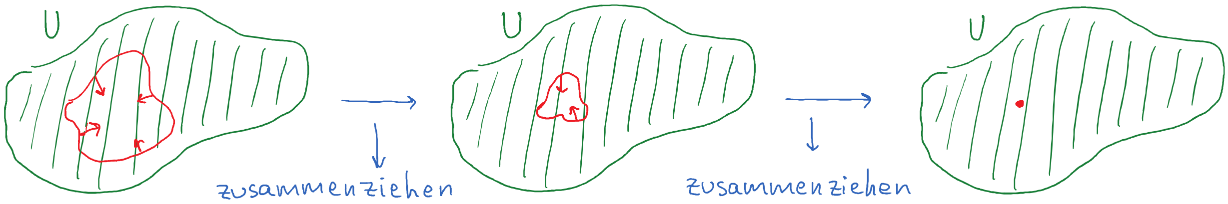


Für alle geschlossene Wege ist die innere Fläche vom Weg in U
⇒ einfach zusammenhängend

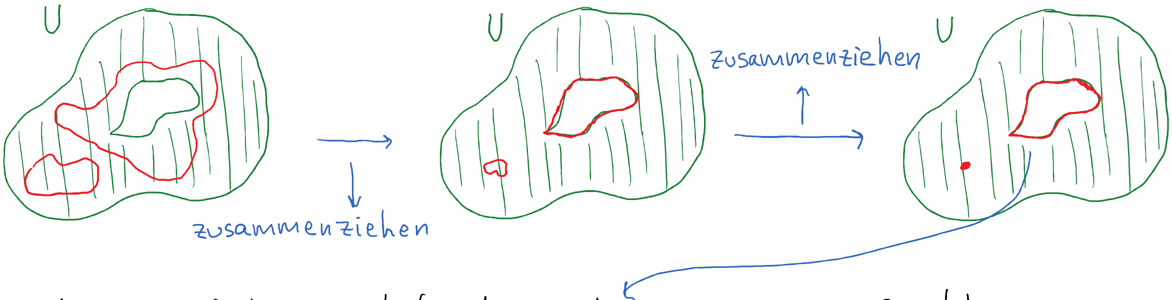


Für gewisse Wege ist die innere Fläche nicht ganz in U
⇒ nicht einfach zusammenhängend

→ Nullhomotopie kann auch wie folgt interpretiert werden: jeder geschlossene Weg lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen



Wir ziehen den Weg zusammen und schauen, ob es möglich ist, es zu einen Punkt transformieren. Hier ist es für alle geschlossene Wege möglich und deshalb ist U auch einfach zusammenhängend



Hier ist es nicht möglich den Weg zu einen Punkt zusammenziehen, weil sonst der Weg nicht in U ist (ein Weg ist nichts anderes als die Zusammensetzung von verschiedenen Punkten $z_i \in U$. Also müssen Wege, egal ob geschlossen oder nicht, immer in U sein). Hier wäre also U nicht einfach zusammenhängend

3. Reihen

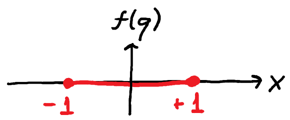
→ Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. $B_R(z_0) \subseteq U$. Dann ist f um z_0 als Potenzreihe darstellbar

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}$$

3.1 Geometrische Reihen

- In Analysis haben wir gelernt, dass in $\mathbb{R}$

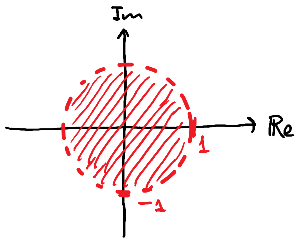
$$f(q) = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad |q| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $]-1, 1[$

- In $\mathbb{C}$ ist es analog

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$



Potenzreihe konvergiert nur in $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

<u>Beispiel 1.1:</u> $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ finde die Potenzreihe von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

→ Wir suchen etwas in der Form $\frac{1}{1-az}$

↳ a sagt nur unser Konvergenzradius

$\left(|az| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{|a|} \right)$

$$\frac{1}{2z+3} \cdot \frac{1/3}{1/3} = \frac{1/3}{\frac{2}{3}z + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-(-\frac{2}{3}z)}$$

↳ Geometrische Reihe verwenden

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1-(-\frac{2}{3}z)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, \quad \left|-\frac{2}{3}z\right| < 1$$

Gültig für $\left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \rightsquigarrow \left|\frac{2}{3}\right| |z| < 1 \longrightarrow |z| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2z+3}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Diese Potenzreihe geht leider nur für $|z| < \frac{3}{2}$.

