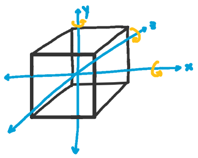
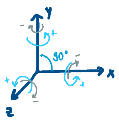
BIOMECHANIK I

FS2019

$G = 9.81\,m/s^2$ verwenden





3 degrees of freedom
3 degrees of rotation

positive rotation
negative rotation

Einheitsvektor

$$e = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

Normieren

Vektor auf Länge 1 bringen

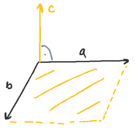
Cross product

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

1. 2. 3.

Resultat ist senkrechter Vektor auf zwei Vektoren

! rechte-Hand-Regel



$a \times b = c$

$|c| = |a| \cdot |b|$

$\overline{V_p} = \overline{\omega} \times \overline{r_{op}}$

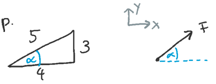
$$e_x \times e_y = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \overline{e_z}$$

→ no projection on unit vectors

TRIGO

		30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{2}$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Bsp.



$KB(x): F \cdot \frac{4}{5}$

nicht mit sin / cos wenn Längen bekannt!

"Einheitsdreieck" skalieren!

$\cos = \frac{AK}{HY} = \frac{1}{1}$

hier: $\frac{AK}{HY} = \frac{4}{5}$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \qquad 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

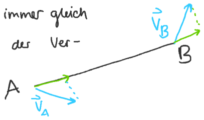
KINEMATIK

Allgemeine Bewegungsformel: $\boxed{\vec{V_A} = V_B + \vec{\omega} \times \vec{BA}}$

Satz der projizierten Geschwindigkeit

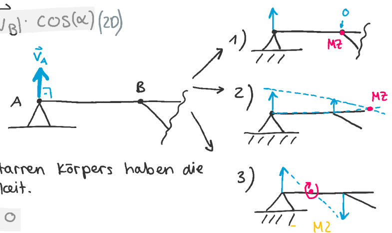
(sdpG)

- Alle Abstände in einem starren Körper bleiben immer gleich
- Geschwindigkeiten zweier Punkte in Richtung der Verbindungsstrecke sind gleich.



$\vec{V_A} \cdot \vec{AB} = \vec{V_B} \cdot \vec{AB}$ (2D & 3D)

$|\vec{V_A}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{V_B}| \cdot \cos(\alpha)$ (2D)



nur in der Mitte, wenn Vektoren gleich lang

Translation

Alle Punkte des starren Körpers haben die selbe Geschwindigkeit.

$\vec{V_A} = \vec{V_B}$, $\vec{\omega} = 0$

Rotation

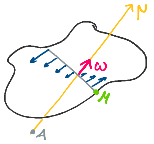
Auf der Rotationsachse μ: $\vec{v} = 0$

v an beliebigem Punkt: $\vec{V_M} = \omega \times \vec{AM} = \omega \times \vec{BM}$

Falls $\omega \perp r$ (2D): $V_M = \omega \cdot |\vec{BM}|$

Rotationsgeschw.: $\vec{\omega} = \vec{\omega} \vec{e_\mu} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

reine Rotation: $\vec{V_A} \cdot \vec{\omega_A} = 0$



- Rotationsachse μ und ω haben die gleiche Richtung.
- Rotationsgeschwindigkeit ist überall im Körper gleich
- momentane Rotation: $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ wenn $\vec{v} = 0$

Satz vom Momentanzentrum

(SMZ) $V_{MZ} = 0$ → Lager beachtung

- Jeder starre Körper hat eigenes MZ
- MZ kann ausserhalb des Körpers sein

SMZ: MZ ist auf der Strecke senkrecht zu $\vec{v}$

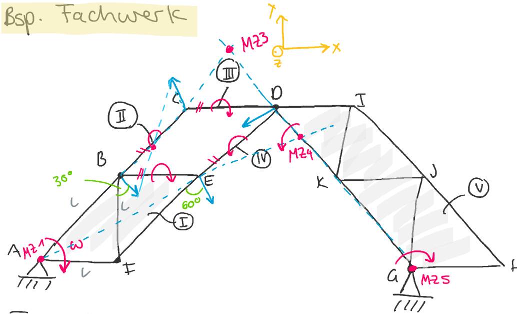
$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ oder $v = \omega \cdot r$

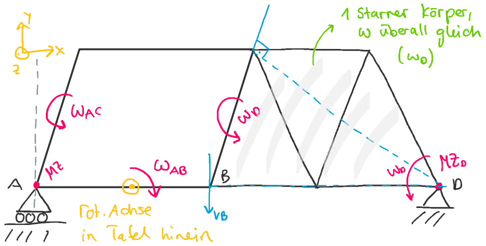
Ebene Fachwerke

Lösungsweg

1. Identifikation aller starren Körper
   - Bereiche nur aus Dreiecken ▱
   - einzelne starre Stäbe
   - andere starre Körper
2. Identifikation der Lagerungen
   - drehbar (→ Momentanzentrum)
   - + verschiebbar
3. ω_i und m_i für alle beteiligten Körper bestimmen
   - Satz vom Momentanzentrum ($v = \omega \cdot r$)
   - Satz der projizierten Geschwindigkeiten
   - parallele Stäbe haben die gleiche ω

Bsp. Fachwerk





Formeln

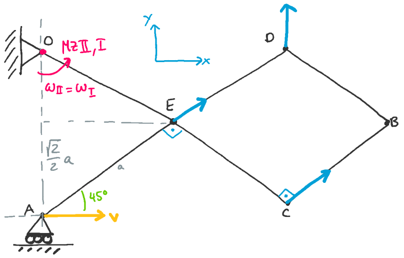
$\vec{V_A} \cdot \vec{AB} = \vec{V_B} \cdot \vec{AB}$

$V = \omega l$

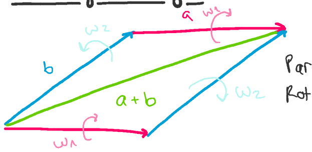
$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{\omega} \times \vec{BA}$

Parallelogramm-Regel

$\vec{M_p} = \vec{OP} \times \vec{F}$



Parallelogrammregel



Parallele Stäbe haben die gleiche Rotationsgeschwindigkeit.

