Biomechanik I

Theorieskript zu den Übungen

Jack Kendall
kendallj@student.ethz.ch

Basiert auf der Vorlesung von Prof. J. Snedeker & Prof. E. Mazza
ETH Zürich
10.06.19

Inhalt

1 Vektoren

1.1 Schreibweise

Vektoren werden in der Mechanik nach Konvention nicht mit einem Pfeil, sondern unterstrichen dargestellt.

$$\overrightarrow{v_a} = \begin{pmatrix} v_a x \\ v_a y \\ v_a z \end{pmatrix} = \underline{v}_a$$

Die Länge eines Vektors wird wie üblich mit Betragsstrichen gekennzeichnet:

$$|\underline{v}_a| = \text{Länge bzw. Betrag des Vektors } \underline{v}_a$$

Es kann aber vorkommen, dass mit dem Betrag eines Vektors gerechnet wird, die Betragsstriche aber weggelassen werden. Dass heisst,

$$\text{anstatt } |\underline{v}_a| \text{ wird lediglich } v_a \text{ geschrieben.}$$

Weiter wird auch nicht immer ein Vektor in unterstrichener Form dargestellt. Besondern Gebrauch findet dies zum Beispiel in der 2D Anschauen, z.B. bei einem Fachwerk. Da wir im 2D Raum sind, hat der Winkelgeschwindigkeitsvektor ω nur eine z-Komponente ω_z.

Diese wird dann oft vereinfacht dargestellt als:

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega_z = \omega$$

somit ist dies als abgekürzte Schreibweise zu verstehen. Diese abgekürzte Schreibweise ist zudem insofern korrekt, da in der 2D Betrachtung von einem Fachwerk der Betrag von ω nur die ω_z Kompontente ist:

$$|\underline{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{0 + 0 + \omega_z^2} = \omega_z = \omega$$

Der Übergang zwischen Vektorschreibweise, Betragsstrichen und skalaren Grössen ist fliessend und daher nicht immer konstant und einheitlich in der Mechanik. Zu Beginn kann dies vielleicht zu Schwierigkeiten führen. Falls euch nicht klar ist, ob ein Vektor oder nur dessen Betrag gemeint ist, fragt euren Professor, die Übungsassistenten oder eure Mitstudenten. Dementsprechend empfiehlt es sich wenn möglich immer die Vektorschreibweise zu verwenden, bis genug Verständnis von der Materie vorhanden ist, sodass die abgekürzte Schreibweise ohne Fehler verwendet kann.

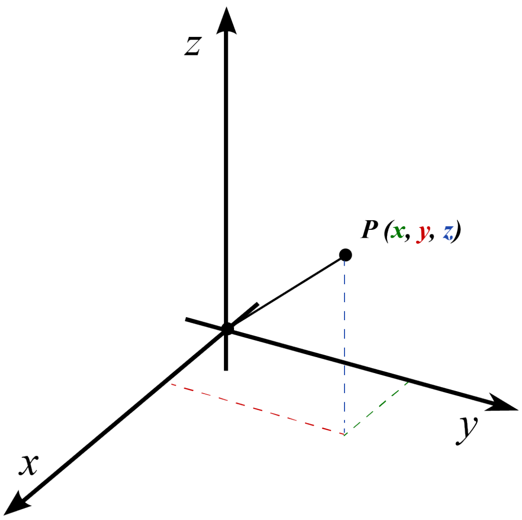
2 Vektoren mit kartesischer Basis

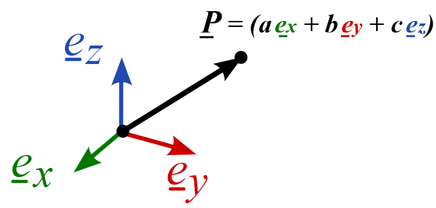
2.1 Einheitsvektoren

Die kartesische Basis besitzt pro Dimension einen Einheitsvektor, d.h. für 3-D gilt

$$\underline{\mathbf{e}}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{e}}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Der Einheitsvektor ist normiert, bedeutet dass Betrag / Länge $|\underline{\mathbf{e}}_x| = 1$ ist.





$$\vec{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}} = a\underline{\mathbf{e}}_x + b\underline{\mathbf{e}}_y + c\underline{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei der Einheitsvektor $\underline{\mathbf{e}}_x$ in X-Richtung zeigt und mit einer Länge a multipliziert wird. Analog mit $\underline{\mathbf{e}}_y$ & b und $\underline{\mathbf{e}}_z$ & c.

2.2 Vektoren aus Koordinatensystem ablesen

In Aufgaben müssen oft Distanzen oder Vektoren zwischen zwei Punkten bestimmt werden (Bsp. Kap. 5.1). Dabei gilt immer Spitze minus Anfang:

$$\underline{\mathbf{AB}} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{P} \tag{3}$$

wobei $\underline{\mathbf{AB}}$ die Verbindungsgerade von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$ und $\underline{\mathbf{OP}}$ vom Ursprung $\mathbf{O}$ zu Punkt $\mathbf{P}$ ist. Bei der Bestimmung von Verbindungsgeraden ist es oft sehr hilfreich, wenn man den Anfangspunkt als Urprung nimmt. So ergibt sich die Gerade als relative Distanz zur Spitze.

2.3 Betrag und Normierung

Die Länge vom Vektor ist gleich dessen Betrag:

$$v = |\underline{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{4}$$

Der normierte Vektor besitzt die Länge 1, behält jedoch die ursprüngliche Richtung:

$$\underline{\mathbf{e}}_v = \frac{\underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{v}}|} \qquad |\underline{\mathbf{e}}_v| = 1 \tag{5}$$

3 Vektoroperationen

3.1 Kreuzprodukt

$$\underline{\mathbf{v}}_a \times \underline{\mathbf{v}}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \underline{c} \tag{6}$$

Sind $\underline{\mathbf{v}}_a$ & $\underline{\mathbf{v}}_b$ parallel oder gleich, dann ist $\underline{\mathbf{v}}_a \times \underline{\mathbf{v}}_b = \underline{0}$

3.2 Skalarprodukt

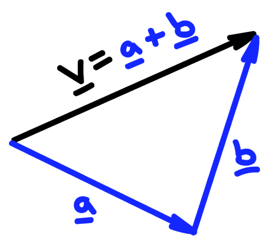
$$\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c \tag{7}$$

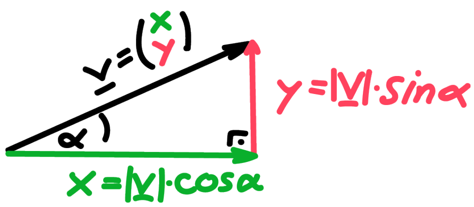
Sind $\underline{\mathbf{v}}_a$ & $\underline{\mathbf{v}}_b$ orthogonal (rechtwinkling/senkrecht) zueinander, dann ist $\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_b = 0$

3.3 Vektoraddition

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Vektoren kann man sowohl zusammenzählen, als auch in einzelne Komponente zerlegen. Später wird diese Zerlegung für die Berechnung von Geschwindigkeiten, Momente und Leistungen sehr nützlich sein:

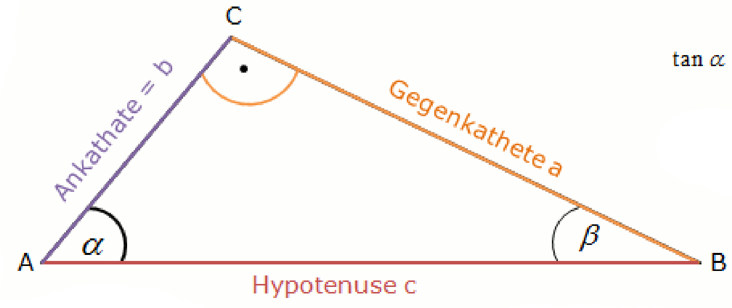




3.4 Vektormultiplikation

$$\lambda \cdot \underline{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \tag{9}$$

4 Trigonometrie



$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse} = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse} = \frac{b}{c} = \sin\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha} = \frac{a}{b} = \cot\beta$$

α	0 / 0°	$\frac{\pi}{6}$ / 30°	$\frac{\pi}{4}$ / 45°	$\frac{\pi}{3}$ / 60°	$\frac{\pi}{2}$ / 90°	π / 180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