Betrachte $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ anstatt $\frac{1}{1-z}$. Die Potenzreihe lautet $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ und konvergiert für $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$.

$\Rightarrow$ Um die Potenzreihe auf dem anderen Bereich zu finden, müssen wir die Geometrische Reihe mit der Inversion von z finden.

$$\underset{|z| < \rho}{\frac{1}{1 - \text{etwas mit } z}} \rightsquigarrow \underset{|z| > \rho}{\frac{1}{1 - \text{etwas mit } 1/z}}$$

schauen wir das vorherige Beispiel: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$

wir brauchen hier etwas mit $\frac{1}{z}$

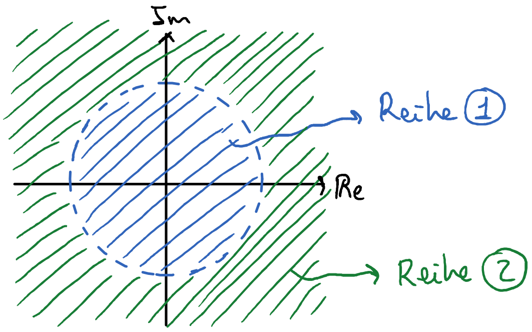
$$f(z) = \frac{1}{2z+3} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \frac{1/z}{2+\frac{3}{z}} \cdot \frac{1/2}{1/2} = \frac{1/2z}{1+\frac{3}{2z}} = \frac{1}{2z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{2z}\right)}}_{\text{Geometrische Reihe}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}$$

$\rightarrow$ Gültig für $\left|-\frac{3}{2z}\right| < 1 \rightsquigarrow \left|\frac{3}{2}\right| \cdot \frac{1}{|z|} < 1 \rightsquigarrow |z| > \frac{3}{2}$

Also haben wir
$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \quad \text{Reihe (1)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad \text{Reihe (2)} \end{cases}$$

Bemerkung: keine Aussage für $|z| = \frac{3}{2}$. Wir wissen nicht ob eine der Reihen für ein z mit $|z| = \frac{3}{2}$ überhaupt konvergieren wird.



Gültige Bereiche für Reihe (1)/(2)

3.2 Konvergenzradius

→ Zum wissen wann/wo man eine gegebene Reihendarstellung verwenden kann ist es nützlich den Konvergenzradius zu berechnen. Er ist gegeben durch:

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a_k}}}$$

Beispiel 1.2: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot z^n$. Für welche z ist die Potenzreihe definiert?

→ Wir suchen den Konvergenzradius von $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{a_n} z^n \quad \hookrightarrow z_0 = 0$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\frac{3^n}{2^n}}{(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 3^n 2^{n+1}}{(-1)^{n+1}3^{n+1}2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{-1}\cdot\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

also konvergiert die Potenzreihe nur für $|z| < \frac{2}{3}$

wäre $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{1}{z^n}$ so würde es für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{2}{3} \Rightarrow |z| > \frac{3}{2}$

!

Beispiel 1.3: $f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3}$. Finde die entsprechende Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

Partialbruchzerlegung von $f(z) = \frac{3z+4}{(2z+3)(z+1)} = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}z^n, & |z| < \frac{3}{2}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2}\end{cases} \qquad \text{(Beispiel 1.1)}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

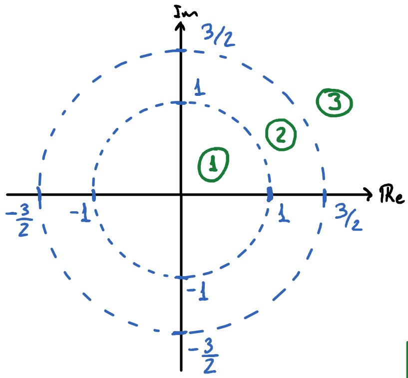
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1/z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} \quad \text{für } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