Bewegungszustand

Der allgemeine Bewegungszustand eines starren Körpers wird durch zwei Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_B$ beschrieben.
Die beiden Vektoren zusammen $\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ werden als Kinemate bezeichnet.

Invarianten des Bewegungszustandes

I_1: Rotationsgeschwindigkeit ω

I_2: skalar → $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_B = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_M$ ✱

vektoriell → $\vec{v}_\omega = (\vec{v}_M)_\omega = (\vec{v}_B)_\omega$

$\vec{v}_\omega$: - Geschwindigkeit in ω-Richtung
- auf die Zentralachse projezierte Geschwindigkeit

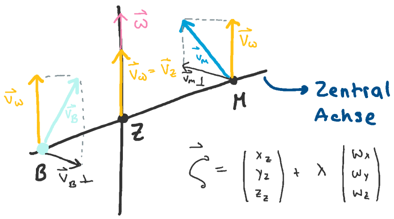
Zentralachse ζ

Ist ein geometrischer Ort aller Punkte, deren Geschwindigkeit v_m ist. Der starre Körper beschreibt eine Schraubung um diese Gerade.

Bestimmung der Zentralachse

$B(x_B, y_B, z_B)$: beliebiger Punkt der Körpers mit bekannter Kinemate
$Z(x,y,z) \in \zeta$: unbekannter Punkt der Zentralachse (beliebiger)

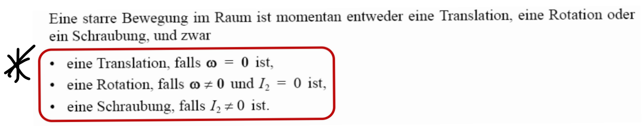
$$\vec{v}_\omega = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{BZ} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \\ z - z_B \end{pmatrix}$$



$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Spezialfälle

$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_B = 0$
→ $\vec{\omega} = 0$: reine Translation
→ $\vec{v}_B = 0$: momentane Rotation um Achse



Eine starre Bewegung im Raum ist momentan entweder eine Translation, eine Rotation oder ein Schraubung, und zwar

✱
- eine Translation, falls $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ist,
- eine Rotation, falls $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ und $I_2 = 0$ ist,
- eine Schraubung, falls $I_2 \neq 0$ ist.

KRÄFTE & MOMENTE

Kraft

Vektor, charakterisiert durch
- Wirkungslinie
- Richtung
- Angriffspunkt A
- Grösse F

Kontaktkraft → WW durch Berührung
Fernkraft → WW ohne Berührung

Für die Bestimmung äusserer und innerer Kräfte wird das System zuerst von der Umgebung freigeschnitten.

Resultierende

$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ (Vektorielle Summe aller Kräfte)

Bestimmung:
1) $\vec{e}$ Vektoren aufstellen
2) Kraftvektoren aufstellen
$\vec{F} = \vec{e}_i \cdot |\vec{F}_i|$
3) Resultierende bestimmen
$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Damit Moment ausgeübt wird, braucht man Winkel zw. allen Komponenten (Momentenachse, Verb. linie, Kraft) → x & y gilt → dto. in z.
↳ Moment in x fb. braucht y & z Komponente in Kreuzprodukt!
- Verb. linie & Kraft nicht kolinear → dann $M_0 = 0$
=> Verb. linie & Kraft ⊥ Momentenachse, da Resultat Kreuzprod. ⊥ mit Multiplikat. => wegen Kreuzprodukt $\bar{M}_0 = \bar{r}_{OP} \times \bar{F}_P$

Moment

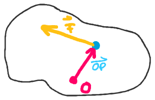
$\vec{M}_0 = \vec{OP} \times \vec{F}$ (Vektorprodukt zwischen O und A und der Kraft $\vec{F}$)
↳ Angriffspunkt - + ⁻

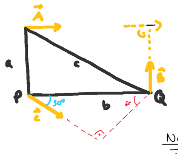
Bem.: F darf entlang Wirkungslinie verschoben werden → M_0 bleibt gleich

$|\vec{M}_0| = |\vec{OP}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\alpha)$

Moment einer Kräftegruppe: $\vec{M}_0 = \sum_i \vec{OP}_i \times \vec{F}_i$ — Kraft bei P_i

Bei anderem Bezugspunkt: $\vec{M}_Z = \vec{M}_0 + \vec{ZO} \times R$ → bei $\bar{R}=0$ & reinem Moment $\bar{M}_Z = \bar{M}_0$ → Moment überall gleich.
! Transformationsregel





$M_p = -Aa + Bb$
(c nicht weil kein Abstand)

$M_Q = -A\cancel{c}_a + c\cancel{b}$ $(b \cdot \cos(60°))$
↳ kürzester Weg

Notation:
$\bar{M}_{AQ}$ – Moment, welches von Kraft $\bar{A}$ bei Punkt Q verursacht wird. (Vektor)
M_{Qz} – z-Komponente des totalen Moments bei Q. (Zahl)
M_{AQz} – z-Komponente des Moments, das von $\bar{A}$ bei Q verursacht wird. (Zahl)
$\bar{M}_Q$ – totales Moment, welches bei Q wirkt (Vektor)

M mit rechte Hand Regel

$M = F \cdot d_\perp$ $d_\perp$: kleinster Abstand zur Kraftwirkungslinie oder senkrechtem Anteil der Kraft

Rezept

1) Rechte Hand auf O bei Berechnung von M_0 (Daumen auf Punkt
(Hand öffnen)
2) Finger in Pfeilrichtung: Positiv → $M = +F \cdot d_\perp$
gegen Pfeilrichtung: Negativ → $M = -F \cdot d_\perp$

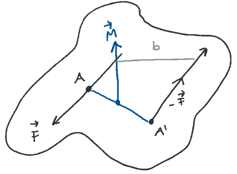
Momente von Kräften im gleichen Punkt kann man addieren

Kräftepaar

Eine aus zwei parallelen entgegengerichteten Kräften bestehende Kräftegruppe mit $\vec{R}=0$ heisst Kräftepaar. Sein Moment:

$\vec{M} = \vec{A'A} \times \vec{F}$ → ist ein freier Vektor und vom Bezugspunkt unabhängig.