5 Kinematik starrer Körper

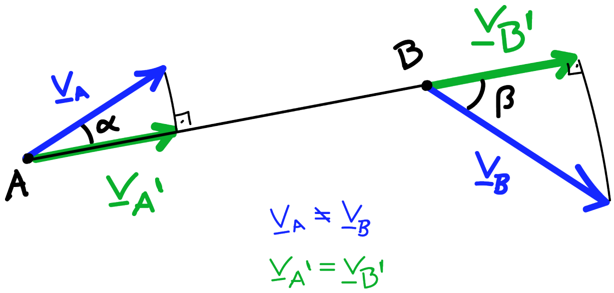
5.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten $\underline{\mathbf{v}}_A, \underline{\mathbf{v}}_B$ zweier beliebiger Punkte A und B eines starren Körpers K weisen zu allen Zeiten gleiche Projektionen $\underline{\mathbf{v}}'_A = \underline{\mathbf{v}}'_B$ in Richtung ihrer Verbindungsgeraden $\underline{\mathbf{AB}}$ auf:

$$\underline{\mathbf{v}}'_A = \underline{\mathbf{v}}'_B \tag{10}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_A \cdot \underline{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{v}}_B \cdot \underline{\mathbf{AB}} \qquad \text{(2D \& 3D)} \tag{11}$$

$$|\underline{\mathbf{v}}_A| \cos\alpha = |\underline{\mathbf{v}}_B| \cos\beta \qquad \text{(2D)} \tag{12}$$

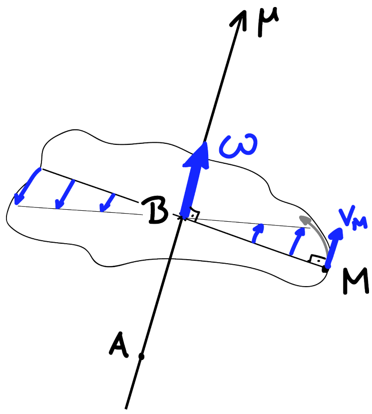


5.2 Translation

Alle Punkte A, B des starren Körpers K haben dieselbe Geschwindigkeit:

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_B, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\mathbf{0}} \tag{13}$$

5.3 Rotation



Auf der Rotationsachse $\underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbf{AB}}$ beträgt $v = 0$. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers lautet:

$$\underline{\mathbf{v}}_M = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{AM}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{BM}} \tag{14}$$

und falls $\underline{\boldsymbol{\omega}} \perp \underline{\mathbf{r}}$ (2D!) gilt:

$$v_M = \omega \cdot |\underline{\mathbf{BM}}| = \omega \cdot r \tag{15}$$

wobei $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ die Rotationsgeschwindigkeit ist:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \omega \underline{\mathbf{e}}_\mu = \omega \frac{\underline{\mathbf{AB}}}{|\underline{\mathbf{AB}}|} \tag{16}$$

und A und B beliebige Punkte auf der Rotationsachse $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ sind.

5.4 Kreiselung

Ein Punkt B des starren Körpers bleibt für alle Zeiten fest. Die Bewegung entspricht einer **momentanen Rotation** (5.3) um eine momentane Rotationsachse μ, wobei $\underline{\mathbf{e}}_\mu$ seine Richtung mit der Zeit verändern kann.

6 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

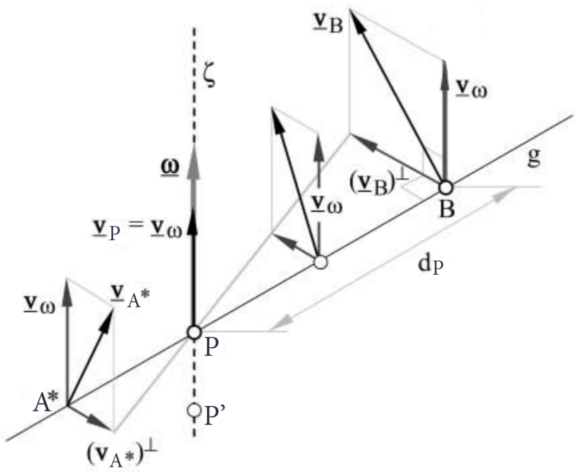
Die Kinemate beschreibt den Bewegungszustand des starren Körpers

$$\{\underline{\mathbf{v}}_A, \underline{\boldsymbol{\omega}}\} \tag{17}$$

Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes (ABBA)

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{BA}} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \tag{18}$$

6.1 Zentralachse



Auf der Zentralachse ζ befinden sich alle Punkte $P(x, y, z)$ mit Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}_\omega$. Der starre Körper rotiert mit Geschwindigkeit $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ um diese Achse.

$$\underline{\mathbf{v}}_P = \underline{\mathbf{v}}_\omega = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{BP}} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - b_x \\ y - b_y \\ z - b_z \end{pmatrix} \tag{19}$$

Parameter Form der Zentralachse $\underline{\boldsymbol{\zeta}}$, wobei λ eine Variable ist:

$$\underline{\boldsymbol{\zeta}} = r(\lambda) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{20}$$

Kochrezept - Zentralachse finden bei reiner Rotation

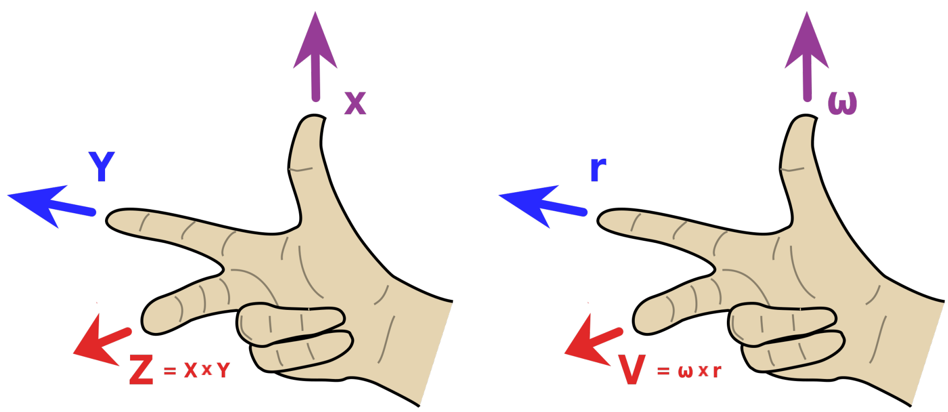
1. Beliebiger Punkt $P(x, y, z) \in \zeta : P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
2. $\underline{\mathbf{v}}_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da reine Rotation
3. Nach $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit allg. Bewegungsgleichung (19) lösen

   $\rightarrow$ für eine Variabel beliebig einen Wert wählen (meistens 0)
4. $\underline{\zeta} = P(x, y, z) + \lambda \underline{\boldsymbol{\omega}}$

6.2 Spezialfälle

- $\underline{\omega} \neq 0, \quad \underline{\mathbf{v}}_\omega \neq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{v}}_A \cdot \underline{\omega} \neq 0 \quad \rightarrow$ **Schraubung** (Translation & Rotation)
- $\underline{\omega} \neq 0, \quad \underline{\mathbf{v}}_\omega = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{v}}_A \cdot \underline{\omega} = 0 \quad \rightarrow$ **reine Rotation!**
- $\underline{\omega} = 0, \quad \underline{\mathbf{v}}_\omega \neq 0 \quad \rightarrow$ **Translation!**
- $\underline{\omega} = 0, \quad \underline{\mathbf{v}}_\omega = 0 \quad \rightarrow$ **Ruhe!**

7 Rechte Hand Regel

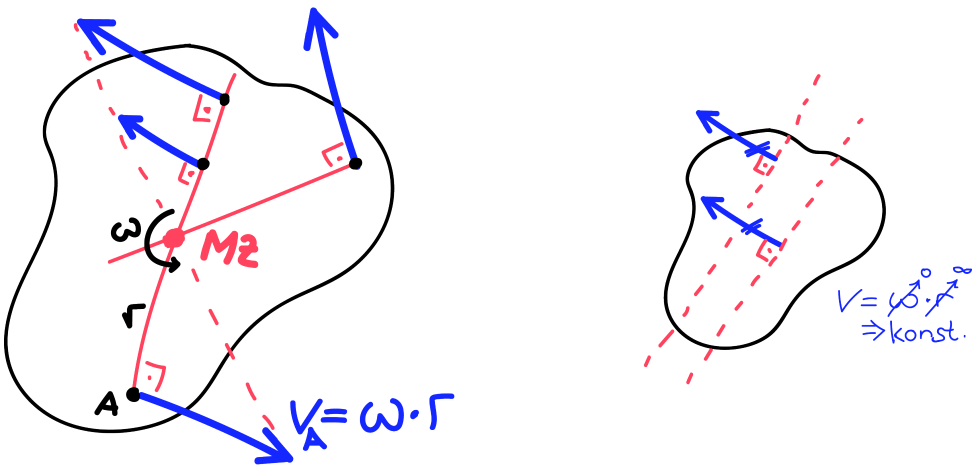


8 Ebene Bewegung

8.1 Momentanzentrum

Die Bewegung in der Ebene wird als momentane Rotation (5.3) um einen Punkt Z beschrieben, dieser Punkt heisst Momentanzentrum (MZ). Die Geschwindigkeit ist ($v_Z = 0$). Die Schnelligkeit v_A eines beliebigen Punktes A lautet:

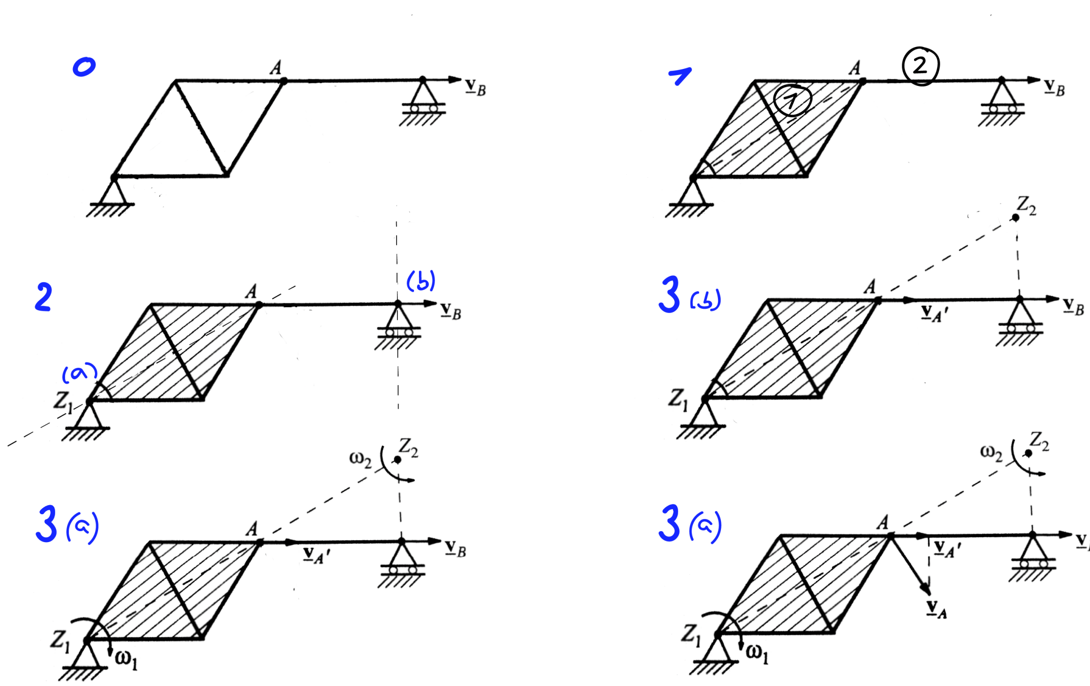
$$v_A = \omega r = \omega \cdot |\underline{\mathbf{ZA}}| \tag{21}$$



Vor allem bei Fachwerken liegt das MZ ausserhalb des Körpers.

Um das Momentanzentrum zu finden, zeichnet man Senkrechte zu mind. zwei Geschwindigkeiten im starren Körper. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist das MZ. Falls zwei Vektoren dieselbe Senkrechte haben, dann muss man die Pfeilspitzen der zwei Vektoren miteinander verbinden. Falls alle Geschwindigkeiten parallel sind, handelt es sich um eine Translation (kein MZ).

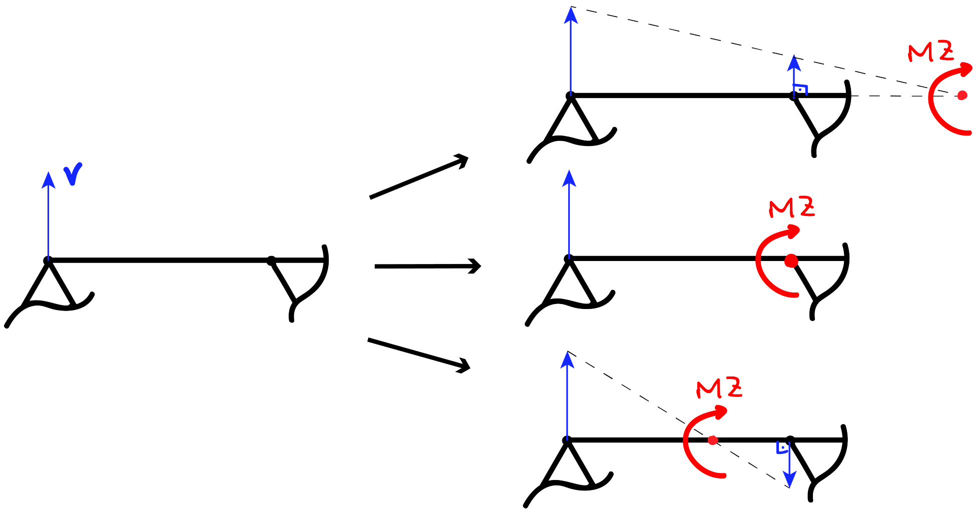
8.2 Ebene Fachwerke



Kochrezept - Fachwerke

1. Identifikation aller starren Körper → Stäbe, Dreiecke, Platten
2. Identifikation der Lagerungen:
   (a) Drehbar → Lager ist Momentanzentrum (Bsp. Z_1)
   (b) Dreh- & Verschiebbar → Richtung von $\underline{\mathbf{v}}$ bekannt (Bsp. $\underline{\mathbf{v}}_B$)
3. ω_i und Z_i für alle beteiligten Körper bestimmen:
   (a) Satz vom Momentanzentrum: $v = \omega r$
   (b) S.d.p.G: $\underline{\mathbf{v}}_A \cdot \underline{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{v}}_B \cdot \underline{\mathbf{AB}}$ oder $|\underline{\mathbf{v}}_A| \cos\alpha = |\underline{\mathbf{v}}_B| \cos\beta$
   (c) Parallelogrammregel (8.3)

Anwendung SdpG bei Fachwerke (Klausur)

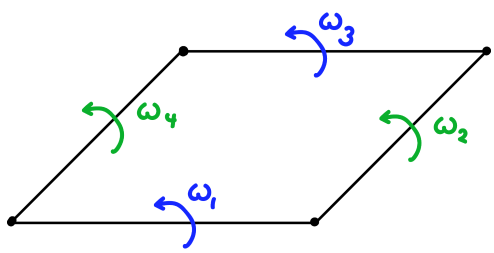


An der Klausur wird meistens SdpG in dieser Form angetroffen: Wenn eine Geschwindigkeit senkrecht zu einem rotierenden Stab steht, dann kann man zwischen drei Fällen unterscheiden. Welcher ist dann richtig? Dazu braucht man weitere Informationen, welche z.B. von der Lagerung oder einer zweiten Geschwindigkeit kommen könnten.