• wir haben also

$$\frac{1}{2z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n, & |z| < \frac{3}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > 1 \end{cases}$$

• Da $f(z) = \frac{1}{2z+3} + \frac{1}{z+1}$ müssen wir für alle Bereiche eine Fallunterscheidung machen:

$$f(z) = \frac{3z+4}{2z^2+5z+3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, & |z| < 1 \quad (1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & 1 < |z| < \frac{3}{2} \quad (2) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(2z)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}}, & |z| > \frac{3}{2} \quad (3) \end{cases}$$



3.3 Cauchy-Produktregel

→ Produkt von zwei Summen

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}}$$

Beispiel 1.4: $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Finde die Reihendarstellung von $f(z)$ für $z_0 = 0$

$$f(z) = \left[\frac{1}{z+1}\right]^2 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

$a_n = (-1)^n z^n$

$b_k = (-1)^k z^k$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k z^k \cdot (-1)^{n-k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^n z^n}_{} = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n z^n$$

unabhängig von k
(und wir n-mal addiert)

Beispiel 1.4 (Methode 2)

→ Wir bemerken, dass $F(z) := \int f(z)\,dz = \int \frac{1}{(z+1)^2}\,dz = -\frac{1}{z+1} + c$

$$-\frac{1}{z+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \longrightarrow \text{also } F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c$$

• Da $F(z) = \int f(z)\,dz \Rightarrow f(z) = \frac{d}{dz} F(z)$

$$f(z) = \frac{d}{dz}\left[-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + c\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$$

also ist $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ gegeben durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$ (für $|z|<1$)

1.4 Formeln

→ Wir berechnen eine generelle Formel für die Potenzreihendarstellung von $\frac{1}{az+b}$ mit Entwicklungspunkt z_0

i. $$\frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0)+b+z_0} = \frac{\frac{1}{b+z_0}}{\frac{(z-z_0)}{b+z_0}+1} = \frac{1}{b+z_0}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-z_0)}{b+z_0}\right)} = \frac{1}{b+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n$$

⇝ für $\frac{|z-z_0|}{|b+z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| < |b+z_0|$

ii. $$\frac{1}{z+b} = \frac{1}{(z-z_0)+b+z_0} = \frac{\frac{1}{z-z_0}}{1+\frac{b+z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{b+z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{oder} \quad = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^{n+1}(z-z_0)^n$$

Schon in Laurentreihe

⇝ für $\frac{|b+z_0|}{|z-z_0|} < 1 \Rightarrow |z-z_0| > |b+z_0|$

Also haben wir

$$\boxed{\frac{1}{z+b} = \begin{cases} \frac{1}{b+z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{b+z_0}\right]^n (z-z_0)^n, & |z-z_0| < |b+z_0| \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left[-(b+z_0)\right]^n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}, & |z-z_0| > |b+z_0| \end{cases}}$$

Beispiel 1.5: $f(z) = \frac{1}{2z+3}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$

↳ z wird mit 2 multipliziert

$$f(z) = \frac{1}{2z+3} = \frac{1/2}{z+3/2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+3/2} \rightarrow b = \frac{3}{2},\; z_0 = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3/2+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3/2+2}\right]^n (z-2)^n, \quad |z-z_0| < |3/2+2|$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2+2} \sum_{n=0} \left[-\frac{1}{3/2+2} \right]^n (z-2)^n , \quad |z-z_0| < | 3/2 + 2 |$$

$$= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n , \quad |z-2| < \frac{7}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{3}{2} + 2 \right) \right]^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , \quad |z-2| > \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \begin{cases} \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^n (z-2)^n , & |z-2| < \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(z-2)^{n+1}} , & |z-2| > \frac{7}{2} \end{cases}$$

4. Singularitäten

- Wir können alle Singularitäten folgendermassen aufteilen:

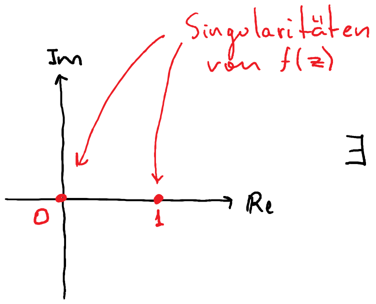
  1) Isolierte Singularitäten
     i. Hebbare Singularitäten
     ii. Polstellen
     iii. Wesentliche Singularitäten
  2) Nicht isolierte Singularitäten.