Demzufolge kann das Kräftepaar verschoben werden, ohne seine Wirkung auf den starren Körper zu verändern.



$|\vec{M}| = b \cdot |\vec{F}|$

Leistung

work: $\frac{\bar{F} \cdot \bar{d}}{\Delta t}$ → v

Power is work per time

$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{m}{s} = \frac{\vec{F} \cdot m}{s}$

oder : $P = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$

Leistung eines Moments: $P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}$ (reine Rotation)
Leistung einer Kräftegruppe: $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

- keine Leistung: $\vec{v} \perp \vec{F}$ $P = \vec{v}_B \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}$ ← = 0 in PdvL
- Komponente von $\vec{v}$, die parallel ist zur Kraft!
- wenn $\vec{v}$ und $\vec{F}$ nicht in die gleiche Richtung zeigen → ⊖

Reduktion einer Kräftegruppe

Eine Kräftegruppe $\{G\}$ kann immer auf ihre Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$ in einem beliebigen Punkt B reduziert werden.

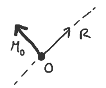
Dyname

$= \{\vec{R}, \vec{M}_0\}$

$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ — invariant (specific to body) — kann Translation bewirken

$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_i \times \vec{F}_i$ — not invariant — kann Rotation bewirken

- eine Einzelkraft $\vec{R}$ &
- ein Momen M_0 mit Bezugsp. 0

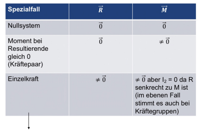


- Bezugspunkt mit möglichst wenigen Hebelarmen wählen → weniger Algebra
- keine Beschleunigung wenn $\vec{R}=0$ & $\vec{M}=0$
= Nullsystem

Invarianten

überall im Körper gleich

I_1 : $\vec{R}$
I_2 : $\vec{R} \cdot \vec{M}_B = \vec{R} \cdot \vec{M}_M \dots$



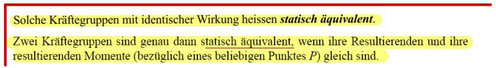
Spezialfall	$\vec{R}$	$\vec{M}$
Nullsystem	$\vec{0}$	$\vec{0}$
Moment bei Resultierende gleich 0 (Kräftepaar)	$\vec{0}$	$\neq \vec{0}$
Einzelkraft	$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$ aber $I_2 = 0$ da R senkrecht zu M ist (im ebenen Fall stimmt es auch bei Kräftegruppen)

So dass man eine Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren kann, muss I_2 Null sein

Wenn $\bar{R}=0$, dann ist Moment nicht mehr von Bezugspunkt abhängig:
$\bar{M}_0 = \bar{M}_P + \bar{r}_{OP} \times \bar{R} = \bar{M}_P$

Zentralachse

Sei B ein beliebiger Punkt des Körpers mit Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$
$Z\{x,y,z\} \in \zeta$ mit $\vec{M}_Z = \vec{M}^R$: $\vec{M}_Z = \vec{M}_B + \vec{ZB} \times \vec{R} = \vec{M}^R$


Solche Kräftegruppen mit identischer Wirkung heissen ***statisch äquivalent***.

Zwei Kräftegruppen sind genau dann statisch äquivalent, wenn ihre Resultierenden und ihre resultierenden Momente (bezüglich eines beliebigen Punktes *P*) gleich sind.

Statische Äquivalenz

→ Kräftegruppen mit identischer Wirkung → Ruhe → beschleun. → abbremsen

Unterschiedliche Kräftegruppen an einem starren Körper können dieselbe Wirkung haben → $\vec{R}$ und $\vec{M}_B$ bezüglich Punkt B sind gleich!

· damit so prüfen zu welchem Moment oder Kraft Kräftegruppe äquivalent ist!

Zwei Kräfte sind genau dann statisch äquivalent, wenn sie vektoriell gleich sind und ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Nullsystem falls $\vec{R} = \vec{M} = 0$

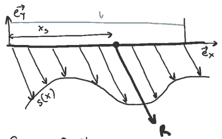
Eine Kräftegruppe ist statisch äquivalent zu

- einem Nullsystem, falls $\vec{R} = \vec{M} = 0$
- einem Moment, falls $\vec{R} = 0$, $\vec{M} \neq 0$
- einer Einzelkraft R, falls $\vec{R} \neq 0$, $I_2 = 0 \rightarrow \vec{M} = 0$ oder $\vec{R} \perp \vec{M}$
- einer Schraube, falls $I_2 \neq 0$ also $\vec{R} \neq 0, \vec{M} \neq 0 \rightarrow \vec{R} \not\perp \vec{M}$

· Ermöglicht stat. äquivalent im allgemeinen

Kräftemittelpunkt

Der Kräftemittelpunkt x_s einer parallelen Kräftegruppe mit Kraftdichte $\vec{s} = s(x)\vec{e}_n$ ist der Angriffspunkt ihrer Resultierenden $\vec{R}$:

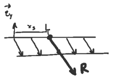


$$x_s = \frac{\int_0^L x\, s(x)\, dx}{\int_0^L s(x)\, dx} = \frac{\int_0^L x\, s(x)\, dx}{R}$$

Sonderfälle

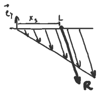
1) Gleichförmige Kräfteverteilung $s(x) = s_0 = \text{konst.}$

Kräftemittel-P.: $x_s = \frac{L}{s}$ / Resultierende: $R = L \cdot s_0$



2) Dreieckverteilung $s(x) = \frac{x}{L} s_0$

Kräftemittel-P.: $x_s = \frac{2L}{3}$ / Resultierende: $R = \frac{L s_0}{2}$



Massenmittelpunkt

→ Kräftemittelpunkt der Gewichtskraft

c: center of mass   r: Abstand $\vec{OC}$

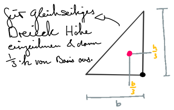
Gesamtmasse m des materiellen Bereichs B:

$$m = \iiint_B dm$$

$$r_c = \frac{1}{m} \iiint_B r\ dm \qquad r_c = \frac{1}{\vec{R}} \sum_{i=1}^{N} F_i r_i \qquad \left(\vec{r}_c = \left|{}^1/_{\vec{R}}\right| \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \times \vec{r}_i \right)$$

Flächenmittelpunkte

Für gleichseitiges Dreieck Höhe einzeichnen & dann $\frac{1}{3} \cdot h$ von Basis aus.