8.3 Parallelogrammregel

Parallele Stäbe im Parallelogramm haben die gleiche Rotations**geschwindigkeit**

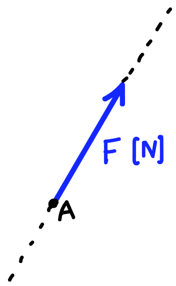
$$\omega_1 = \omega_3, \quad \omega_2 = \omega_4$$



9 Kräfte

Die Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ ist charakterisiert durch:

- ihre Wirkungslinie
- ihre Richtung
- ihren Angriffspunkt A
- ihren Betrag (in Newton)

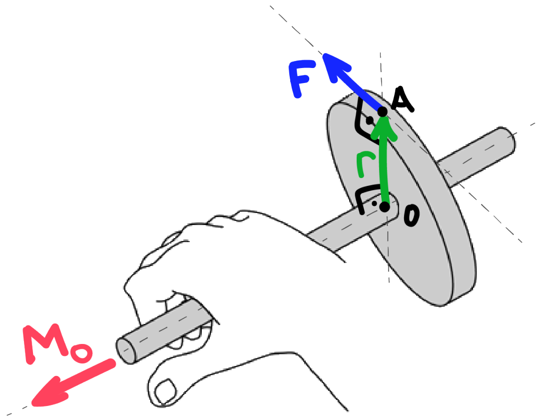


9.1 Resultierende

Die Resultierende einer Kräftegruppe $\{\underline{\mathbf{F}}_i\}$ ist die vektorielle Summe aller Kräfte:

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \tag{22}$$

10 Momente



Das Moment einer Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit Angriffspunkt A bezüglich eines Punktes O lautet:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{\mathbf{OA}} \times \underline{\mathbf{F}} \tag{23}$$

Das Moment mehrer Kräfte $\underline{\mathbf{F}}_1, \underline{\mathbf{F}}_2, ..., \underline{\mathbf{F}}_i$ mit Angriffspunkte $A_1, A_2, ..., A_i$ bezüglich O:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \sum_i \underline{\mathbf{OA}}_i \times \underline{\mathbf{F}}_i \tag{24}$$

und falls $\underline{\mathbf{F}}_i \perp \underline{\mathbf{OA}}_i$ (2D!) gilt:

$$M_O = F_i \cdot |\underline{\mathbf{OA}}_i| = F \cdot r \tag{25}$$

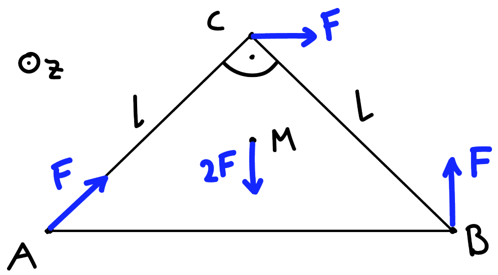
Bemerkung: $\underline{\mathbf{F}}$ darf entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, das Moment $\underline{\mathbf{M}}_O$ ändert sich nicht.

Bei der Wahl eines beliebigen anderen Bezugspunkts P:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{PO}} \times \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{OP}} \tag{26}$$

wobei $\underline{\mathbf{R}}$ die Resultierende der Kräftegruppe ist. (errinert an allg. Bewegung)

10.1 Beispiel I



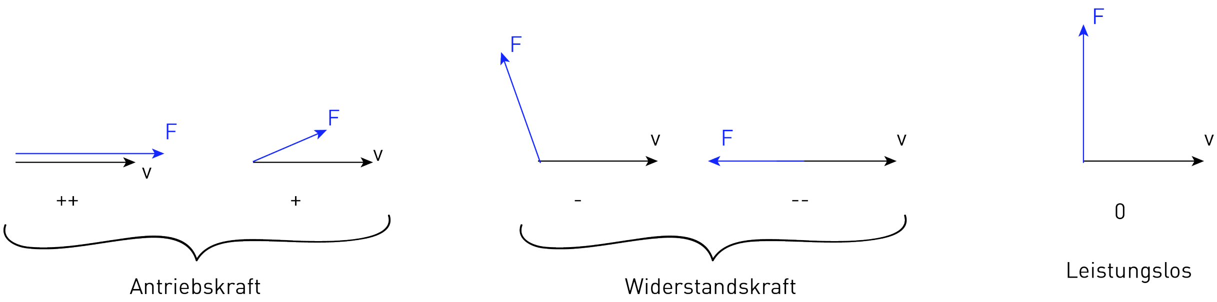
Berechne das Moment in A, B & C. **Lösung:** $M_A = -\frac{\sqrt{2}}{2} lF \, , M_B = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) lF \, , M_C = \frac{\sqrt{2}}{2} lF$

11 Leistung

Die Leistung $\mathbf{P}$ einer Einzelkraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit dem Angriffspunkt A ist gleich dem Skalarprodukt:

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_A \tag{27}$$

wobei $\underline{\mathbf{v}}_A$ die Geschwindigkeit des Punktes A ist.



Die Leistung eines Momentes $\underline{\mathbf{M}}_O$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Momentes mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{M}}_O \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{28}$$

Die Leistung einer Kräftegruppe:

$$P = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\mathbf{v}}_O \cdot \underline{\mathbf{R}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_O \tag{29}$$

wobei $\underline{\mathbf{R}}$ Resultierende der Kräftegruppe und $\underline{\mathbf{M}}_O$ das Moment der Kräftegruppe bezüglich O.

12 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

12.1 Statische Äquivalenz

Zwei Kräftegruppen sind statisch äquivalent, wenn ihre Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ und ihr Moment $\underline{\mathbf{M}}_P$ bezüglich eines beliebigen Punktes P gleich sind.

12.2 Dyname

Eine Kräftegruppe kann immer auf die Dyname reduziert werden. Die Dyname in Punkt P setzt sich aus der Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ (Gl. 22) und dem Moment $\underline{\mathbf{M}}_P$ (Gl. 26) zusammen: $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}_P\}$

12.3 Reduktion einer Kräftegruppe

Die zwei **Invarianten** $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}^{(R)}\}$ der Kräftegruppe sind:

1. Invariante:
$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \tag{30}$$

2. Invariante:
$$\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B \quad (= \underline{\mathbf{M}}^{(R)}) \tag{31}$$

Für die **Reduktion der Kräftegruppe auf eine Einzelkraft $\underline{\mathbf{R}}$:** Nur dann möglich, wenn die zweite Invariante $\underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ verschwindet und $\underline{\mathbf{R}} \neq 0$:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(R)} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B = 0, \text{ für alle Bezugspunkte B ist} \quad \underline{\mathbf{R}} \perp \underline{\mathbf{M}}_B$$

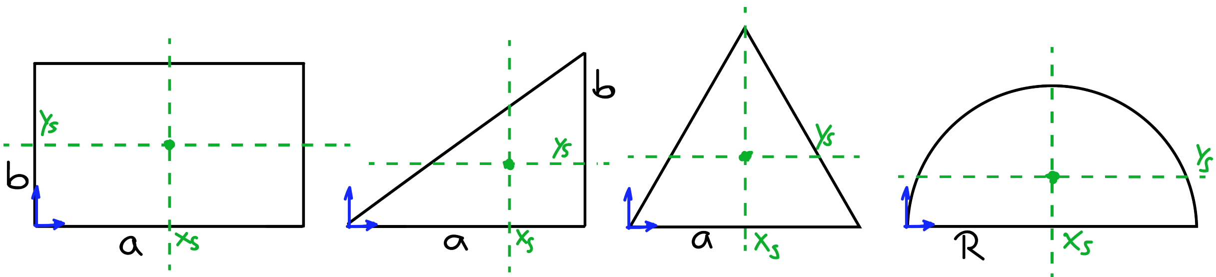
12.4 Transformationssatz ABBA

Seien A & B beliebige Punkte eines Körpers. $\underline{\mathbf{M}}_B$ ist bekannt, jedoch will man $\underline{\mathbf{M}}_A$ bestimmen:

$$\underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{M}}_B + \underline{\mathbf{AB}} \times \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}_B + \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{BA}} \tag{32}$$

Diese Gleichung 12.4 ist genau gleich wie die Gleichung 26.

13 Schwerpunkt von Flächen



$x_s = \frac{a}{2}$ $\quad$ $y_s = \frac{b}{2}$ $\quad$ $A = ab$

$x_s = \frac{2}{3}a$ $\quad$ $y_s = \frac{1}{3}b$ $\quad$ $A = \frac{ab}{2}$

$x_s = \frac{a}{2}$ $\quad$ $y_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3}a$ $\quad$ $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$x_s = R$ $\quad$ $y_s = \frac{4R}{3\pi}$ $\quad$ $A = \frac{\pi R^2}{2}$

- Bei Schwerpunktproblemen kann man die meisten Flächen in kleinere, bekannte Flächen aufteilen.
- Grundsätzlich sollte man die Symmetrie der Figur zu nutze machen. Hier hilft Intuition - im Schwerpunkt kann man den ganzen Körper problemlos balanzieren, da dort die Gewichtskraft angreift.
- Die Neutralachsen (Grün) teilen den Körper jeweils in gleich grosse Stücke.
- Um dann den Schwerpunkt der Gesamtfläche zu erhalten, muss man summieren und zwar:

$$x_{s,ges} = \frac{\sum_i x_{s,i} \cdot A_i}{A_{ges}} \qquad y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} \cdot A_i}{A_{ges}} \tag{33}$$

14 Hauptsatz der Statik

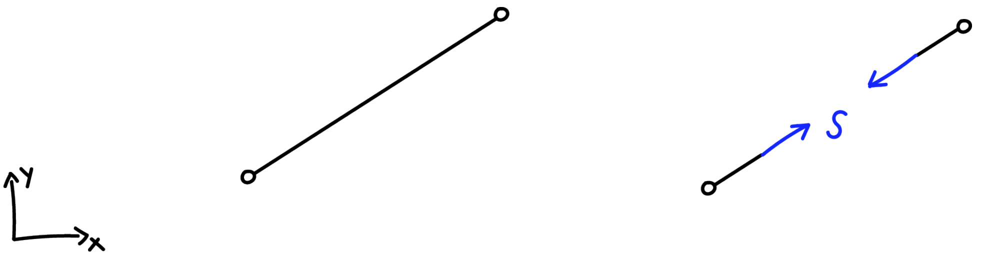
In einer Ruhelage eines Systems müssen alle äusseren Kräfte und Momente im Gleichgewicht (GGW) sein:

$$\sum_i \underline{\mathbf{F}}_i = 0 \qquad \sum_i \underline{\mathbf{M}}_i = 0 \tag{34}$$

So lassen sich die meisten Lagerkräfte und -momente bestimmen. So kann man auch überprüfen, ob das system ein Nullsystem ist.