Es ist besser erst zu zeigen was überhaupt „isoliert" hier bedeutet

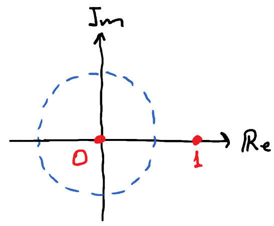
2) Nicht isolierte Singularitäten

Eine Singularität heisst isoliert, falls $\exists B_{R=\varepsilon>0}(z_0)$ s.d. die Singularität an der Stelle z_0 die einzige Singularität in $B_\varepsilon(z_0)$ ist. Es ist nicht isoliert, falls diese Bedingung nicht erfüllt ist.

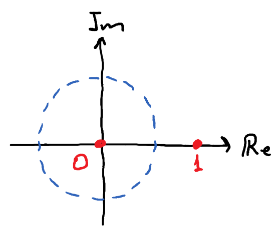
Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 z}$ $\longrightarrow$ zwei Singularitäten: $\rightarrow z=0$, $\rightarrow z=1$



$\exists B_{\varepsilon>0}(z=0)$ und $\exists B_{\varepsilon>0}(z=1)$?



für $B_{R<1}(z=0)$ ist nur Sing. $z=0$ im Ball

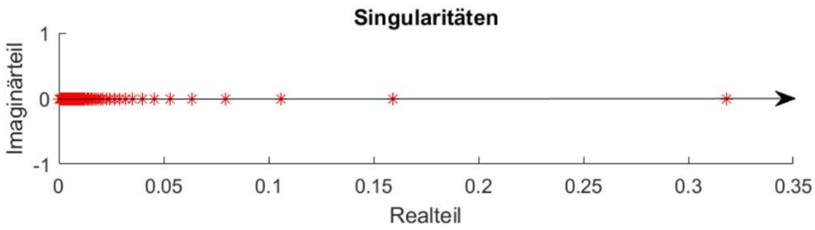


für $B_{R<1}(z=1)$ ist nur Sing. $z=1$ im Ball

$\Rightarrow$ Beide Singularitäten sind isoliert

Beispiel: $f(z) := \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

Singularitäten von $f(z)$ sind gerade die Nullstellen von $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.
$\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist gerade null bei $\frac{1}{z} = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow z = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$
Die Singularität an der Stelle $z=0$ ist <u>nicht</u> isoliert. Warum?



Hier sind die Singularitäten von $f(z)$ auf der $\mathbb{R}e$-Achse dargestellt. Wie wir sehen können, nimmt der Abstand zwischen den Singularitäten (mit $z \to 0$) mit ein Faktor n^{-1} ab. Da wir unendlich viele Singularitäten haben und der Abstand immer kleiner wird, ist $z=0$ von eine Singularität mit unendlich kleiner Abstand benachbart $\Rightarrow$ nicht isoliert.

Generell haben Funktionen mit nicht isolierte Singularitäten folgende Form:

$$f(z) = \frac{1}{\text{period\_func}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

⚠ Obwohl $\cosh(z)$ und $\sinh(z)$ keine periodische Funktion auf der $\mathbb{R}e$-Achse sind, haben sie unendlich viele Nullstellen auf der $\mathbb{I}m$-Achse (sind dort periodisch)

1) Isolierte Singularitäten

i. Hebbare Singularitäten

- Eine Singularität heisst hebbar, falls die Funktion sich analytisch fortsetzen lässt.

Beispiel: $f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)}$

$$f(z) = \frac{(z-3)}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-2} =: \tilde{f}(z) \quad \text{für } z \neq 3$$

„Singularität vollständig abgekürzt"

Wir haben $f(z)$ analytisch fortgesetzt (an der Stelle $z=3$), weil jetzt die Fortsetzung $\tilde{f}(z)$ holomorph an der Stelle $z=3$ ist

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) =: \tilde{f}(z) \text{ ist holomorph an der Stelle } z=0$$

$\Rightarrow$ $z=0$ ist eine hebbare Singularität.

– Wir haben zwei Methoden um hebbare Singularitäten zu identifizieren.