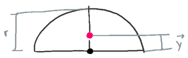


$\vec{x} = \frac{b}{3}$ $\vec{y} = \frac{h}{3}$

$A = \frac{bh}{2}$

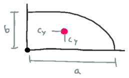
$\vec{x} = \vec{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$A = \frac{\pi r^2}{4}$



$\vec{x} = 0$ $A = \frac{r^2\pi}{2}$

$\vec{y} = \frac{4r}{3\pi}$



$\vec{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $A = \frac{\pi ab}{4}$

$\vec{y} = \frac{4b}{3\pi}$

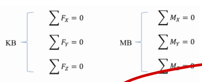
$$X_{s\ ges} = \frac{\sum_i x_{si} \cdot A_i}{A_{ges}}$$

→ Wobei A_i Fläche ist & so auch durch F_i oder M_i oder V_i ersetzt werden kann
↳ gleiche für A_{ges}
$X_s \hat{=} X_c \hat{=}$ entspricht X-Koordinate von C

RUHE & GLEICHGEWICHT

Hauptsatz der Statik

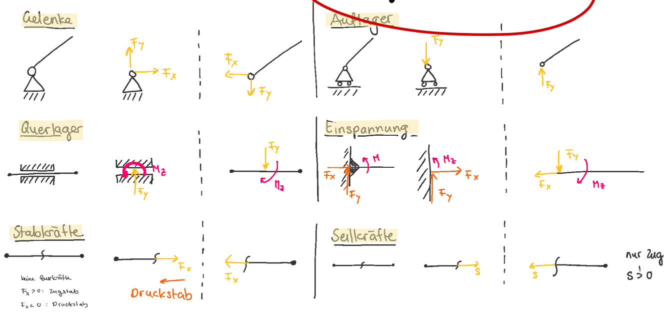
$\vec{R} = 0$, $\vec{M}_0 = 0$ →



$$\text{KB} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \qquad \text{MB} \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

Lagerbindungen & -kräfte

→ mögl. mehr zeichen

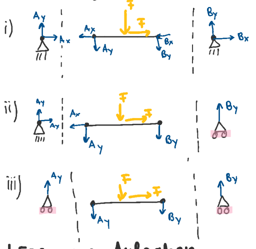


Statische Bestimmtheit

2D: 3 Gleichungen

m: # Gleichgewichtsbedingungen
n: # Bindungen (Unbekannten)

$f = 2k - (r + s)$ — k: Knoten, r: Lager.R., s: Stäbe



→ 4 Unbekannte => statisch unbestimmt
m = 3, n = 4 n > m

→ 3 Unbekannte => statisch bestimmt (→ wenn sich die Lagerkräfte eindeutig bestimmen lassen.)
m = 3, n = 3 n = m

→ 2 Unbekannte => statisch überbestimmt
m = 3, n = 2 n < m
dynamisch

Lösen von Aufgaben

i) System abgrenzen
ii) Koordinatensystem einführen
(Achsen parallel zu Lagerreaktionen)
iii) Lagerreaktionen eintragen
iv) Statische Bestimmtheit prüfen
Falls nötig System trennen
v) Komponentenbedingung

2D: $\sum_i F_{ix} = 0$, $\sum_i F_{iy} = 0$
$\sum M_{(oz)} = 0$

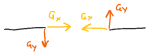
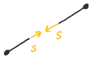
3D: $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
$\vec{M}_P = \sum_i \vec{PA}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$

vi) Auflösen des Gleichungssystems
vii) Diskussion der Ergebnisse
(Abheben, Kippen, Gleiten...)
↳ Macht Resultat intuitiv Sinn

SYSTEMTRENNUNG

Verbindungselemente in Tragwerken übertragen Kräfte und Momente die durch Schnitte in den Elementen sichtbar gemacht werden können. Sie werden gleich gross & entgegengesetzt (opposite & equal) auf gleichen Wirkungslinien an getrennten starren Körpern eingeführt.
Innere Kräfte des Gesamtsystems → äussere Kräfte der abgetrennten Teilsysteme

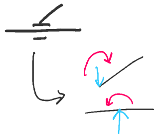
Verbindungselemente

Name	Symbol	Verbindungsreaktion	# Verb. Reaktionen 2D	# Verb. Reaktionen 3D
Gelenk			2	3
Pendelstab, - stütze			1	1

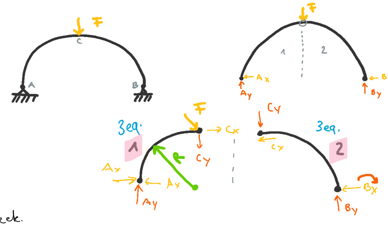
Statische Bestimmtheit im ebenen Fall:

$m + v = 3n$

m: Lagerreaktionen
v: Verbindungsreaktionen
n: # starre Körper



Dreigelenkbogen



6 Gleichungen + 6 Variablen = Lösbar

$\sum_i F_{ix} = 0$
$\sum_i F_{iy} = 0$
$\sum_i M_{iz} = 0$

$A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$

Lösungsweise

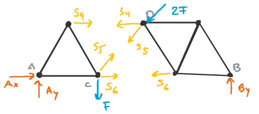
Schritte i) – iv) wie bei Lagerreaktionen
v) Systemtrennung → starre Körper
Verbindungsreaktionen: äussere Kräfte
vi) Aufstellen der Komponenten- & Momentenbedingung für jeden starren Körper
vii) Diskussion

STATISCH BESTIMMTE FACHWERKE

Ideales Fachwerk:
- Alle Knoten sind reibungsfreie Gelenke
- Stäbe gewichtlos
- Knoten befinden sich an Enden von Stäb
- Lasten greifen nur an Knoten an

Dreikräfteschnitt

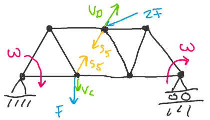
- Lagerkräfte bestimmen
- Stäbe durchschneiden wo 3 unbekannte Stabkräfte wirken Stabkraft Si einführen
- Momentengleichgewicht am Schnittpunkt zweier unbek. Stabkräfte => Berechnung 3. Stabkraft
- Komponentenbedingungen



Prinzip der virtuellen Leistung PdvL

- Stab entfernen → Stabkraft S_i als Zugkraft einführen
- virtuelle Bewegung einführen (—~~~—)
- Bestimmung der Geschwindigkeit in den Knoten, in denen Kräfte wirken
- P = 0, Berechnung Si

Immer nur 1 Stab entfernen!