15 Pendelstützen

Eine Pendelstütze ist ein gerader Stab, der an beiden Enden gelenkig gelagert ist und nur Druck- & Zugkräfte aufnehmen kann. Diese Eigenschaft ist fast immer nützlich, wenn mehr Unbekannte als Gleichungen gegeben sind.



$\mathbf{S} > 0$: Zugkraft, Abb. 15 $\mathbf{S} < 0$: Druckkraft

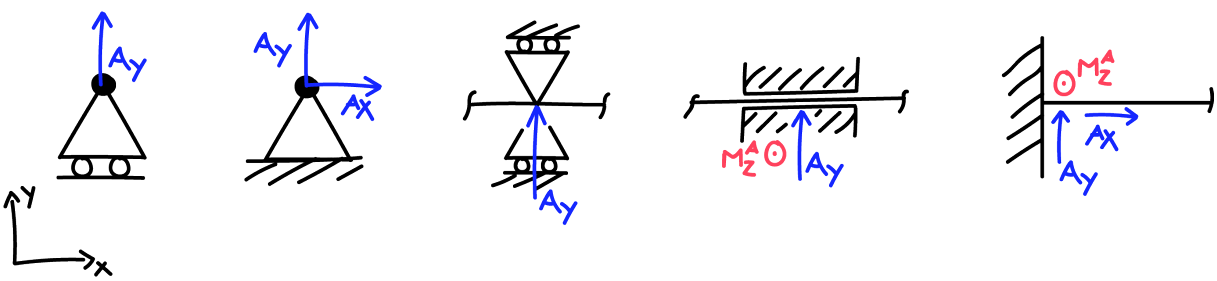
Wobei **S** eine Kraft in Stabrichtung ist.

16 Lager

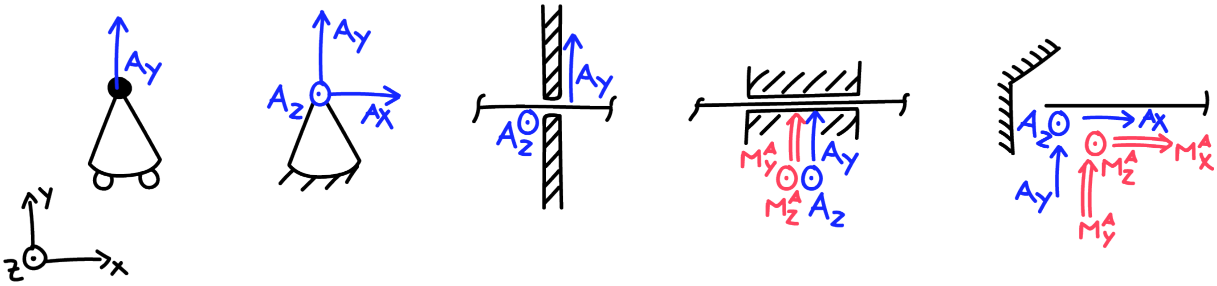
Der Typ des Lagers entscheidet, wie viele Lagerreaktionen einzuführen sind.

16.1 2D

ACHTUNG: Diese Darstellung entspricht **keinem** Freischnitt und soll nur zeigen, welche Lagerreaktionen zu erwarten sind.



16.2 3D

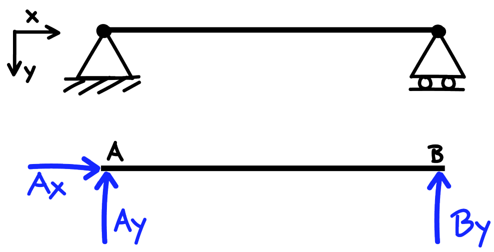


Auflager, Festlager, kurzes & langes Querlager, Einspannung

17 Statische Bestimmtheit

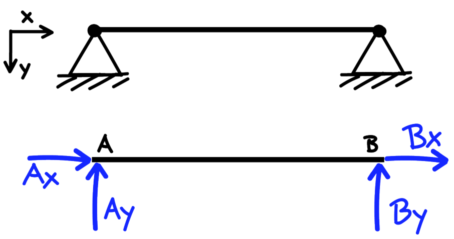
m : # GGW-Bedingungen (3D → 6, 2D → 3) **n** : # Lagerreaktionen

Statisch Bestimmt



$m = 3, n = 3$ $n = m$ → Problem ist **statisch bestimmt**

$(n - m)$-fach Statisch Unbestimmt

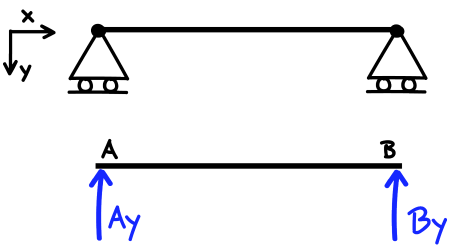


$m = 3, n = 4$

$n > m$

→ Problem 1-fach statisch **unbestimmt**

Statisch Überbestimmt

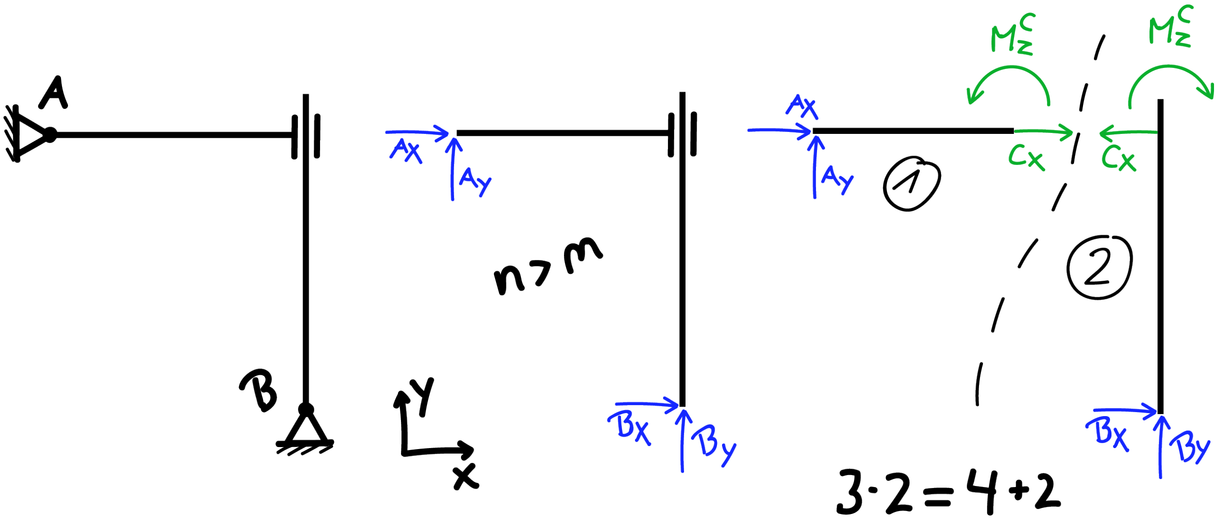


$m = 3, n = 2$

$n < m$

→ Problem statisch **überbestimmt**

18 Kochrezept zur Lösung von Aufgaben der Statik



Kochrezept - Statik

1. System abgrenzen & geeignetes Koordinatensystem einführen
2. Freischneiden: Lagerreaktionen einführen!
3. Statische Bestimmtheit: $m \lesseqqgtr n$, wobei m = #GGW-Bedingungen & n = #LR
4. Falls $n > m \rightarrow$ Systemtrennung

$$\left.\begin{array}{l}\text{\# Verbindungsreaktionen = v} \\ \text{\# starre Körper = k}\end{array}\right\} m \cdot k = n + v \text{ (lin. abhängig?)}$$