1) Explizite Abkürzung der Singularität (mit Verwendung der Taylorreihe, zum Beispiel).

2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ konvergiert.

Da „echte" Singularitäten bei den Singularitäten „explodieren" ($\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$), müssen wir nur sehen, ob $f(z)$ überhaupt an der Singularität konvergiert.

$\lim_{z\to z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow$ hebbare Singularität

$\lim_{z\to z_0} f(z)$ divergiert $\Rightarrow$ nicht hebbare Singularität

– Das ist analog zu sagen, dass die entsprechende Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ von $f(z)$ keine Terme mit negativen Exponenten hat.

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)}{1} = 1$$

Da $\lim_{z\to z_0} f(z)$ konvergiert $\Rightarrow$ $z=0$ ist eine hebbare Singularität

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

$$\text{mit} \quad c_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!}, & \text{für } k>0 \text{ und } k=2n,\ n\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $c_k = 0 \ \forall\ k<0 \Rightarrow$ Laurentreihe hat keine Terme mit negativen Exponenten (man kann es eigentlich direkt von der Taylorreihe ablesen)

ii. Polstellen

– Polstellen sind nicht hebbare Singularitäten mit endlicher Ordnung. Das heisst, es kommen Termen mit negativen Koeffizienten in endlicher Anzahl vor in der Laurentreihe.
Wenn es in endliche Anzahl vorkommt, dann muss es auch ein $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $(z-z_0)^k f(z)$ an der Stelle z_0 hebbar ist.

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) \text{ konvergiert}$$

Der minimale k mit diese Eigenschaft nennt man Ordnung der Singularität

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$

$f(z)$ hat eine Polstelle 1. Ordnung an der Stelle $z=0$ (auch gültig für $z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$)

$\lim\limits_{z \to 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow$ Singularität $z=0$ ist nicht hebbar.

$\lim\limits_{z \to 0} z^1 \cdot f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1 \Rightarrow$ konvergiert schon für $k=1 \Rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung

– Man kann normalerweise für Polynome im Nenner die Ordnung direkt ablesen.

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2 z}$

- $\lim\limits_{z \to 2} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=2$ nicht hebbar
- $\lim\limits_{z \to 2} (z-2) \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim\limits_{z \to 2} \frac{1}{(z-2) z}$ divergiert
  $\Rightarrow z=2$ nicht 1. Ordnung
- $\lim (z-2)^2 \frac{1}{(z-2)^2 z} = \lim\limits_{z \to 2} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ konvergiert
  $\Rightarrow z=2$ hat 2. Ordnung

- $\lim\limits_{z \to 0} |f(z)| = \infty \Rightarrow z=0$ nicht hebbar
- $\lim\limits_{z \to 0} z \cdot \frac{1}{(z-2) z} = \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}$ konvergiert
  $\Rightarrow z=0$ hat 1. Ordnung

$z=2 \rightarrow$ Polstelle 2. Ordnung
$z=0 \rightarrow$ Polstelle 1. Ordnung

iii. Wesentliche Singularitäten

— Wesentliche Singularitäten sind nicht hebbare Singularitäten mit unendliche Ordnung. Das heisst, Laurentreihe hat unendlich viele Termen mit negativen Exponenten oder $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z)$, $k \in \mathbb{N}$, divergiert $\forall k$.

Beispiel: $f(z) = e^{1/z}$

$\lim_{z \to 0} z^k e^{1/z} = \lim_{z \to 0} \frac{e^{1/z}}{\frac{1}{z^k}} = \lim_{z' \to \infty} \frac{e^{z}}{z^k} = \infty$ $\forall k$, da die Exponentialfunktion immer schneller wächst als Polynome. $\Rightarrow$ wesentliche Singularität

oder:

$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$ $\rightsquigarrow$ Das ist nicht die Laurentreihe, weil es nicht in der $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ ist

es darf nur $(z-z_0)^k$ enthalten und nicht $\frac{1}{(z-z_0)^k}$. Das können wir lösen indem wir die Grenzen vertauschen

$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{k!} z^k$ = Laurentreihe von $e^{1/z}$

↳ hat unendliche viele Termen mit negativen Exponenten

$\Rightarrow$ wesentliche Singularität