S > 0 : Zugstab

S < 0 : Druckstab

--> P = - ..... + ...

falls v & F in entgegengesetzte Richtung

falls v & F in gleiche Richtung

=> für v, ω, F & M richtige Vorzeichen gemäss Koordinatensystem verwenden

REIBUNG

- Haftreibungskraft ist der voraussichtlichen Bewegung entgegengesetzt
- H kann bis zu Maximalwert $\mu_0 \cdot N$ erhöht werden, danach setzt sich der Körper beschleunigt in Bewegung
- Reibungskraft $\mu_1 N$ ist konstant und der Bewegung entgegengesetzt
- F_R ist unabhängig von der Auflagefläche
- ein Körper haftet, solange gilt: $|H| \leq \mu_0 |N|$
- Haftreibung ist wie ein Lager zu sehen, dass die Bewegung eines Körpers einschränkt → muss aus Gleichgewichtsbed. bestimmt werden
- Gleitreibung = $\mu_1 \cdot N$

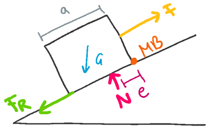
$|F_R| \leq \mu \cdot |F_N|$

↳ ergibt 2 Ungleichheiten!

Lösungsweise - Haftreibung

1) System abgrenzen
2) geeignetes Koordinatensystem einführen
3) Lagerreaktionen eintragen
4) Flächenpaare, die aufeinander gleiten können, identifizieren & Haftreibungskräfte als unbekannte Grössen einführen
5) Gleichgewichtsbedingungen formulieren wie bei normalen Statik Aufgaben
6) H in Haftungsbedingung $|H| \leq \mu_0 N$ einsetzen, Ungleichung auflösen & Wertebereich für H angeben

- Kipp- & Haft-Bedingung!

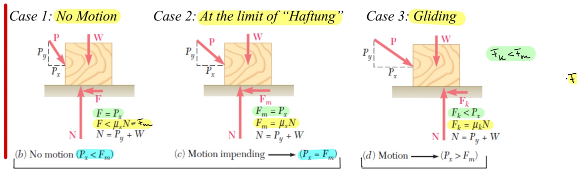


Kippt nicht: $0 \leq e \leq a$

Lösungsweise - Gleitreibung

! Körper in Bewegung → nicht Dynamik

1) System abgrenzen
2) geeignetes Koordinatensystem einführen
3) Lagerreaktionen eintragen
4) Flächenpaare, die aufeinander gleiten können, identifizieren & Gleitreibungskraft als bekannte Grösse $F_r = \mu_1 N$ entgegen der Bewegungsrichtung einführen
5) Gleichgewichtsbedingungen formulieren



friction anything from 0 to F_m

Haftreibungsgesetz $(v_0 = 0)$

$|F| \leq \mu_0 \cdot |N| = |F_m|$

$|F| \leq$ max. Haftreibungskraft

- keine rel. Bewegung zw. Oberfl.

Gleitreibungsgesetz $(v_0 \neq 0)$

$|F| = \mu_1 \cdot |N| = |F_k|$

- rel. Bewegung zw. Oberflächen

BEANSPRUCHUNG

Die Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_c\}$ der Schnittfläche $\{d\vec{F}_i\}$ im Flächenmittelpunkt C des Querschnitts S'_n heisst Beanspruchung des Stabes im Querschnitt S'_n.

Die beiden Vektoren $\vec{R}$ und $\vec{M}_c$ der Beanspruchung werden bezüglich einer passend gewählten Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (Rechtssystem) mit $\vec{e}_1$ in Richtung der äusseren Normalen zur Schnittfläche S'_n zerlegt:

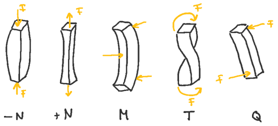
$\vec{R} = N\vec{e}_1 + Q_2\vec{e}_2 + Q_3\vec{e}_3$ $\qquad$ $\vec{M}_C = T\vec{e}_1 + M_2\vec{e}_2 + M_3\vec{e}_3$

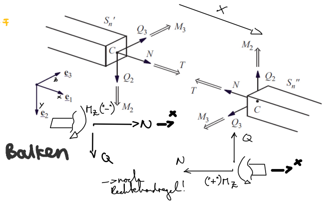
N: Normalkraft (Zug: N > 0, Druck: N < 0)

$Q_{1,2}$: Querkräfte, Beanspruchung auf Schub

T: Torsionsmoment, Beanspruchung auf Torsion

$M_{2,3}$: Biegemomente, Beanspruchung auf Biegung





Beanspruchung in geraden Balken

Vorgehen

i) Lagerkräfte am Gesamtsystem bestimmen

ii) Körper schneiden, Schnittgrössen einführen

iii) Gleichgewichtsbedingungen für das abgegrenzte System aufstellen, Schnittgrössen berechnen, Momentenbedingung bezgl. Schnittpunkt

iv) evtl. Beanspruchungsdiagramm zeichnen

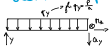
Anzahl Schnitte: Jedes mal schneiden, wenn sich Kraftverteilung auf Körper ändert. Kraft, wo man schneidet, nicht einzeichnen.

q = Verteilungsdichte der Kraft auf den Körper $\left(\frac{F}{a}\right)$

q_y --> Funktion der linien verteilten Kraft

$Q_y + q_y \cdot x = A_y \Rightarrow Q_y = A_y - q_y \cdot x$

$Q'_y = -q_y$!