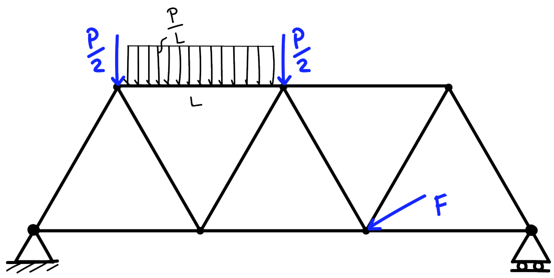
5. Linienverteilte Kräfte reduzieren
6. GGW aller Kräfte & Momente

$$\sum \underline{F} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \sum \underline{M} \stackrel{!}{=} 0$$

7. Diskussion der Ergebnisse $\rightarrow$ Abheben, Gleiten, Kippen

19 Ideale Fachwerke

- Alle Knoten sind reibungsfreie Gelenke.
- Die Stäbe sind gewichtslos.
- Alle Knoten befinden sich am Ende von Stäben.
- Alle Lasten greifen nur an den Knoten an.
- **Pendelstützen**



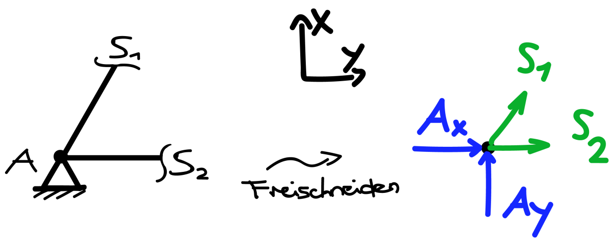
20 Bestimmung der Stabskräfte bei idealen Fachwerken

20.1 Knotengleichgewicht

Kochrezept - Knotengleichgewicht

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Knoten freischneiden; Stabskräfte als Zugkräfte einführen!
3. GGW → lösen nach S_1 & S_2
4. $S > 0$: Zugkraft

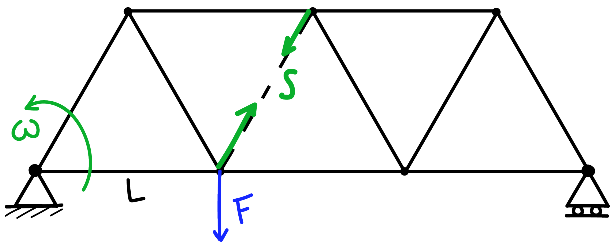
   $S < 0$: Druckkraft



20.2 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

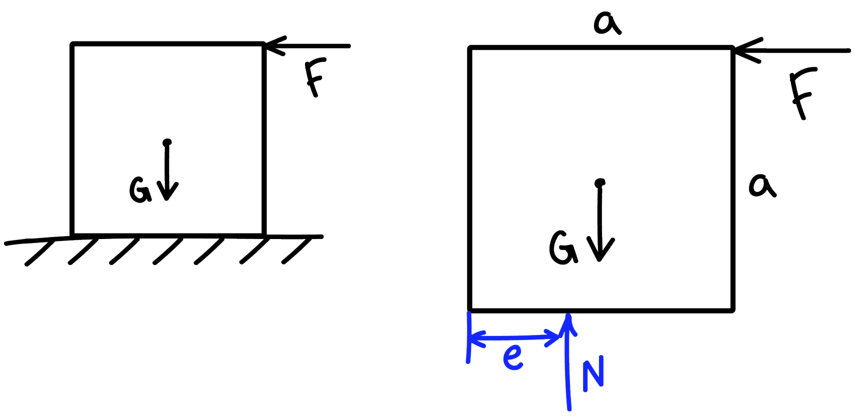
Kochrezept - PdvL

1. Stab entfernen & als Zugkraft einführen (Lagerkräfte muss man nicht berücksichtigen)
2. Virtuellen Bewegungszustand ω einführen
3. Schnelligkeiten in Richtung der Kräfte in den Angriffspunkten besitmmen
   & Leistung berechnen
   $$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}}$$
4. Nach **S** auflösen
   $$\mathbf{P}_{tot} = \sum_i \mathbf{P}_i \stackrel{!}{=} 0$$
5. $S > 0$: Zugkraft
   $S < 0$: Druckkraft



21 Standfestigkeit

Ein Körper bleibt standfest, solange die Gleichgewichtsbedingungen eine resultierende Normalkraft N liefern, die innerhalb der Standfläche angreift und gegen den Körper gerichtet ist.

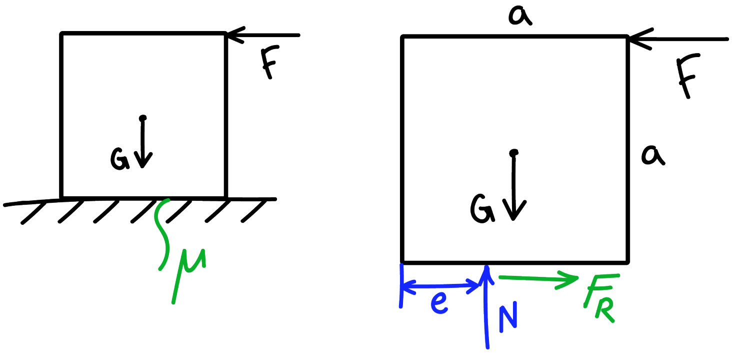


Bei diesem Würfel und allgemein sind die Bedingungen für Standfestigkeit:

$$0 < e < a \qquad \text{und} \qquad N > 0$$

22 Reibung

Bisher wurde angenommen, dass Körper glatte Oberflächen haben und somit bei Berührung nur Normalkräfte übertragen werden. In Realität treten jedoch Reibungskräfte auf. Je nach Oberflächenbeschaffenheit braucht mehr oder weniger Kraft ein Objekt über eine Oberfläche zu stossen.



Der Reibungskoeffizient μ beschteibt das verhältnis zwischen Normalkraft und Reibungskraft:

$$|\underline{\mathbf{F}}_R| \leqslant \mu \cdot |\underline{\mathbf{N}}| \tag{35}$$

Die Reibungskraft darf also nie grösser als die Normalkraft sein.

22.1 Haftreibung vs. Gleitreibung

Haftreibung

$$|\underline{\mathbf{F}}_{R0}| \leqslant \mu_0 \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$$

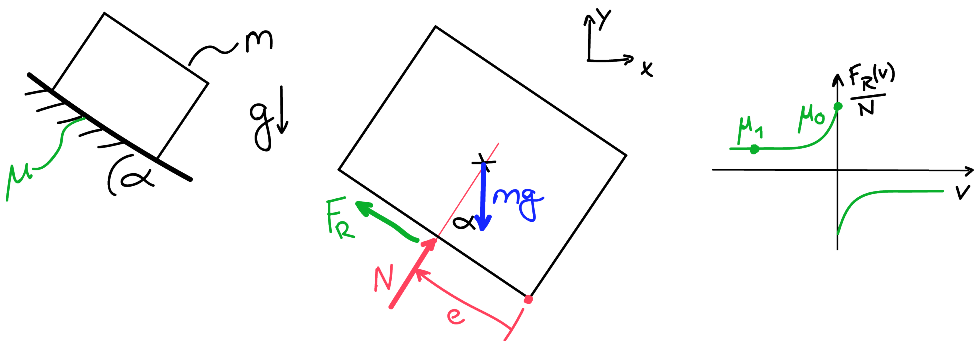
- Für Ruhe, muss $\mathbf{F}_{R0}$ kleiner als $\mu_0 \cdot \mathbf{N}$ sein
- $\mathbf{F}_{R0}$ aus GGW-Bedingungen bestimmen
- Wird $\mathbf{F}_{R0}$ bis zu $\mu_0 \cdot \mathbf{N}$ erhöht, tritt ein momentaner BZ ein → Gleitreibung

Gleitreibung

$$|\underline{\mathbf{F}}_{R1}| = \mu_1 \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$$

- $\mathbf{F}_{R1}$ ist konstant &

  der Bewegung entgegengesetzt
- Gleitreibung direkt gleich $\mu_1 \cdot \mathbf{N}$ (keine GGW-Bed.)