Differentielle Beziehungen

2D { $Q_y' = -q_y$, $M_z' = -Q_y$,

$Q_z' = -q_z$

$M_y' = Q_z$

$M_z'' = q_y$, $\quad M_z'' = -q_z$

$Q_y = -\int q_y \, dx + C_1$

$M_z = -\int Q_y \, dx + C_2$

} Um Ergebnisse zu verifizieren

Niemals über unstetige Belastungen integrieren!

Bestimmung der Integrationskonstanten:

	Q	M	N
Auflager	Q ≠ 0	M = 0	N = 0
Festlager	Q ≠ 0	M = 0	N ≠ 0
Einspannung	Q ≠ 0	M ≠ 0	N ≠ 0
Freies Ende	Q = 0	M = 0	N = 0
Gelenk	Q ≠ 0	M = 0	N ≠ 0

Haftreibungsgesetz $(v_0 = 0)$

$|F| \leq \mu_0 \cdot |N| = |F_m|$

$|F| \leq$ max. Haftreibungskraft

- F ist Haftreibungskraft, welche je nach angewandter äusserer Kraft P_x grösser od. kleiner ist. $|F| = |P_x|$
- $F_m = |F| = \mu_0 \cdot |N|$ ist die maximale Haftreibungskraft, die möglich ist (gegeben durch μ_0 & N) bevor sich Objekt bewegt.

=> Wenn Objekt still steht ist $|F| \leq \mu_0 \cdot |N|$ mit $|F| = |P_x|$

--> $\mu_0 \geq \frac{|F|}{|N|} = \frac{|P_x|}{|N|}$; besagt, dass, damit System statisch bleibt, der Haftreibungskoeffizient (μ_0) mind. $\frac{|P_x|}{|N|}$ sein muss um ein $|F_m| = \mu_0 \cdot |N|$ zu geben, wobei $|F| \geq |P_x|$ => dann bleibt System statisch

(→ $|F| = |P_x|$)

Gleitreibungsgesetz $(v_0 \neq 0)$

$|F| = \mu_1 \cdot |N| = |F_k|$

F ist Gleitreibungskraft, welche konstant ist, unabhängig von der bewegenden Kraft

$|F| = |F_k| < P_x$

=> $|F_{static\,max.}| > |F_{sliding}|$; $\mu_0 \cdot |N| > \mu_1 |N|$

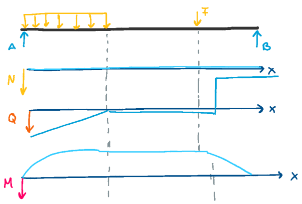
=> $\mu_1 < \mu_0$

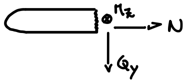
↳ bodies stick together better when not moving / static

--> when moving surfaces don't interlock as much anymore, so friction coefficient (μ) drops!

- Dort wo Q_y linear => M_z quadratisch
- Dort wo Q_y konstant => M_z linear

Beanspruchungsdiagramm



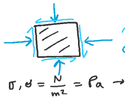


$1 \frac{N}{mm^2} = 1 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$

SPANNUNG / Stress

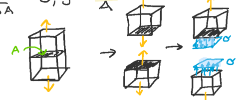
Innere Kräfte sind über die gesamte Querschnittsfläche verteilt.

Spannung = Kraft pro Fläche $\quad \vec{S} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ $\quad \sigma, \tau = \frac{F}{A}$



τ = Schubspannung

σ = Normalspannung



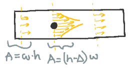
- falls nur vert. Kraft -> nur vert.-hor. Kräfte! (ausser falls Einspannung)

$\sigma, \tau = \frac{N}{m^2} = Pa \rightarrow \frac{N}{mm^2} = MPa$

Wenn die Fläche des belasteten Körpers zunimmt, steigt die Spannung.

Positive Spannung: Dehnung | Negative Spannung: Verkürzung

Wenn ein Körper ein Loch hat, verteilen sich die Kräfte um das Loch. Es ist sehr wahrscheinlich, dass der Körper in der Nähe des Lochs kaputtgeht.



Normalspannung: $\sigma_x = \frac{N}{A}$ $\quad$ Biegespannung: $\sigma_b = -\frac{M_y \cdot d}{I_y}$ → Zugkräfte positiv, Druck negativ

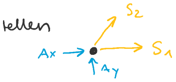
evtl. $-M\frac{y}{I}$

zusammengesetzt:

$\sigma(x) = -\frac{M_b \cdot y_{max}}{I} + \frac{N}{A}$

Knotengleichgewicht

1) evtl. Lagerkräfte bestimmen
2) einzelne Knoten betrachten und Kräfte (der Seile) einzeichnen (Stabkräfte immer als Zugkräfte einführen)
3) Gleichgewichtsbedingungen am Knoten aufstellen
4) nach Unbekannten auflösen

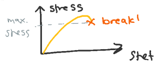


Sicherheitsfaktor

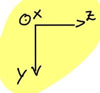
$SF = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{elf}} = x$ → $\sigma_{allowed} = \frac{\sigma_{ultimate}}{SF}$ $\qquad$ $\sigma_{allowed} > \frac{P_{needed\ in\ system}}{Area}$

1) wo wirken welche Kräfte? → freischneiden → GGW aufstellen
2) max. F und σ/τ bestimmen
3) kritische Komponente & dazugehörige Spannung bestimmen

Stress-Stretch-Curve



$\sigma = E \cdot \varepsilon$ (stress; Elastizitätsmodul; Dehnung)



Konvention für Querschnitt

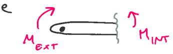
FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENT

Verformungs- & Spannungsberechnungen bei Biege- & Torsionsbeanspruchung. Formelzeichen: I

→ Widerstand eines Balkens gegen Biegung

→ Je grösser I, desto kleiner die Biegung des Balkens / innere Spannungen

→ bezieht sich auf bestimmte Achse



axial stress due to bending of specific distance (y) from neutral axis:

$\sigma_x(y) = -\sigma_{max} \cdot \frac{y}{c}$

$\sigma(y) = \sigma_{max} \cdot \frac{y}{c}$

$I_y = \iint_A z^2 \, dA = \int \sigma_{max} \cdot \frac{y}{c} \, dA_y = \int \frac{\sigma_{max}}{c} y^2 \, dA =$

→ Ability to resist bending

Biegemoment: $M_y = \frac{\sigma \cdot I_z}{y_{max}} = \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 \, dA$ $\qquad$ $\sigma_m = \frac{M \cdot c}{I}$

Wichtig

1. I hängt nur von der Geometrie ab
2. Der Ansatz kann natürlich analog in andere Richtungen gemacht werden
3. Es gilt $\sigma_{tot} = \sigma_{bieg} + \sigma_N$
4. Vorzeichen bei Δy, y_{max} und bei M und bei Kräfte <u>mitnehmen</u>

I: siehe Formulierung auf slides!

-> Resistance to bending that is depending on geometry of body (y)

$I_x = \int y^2 dA$ if moment around y-axis

Normalspannung auch durch Biegemoment:

$\sigma_{bieg} = -\frac{M_x \cdot y}{I_x}$, wobei y-Abstand zur Zentralachse.

- mit $M_{x\,max}$ einsetzen um $\sigma_{bieg\,max}$ zu kriegen.

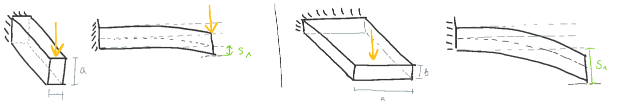
- if M positive Moment "−"
- " " negative " "+"
- so that axial stresses caused by that M have correct Vorzeichen bzgl. x-axis!

} dann M_z/M_x ohne Vorzeichen

=> einf. mit "−" & M_x mit Vorzeichen!

Axiales Flächenträgheitsmoment I_a

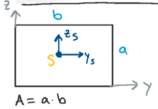
Je grösser I_a, desto kleiner die Spannung & verbiegung. Ausdehnung in Richtung der angreitenden Kraft.



$\sigma_x = \sigma_{x,centric} + \sigma_{x,bending}$ (additiv)

$y_n = \frac{N \cdot I_z}{M_b \cdot A}$

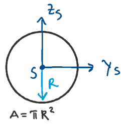
Tabelle für Fradhenträgheitsmomente



$A = a \cdot b$

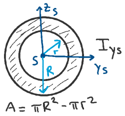
$I_{ys} = \frac{a^3 b}{12}$ $I_y = \frac{a^3 b}{3}$

$I_{zs} = \frac{ab^3}{12}$ $I_z = \frac{ab^3}{3}$



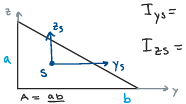
$A = \pi R^2$

$I_{ys} = I_{zs} = \frac{\pi R^4}{4}$



$I_{ys} = I_{zs} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$

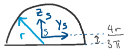
$A = \pi R^2 - \pi r^2$



$A = \frac{ab}{2}$

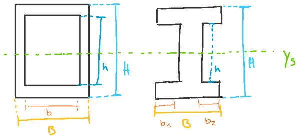
$I_{ys} = \frac{a^3 b}{36}$ $I_y = \frac{a^3 b}{12}$

$I_{zs} = \frac{ab^3}{36}$ $I_z = \frac{ab^3}{12}$



$I_{ys} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$

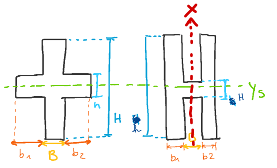
$I_{zs} = \frac{\pi r^4}{8}$



$I_{ys} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $b = b_1 + b_2$

(~~gilt auch für~~

)



$I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$ –> nur für I_y hier, falls I_x Satz von Steiner einbeziehen!

gilt auch für

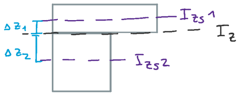
Verschiebungssatz (Satz von Steiner)

erechnungen bezgl. beliebiger Achse, ausgehend von Flächenträgheitsmomenten ~~Bezg~~ bzgl der Achse durch den Schwerpunkt.

$I_y{}' = I_{ys} + (\Delta z)^2 \cdot A$

$I_z{}' = I_{zs} + (\Delta z)^2 \cdot A$

- Abstände der jew. zwei Achsen
- Querschnittsfläche
- Trägheitsm. bezgl. Achse durch Schnittpunkt



STRESS-STRAIN

Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

$\varepsilon = 0{,}5$: Stab hat sich in der Länge um die Hälfte verlängert.

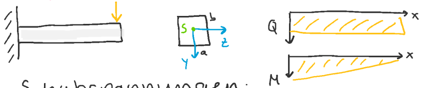
E-Modul: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

E gross: Körper nicht sehr elastisch, eher spröde.
E als Konstante benutzen.

$\Delta l = \frac{N}{A} \cdot \frac{L_0}{E}$

$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

SPANNUNG INFOLGE BIEGUNG



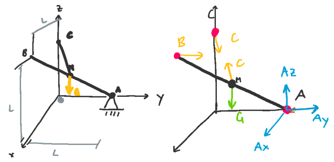
Schubspannungen:

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q \cdot H_z}{I_z \cdot b}$

H_z: Flächenmoment 1. Grades

BEISPIELAUFGABEN

Lagerkräfte



$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \frac{C}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$KB(x)$: $A_x - \frac{C}{\sqrt{3}} = 0$

$KB(y)$: $A_y + B - \frac{C}{\sqrt{3}} = 0$

$KB(z)$: $A_z + \frac{C}{\sqrt{3}} - G = 0$

$MB(A,x)$: $\frac{L}{2} G - LB = 0$

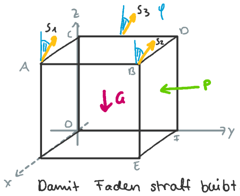
$MB(A,y)$: $\frac{L}{2} G - \frac{LC}{\sqrt{3}} = 0$

$MB(A,z)$: $LB - \frac{LC}{\sqrt{3}} = 0$

$A = \frac{G}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \frac{G}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \frac{G}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Seilkräfte

Gesucht: φ, S_1, S_2, S_3



1. Vektoren für S: $S_1 = S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$, $S_2 = S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$, $S_3 = S_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$
2. Komponentenbed.
3. Momentenbed. um A (Kreuzprodukt $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$)
4. Auflösen nach $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ → $\varphi = \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$
5. Auflösen nach S_1, S_2, S_3

Damit Faden straff bleibt: $S \geq 0$
Faden mit kleinster Kraft ist kritischer Faden

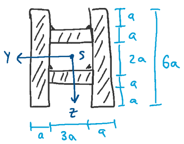
System in GGW

1. Freischneiden
2. GGW-Bedingungen (K&M)
3. Auflösen nach gesuchter Grösse

Wenn Schwerpunkt auch gesucht ist: mit GGW Bedingungen abgleichen, damit diese nicht verletzt werden.