Die Wirkungslinie von $\underline{\mathbf{N}}$ muss nicht durch den Mittelpunkt des Körpers zeigen.

22.2 Ruhe

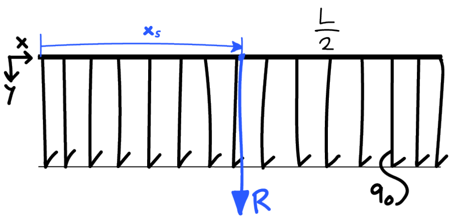
Kochrezept - Ruhe (kein rutschen oder kippen)

1. System abgrenzen
2. Freischneiden & Lagerreaktionen einführen
3. Flächenpaare, die aufeinander gleiten, identifizieren und...
   (a) ...Reibungskraft $\underline{\mathbf{F}}_R$ in entgegengesetzter Bewegungsrichtung und...
   (b) ...Normalkraft $\underline{\mathbf{N}}$ senkrecht zur Auflagefläche mit Abstand **e** zum Bezugspunkt...

   ...einführen.
4. Gleichgewichtsbedingung aufstellen
5. *Haftbedingung:* $|\underline{\mathbf{F}}_R| \leqslant \boldsymbol{\mu} \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$, (ACHTUNG: $|\underline{\mathbf{F}}_R| = \boldsymbol{\mu} \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$ ist FALSCH)
6. *Kippbedingung:* $0 \leq \mathbf{e} \leq a \rightarrow$ 2 Bedingungen für Kippen!

23 Reduktion und Kräftemittelpunkt von linienverteilten Kräften

Gleichförmige Kräfteverteilung

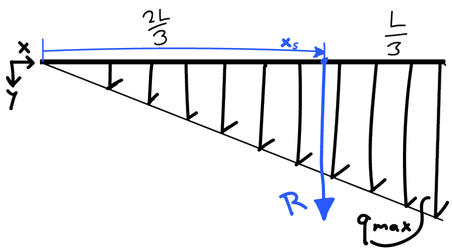


$q(x) = q_0 = konstant$

$\rightarrow$ Kräftemittelpunkt: $x_s = \frac{L}{2}$

$\rightarrow$ Resultierende: $R = L \cdot q_0$

Dreieckverteilung



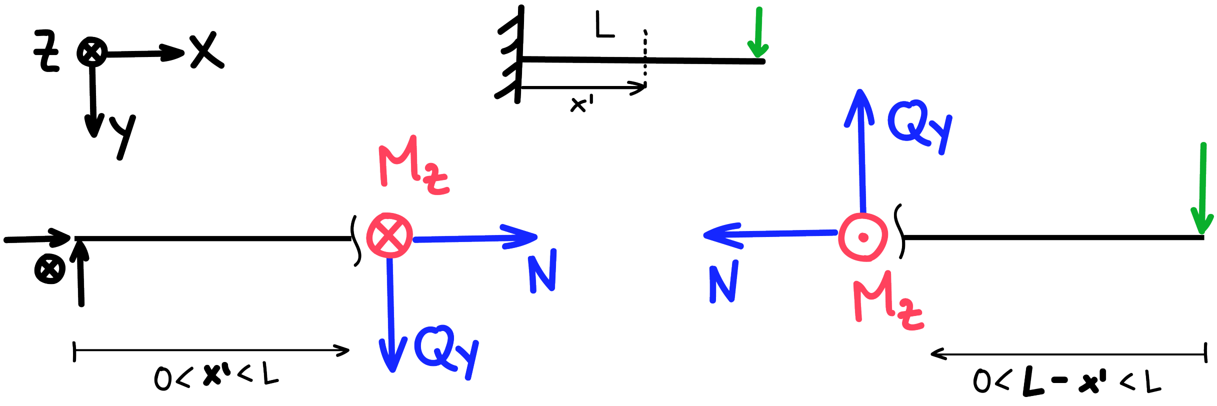
$q(x) = \frac{x}{L} q_{max}$

$\rightarrow$ Kräftemittelpunkt: $x_s = \frac{2L}{3}$

$\rightarrow$ Resultierende: $R = \frac{L}{2} q_{max}$

24 Beanspruchung

Wie man Systeme freischneiden kann, so kann man auch Körper "freischneiden" bzw. beanspruchen, um die Auswirkung einer äusseren Belastung auf das Innere zu untersuchen:



In $2D$ gilt es nur $\underline{\mathbf{N}}$, $\underline{\mathbf{Q}}_y$ & $\underline{\mathbf{M}}_z$ einzuführen.

Kochrezept - Beanspruchung

1. System abgrenzen & freischneiden

(2. Lagerreaktionen am Gesamtsystem bestimmen)

3. Körper schneiden: Laufvariable & Schnittkräfte einführen *Unstetigkeiten beachten!*

4. GGW-Bedingungen für abgegrenztes System aufstellen

   Schnittkräfte anhand Konvention oder Diff. Beziehungen berechnen

   Momentenbedingung in Abhängigkeit von Laufvariable

(5. Beanspruchungsdiagramme)

24.1 Differentielle Beziehungen

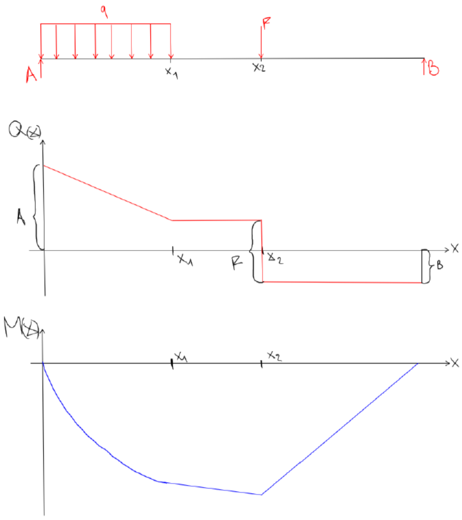
Differentielle Beziehungen stellen Beziehungen zwischen Querkraft bzw. Moment und Belastung zwischen zwei Unstetigkeiten dar. **Koordinaten nach Konvention (Kap. 24) & Niemals über Unsteigkeiten / unstetige Belastungen integrieren!**

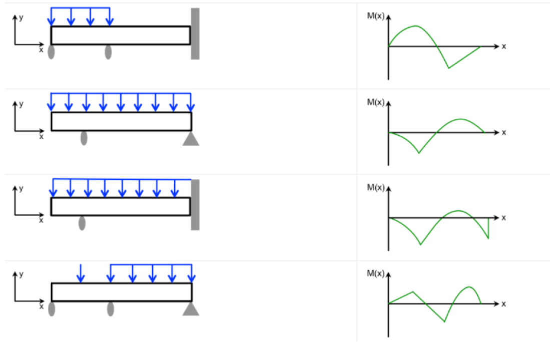
$$\begin{aligned} Q_y^{'} &= -q_y \\ M_z^{'} &= -Q_y \\ M_z^{''} &= +q_y \end{aligned} \tag{36}$$

Berechnung der Querkräfte und Biegemomente:

$$Q_y = -\int q_y dx + C_1 \qquad M_z = -\int Q_y dx + C_2 \tag{37}$$

24.2 Beanspruchungsdiagramme



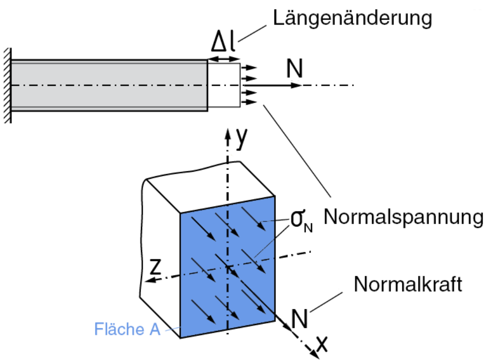


25 Spannungen

Eine Spannung σ ist eine Kraft F über eine Fläche A verteilt. Wir benutzen die Einheit $MPa = \frac{N}{mm^2}$

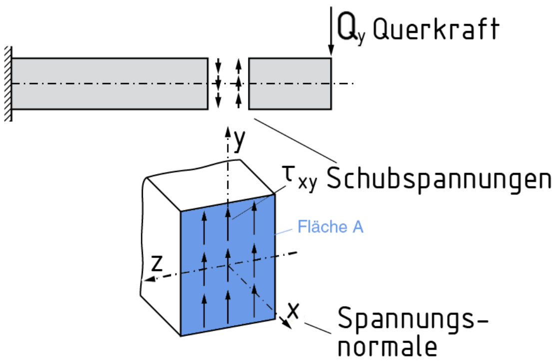
$\sigma > 0 \rightarrow$ Zug $\qquad\qquad$ $\sigma < 0 \rightarrow$ Druck

25.1 Normalspannung



$$\sigma_n = \frac{|\mathbf{F}|}{A} = \frac{N}{A} \tag{38}$$

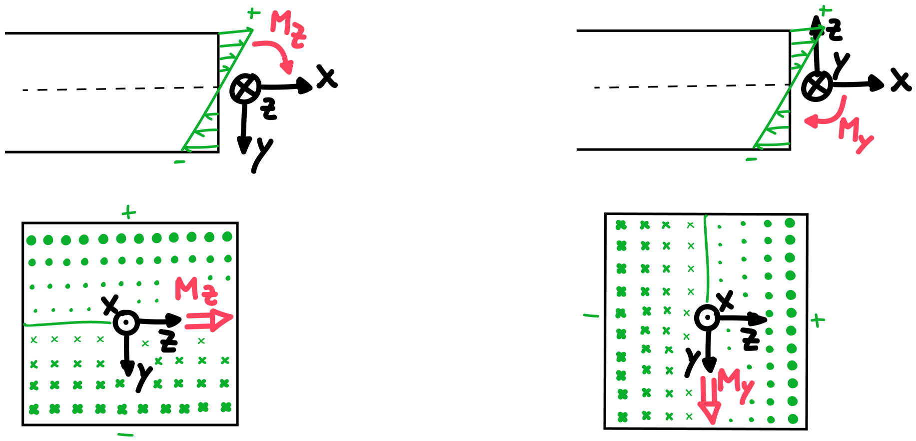
25.2 Schubspannung



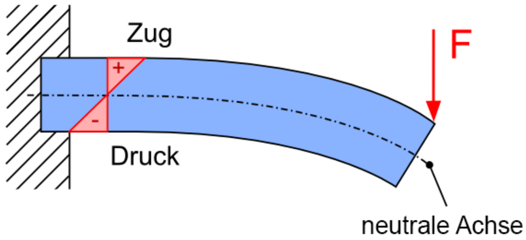
$$\tau_y = \frac{|\mathbf{F}|}{A} = \frac{Q_y}{A} \tag{39}$$

25.3 Biegespannung

$$\sigma_B = -\frac{M_Z \cdot (\Delta y)}{I_Z} \qquad\qquad \sigma_B = \frac{M_Y \cdot (\Delta z)}{I_Y} \tag{40}$$



Die Vorzeichen für die Biegespannungsformeln werden in Abhängigkeit der Koordinatenrichtungen bestimmt (siehe Abbildung). Bedeutet: im linken Balken auf der oberen Querschnitthälfte tritt durch das Biegemoment M_Z eine Zugspannung ($\sigma_B > 0$) auf. Da wir uns jedoch bei $-y$ befinden, müssen wir noch ein Minus in die Formel nehmen, sodass σ_B bleibt. Im rechten Balken müssen wir nichts tun.
Auf der Mittelachse ($y = z = 0$) ist die Biegespannung Null $\sigma_B(0) = -\frac{M_B}{I} \cdot 0 = 0$ und aussen am Rand am höchsten.



25.3.1 Maximale Biegespannung

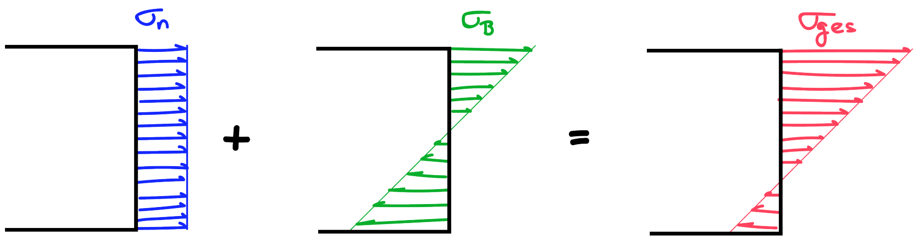
Um die maximale Biegespannung zu berechnen, muss man zuerst das maximale Biegemoment bestimmen - dies folgt aus der Beanspruchung beziehungsweise aus dem Biegemomentdiagramm. Dann muss der maximale Abstand von der Neutralachse (Biegeachse) im Querschnitt bestimmt werden. Der Querschnitt soll dann ein möglichst kleines Flächenträgheitsmoment haben. Die Formel sieht wie folgt aus:

$$\sigma_{B,max} = -\frac{M_{Z,max} \cdot (\Delta y_{max})}{I_{Z,min}}$$

25.4 Superposition

Spannungen kann man anhand der Superposition einfach miteinander addieren:

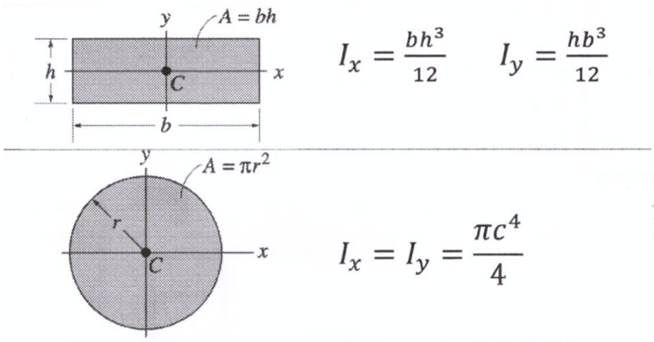
$$\sigma_n + \sigma_B = \sigma_{ges} \tag{41}$$



25.5 Flächenträgheitsmoment

Kochrezept - Flächenträgheitsmoment

1. Über welche Achse wird gebogen? Wenn M_B in Z-Richtung zeigt $\rightarrow I_z$
2. Schwerpunkt der gesamten Fläche bestimmen und Neutralachsen* durch diesen ziehen
3. Träger in einfache Flächen (Quadrate) zerlegen
4. I_z (oder I_y) und A für jede Teilfläche berechnen
   (a) liegt Schwerpunkt von Teilfläche auf z-Achse* $\rightarrow I_z$
   (b) liegt Schwerpunkt nicht auf z-Achse* $\rightarrow$ Steiner: $I_{z_{ges}} = I_z + (\Delta y)^2 \cdot A$
5. alle I_y (oder I_z) summieren



25.6 Verschiebungssatz (Satz von Steiner)

$$I_{z_{ges}} = I_z + (\Delta y)^2 \cdot A \tag{42}$$

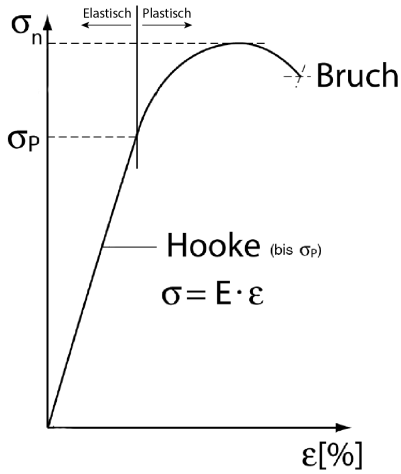
$$I_{y_{ges}} = I_y + (\Delta z)^2 \cdot A \tag{43}$$

wobei A die Fläche, Δz & Δy der Abstand des Schwerpunkts zur entsprechenden Achse* und I_z & I_y das Flächenträgheitsmoment (aus Tabelle) ist.

25.7 Sicherheitsfaktor

$$SF = \frac{\text{kritische Last}}{\text{zulässige Last}} = \frac{F_{max}}{F_{zul}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{zul}} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{zul}} = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{zul}} \geq 1 \tag{44}$$

26 Verformung



26.1 Hook'sche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{45}$$

wobei E [GPa] das Elastizitätsmodul (E-Modul) und ε [%] die Dehnung ist.

26.2 Dehnung

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{u}{l_0} \tag{46}$$

wobei Δl oder u die Längenänderung, l die Endlänge und l_0 die Anfangslänge ist.

26.3 Längenänderung

$$\begin{aligned} \sigma &= E \cdot \varepsilon \\ \frac{N}{A} &= E \frac{\Delta l}{l_0} \\ u = \Delta l &= \frac{l_0 N}{EA} \end{aligned} \tag{47}$$

hier ist A die Querschnittsfläche auf welcher eine Normalkraft N wirkt.