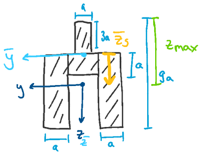
Flächenträgheitsmoment

Wenn Schwerpunkt Körper auf Achse → Steiner Anteil $= 0$



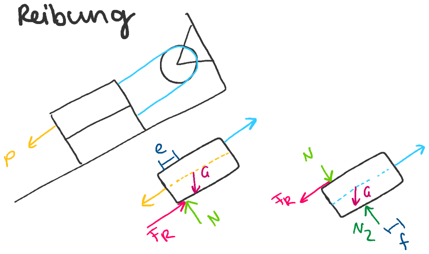
$I_y = 2\left(\frac{a \cdot (6a)^3}{12}\right) + 2\left(\frac{3a\, a^3}{12}\right) + \underbrace{2\left(3aa\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right)}_{\text{Steiner - z}}$

$I_z = 2\left(\frac{a(3a)^3}{12}\right) + 2\left(\frac{6aa^3}{12}\right) + \underbrace{2\left(6aa(2a)^2\right)}_{\text{Steiner - y}}$



Schwerpunkt: $\bar{z}_s \cdot A = \sum_{i=1}^{4} \bar{z}_{si} \cdot A_i$

Reibung

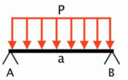


Beanspruchung

- Man kann Resultierende der linienvert. Kraft nehmen, ausser linien vert. Kraft liegt im zu berechnenden Teil des Objekts & man berechnet Beanspruchung!
  => Dann NICHT reduzieren

Beanspruchung bei Linienverteilte Kraft

- 1. Für Lagerkräfte resultierende Benutzen
- 2. Bei Beanspruchung Funktion benutzen
- 3. Um Moment der linienverteilte Kraft zu berechnen, integrieren



- Bei homogen verteilte Kraft, ist jede infinitesimale Kraft = P/a (Resultierende/Länge). Über „a" integriert gibt es die Resultierende Kraft P! (hier $q = \frac{P}{a}$)
- An der Stelle "x" haben wir $\int_0^x \frac{P}{a} dx = \frac{P}{a} * x$
- Als Moment bei „x" haben wir $\int_0^x \frac{P}{a} * x\, dx = \frac{P}{a} * \frac{x^2}{2}$

Allgemein:

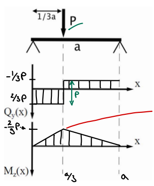
Q = Kraft$= \int_0^x f(x)\, dx$

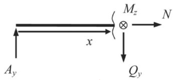
M = Moment$= \int_0^x f(x) * x\, dx$

Wichtig: Bei Kräfte auf Stab → Teilen
↳ nur bei linienvert. Kräften

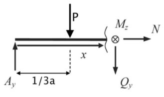
1. Alle Schritte für Abschnitt 1 machen (Ergebnisse sind nur für 0<x<1/3a)
2. Alle Schritte für Abschnitt 2. Erste Teil bleibt, aber Ergebnisse gelten nur für 1/3a<x<a <u>oder</u> nur 2. Abschnitt wird betrachtet und neue Laufvariabel x_2 wird eingeführt

1. Abschnitt:





2. Abschnitt:

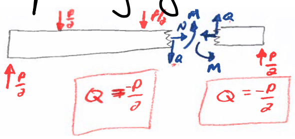


$M_{z_1}\left(x = \frac{a}{3}\right) \overset{!}{=} M_{z_2}\left(x = \frac{a}{3}\right)$
↳ solange kein reiner Moment an diesem Punkt dazu kommt

Max. Moment

- Kandidate: → Man muss alle Kandidaten testen
  - Bei $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ –> Wo Ableitung gleich 0 ist lokales Maximum
    ↳ weil $M_z{}' = Q_y$ ist dort auch $Q_y = 0$!
  - Bei x=0 und x=L
  - Wo Einzelkräfte greifen
  - Am Anfang und am Ende von verteilten Kräfte

Beanspruchung – Freischneiden

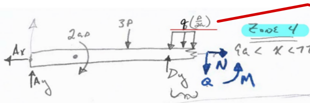


↳ P/2 at the far right is mirrored in Q!

=> all forces & moments to the right of Schnitt are collectively represented by Schnittkräften

=> Man muss die Kräfte ganz am Ende nicht bei Freischnitt dabei haben!
Hier z.B. 3 Schnitte nötig!

Kompliz. Integral von linienvert. Kraft



ZONE 4

$9a < x < 11a$

$\int_{9a}^{x} q \cdot x\, dx$ ↳ immer gleich

Grenzen verändern.

Axial

$KB(x)$

$N = A_x$

$+\uparrow KB(y)$

$A_y - 3P + D_y - q \int_{9a}^{x} dx - Q = 0$

$Q = \underbrace{A_y - 3P + D_y}_{\text{mit "+9aq" der y-Achsenabschnitt des Graphenteils}} - q(x - 9a)$ ↳ lineare Veränderung (Steigung $-q = -\frac{P}{2a}$)

Shear

$\curvearrowleft + MB(z)$
$x=0$

$-2aP - 3P(6a) + D_y(9a) - \int_{9a}^{x} q\, x\, dx + M = 0$

Bending

$M = \underbrace{2aP + 18aP - D_y 9a}_{\text{mit "}-\frac{1}{2}(9a)^2\text{" y-Achsenabschnitt des Graphenteils}} + \frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{2} q (9a)^2$ ↳ quadratische Veränderung