

Übungsheft zu Mechanik I und II

Für die Studiengänge Bauingenieurwissenschaften und
Maschinenbau und Verfahrenstechnik

Udo Lang • Bernard Masserey • István A. Veres

Institut für Mechanische Systeme - Zentrum für Mechanik
ETH Zürich
CH-8092 Zürich

September 2011

Vorwort-Ausgabe PDF FS21

Um den stetig ändernden Bedingungen gerecht zu werden, hat das IMES vom D-MAVT entschieden die PDF Version von diesem Skript herauszugeben. Hierzu ist folgendes zu beachten:

- Das Skript ist ausschliesslich für Studierende der ETH.
- Dieses Skript dient als zusätzliches Material und ist keinen Ersatz für die Vorlesung.
- Das Skript kann Fehler enthalten und wird laufend überarbeitet. Deswegen wird das Skript ohne Gewähr auf Korrektheit und Vollständigkeit zur Verfügung gestellt.
- Dank geht an die ursprünglichen Autoren: Udo Lang, Bernard Masserey & István A . Veres

Zürich, Februar 2021

Vorwort

Für viele Studenten stellt die Mechanik eines der schwierigeren Fächer der Basisprüfung dar. Auch wir als Assistenten bekommen die Probleme halbjährlich beim Korrigieren der Prüfungen zu sehen.

Neben dem grundlegenden Verständnis der Zusammenhänge gibt es nur noch ein Hilfsmittel, um die Mechanik erfolgreich zu bestehen: Üben, Üben, Üben!

Hierzu wird vom Institut sowohl eine Sammlung mit Musterlösungen zu Aufgaben im Buch als auch ein Jahrgang früherer Klausuren abgegeben. Des Weiteren werden Schnellübungen und während des Semesters eine tägliche Präsenzstunde angeboten. Ausserdem können im Buchhandel von verschiedenen Autoren Übungsbände erstanden werden. Dennoch entstand bei uns die Überlegung, ein etwas anders konzipiertes Übungsskript zu erstellen. Es sollte zum einen eng an die Vorlesungen hier an der ETH angelehnt sein, gleichzeitig aber einen Zusatznutzen für Studenten bieten.

Unser Konzept war daher, jedes Kapitel zweigeteilt zu gestalten: am Anfang eine kurze, kompakte Wiederholung des Stoffes, so wie er in etwa im Kolloquium präsentiert wird, danach etwa ein bis zwei typische Aufgaben mit ausführlichem Lösungsweg, der auf häufige Probleme eingeht, aber auch mögliche Lösungsalternativen darstellt.

Mit dieser Beschreibung wird aber klar: das Übungsskript ersetzt in keinster Weise die Arbeit mit dem vorlesungsbegleitenden Buch noch den aktiven Besuch von Vorlesung, Übungen oder Präsenzstunden.

Insgesamt hoffen wir, mit diesem Skript eine Lücke geschlossen zu haben und Studenten eine weitere Hilfe zum erfolgreichen Bestehen der Prüfungen in die Hand gegeben zu haben.

Abschliessend möchten wir uns noch bei Herrn Prof. Dual für die Unterstützung und die Ermöglichung dieses Projektes bedanken. Unserer besonderer Dank gilt auch Herrn Thomas Gyger für die sorgfältige und motivierte Erstellung des Skripts in LaTeX sowie die Geduld bei unseren zahlreichen, sich teilweise widersprechenden und nicht immer auch sinnvoll erscheinenden Änderungswünschen. Ebenso möchten wir uns bei Frank May, Jürg Bryner, Sandro Dinser und Eveline Mattle für ihren Einsatz beim Korrekturlesen bedanken.

Zu guter Letzt müssen wir aber auch einräumen, dass selbst bei grösster Sorgfalt solch ein Projekt nicht fehlerfrei sein kann. Daher möchten wir alle Leser bitten, uns allfällige Fehler an folgende E-Mail-Adresse zu melden: mech-m1@imes.mavt.ethz.ch

Zürich, August 2006

Udo Lang, Bernard Masserey, István A. Veres

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Goldene Regeln zum Lösen von Aufgaben	xi
1 Bewegung und Geschwindigkeit eines materiellen Punktes	1
1.1 Ortsvektor und Geschwindigkeit	1
1.2 Kartesische Koordinaten	1
1.3 Zylindrische Koordinaten	2
1.4 Sphärische Koordinaten	3
1.5 Kreisbewegung	5
1.6 Aufgabe	5
1.7 Verständnisfragen	8
2 Zur Kinematik starrer Körper	9
2.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten	9
2.2 Translation	9
2.3 Rotation	10
2.4 Kreiselung	10
2.5 Allgemeine Bewegung des starren Körpers	11
2.5.1 Bewegungszustand	11
2.5.2 Zentralachse	11
2.5.3 Spezialfälle	12
2.6 Ebene Bewegung	13
2.6.1 Momentanzentrum	13
2.6.2 Polbahnen	14
2.6.3 Ebene Fachwerke	15
2.7 Zur Lösung von Aufgaben in der Kinematik	16
2.8 Aufgaben	17
2.9 Verständnisfragen	23
3 Kräfte und Momente	25
3.1 Kräfte	25
3.1.1 Reaktionsprinzip	25
3.1.2 Kontakt- oder Fernkräfte	25
3.1.3 Innere oder äussere Kräfte	26
3.1.4 Resultierende einer Kräftegruppe	27
3.2 Moment	27

3.3	Leistung	28
3.4	Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen	29
3.4.1	Statische Äquivalenz	29
3.4.2	Reduktion einer Kräftegruppe	29
3.4.3	Sonderfälle	30
3.5	Kräftemittelpunkt bei linienverteilten Kräften	30
3.5.1	Allgemein	30
3.5.2	Sonderfälle	31
3.6	Aufgaben	31
3.7	Verständnisfragen	36
4	Ruhe und Gleichgewicht	37
4.1	Hauptsatz der Statik	37
4.2	Standfestigkeit	37
4.3	Lagerbindungen und Lagerkräfte	38
4.3.1	Auflager (reibungsfrei)	38
4.3.2	Gelenke (reibungsfrei)	38
4.3.3	Kurzes Querlager (reibungsfrei)	38
4.3.4	Langes Querlager (reibungsfrei)	39
4.3.5	Längslager (reibungsfrei)	39
4.3.6	Einspannung	39
4.4	Statische Bestimmtheit	40
4.5	Zur Lösung von Aufgaben der Statik	40
4.6	Aufgaben	42
4.7	Verständnisfragen	46
5	Systemtrennung	47
5.1	Einführung	47
5.2	Wichtige Verbindungselemente	47
5.3	Dreigelenkbogen	48
5.4	Lösungsweise von Aufgaben zur Systemtrennung	49
5.5	Aufgabe	50
5.6	Verständnisfragen	52
6	Statisch bestimmte Fachwerke	53
6.1	Ideale Fachwerke	53
6.2	Pendelstütze (vgl. Kap. 5)	53
6.3	Bestimmung der Stabkräfte bei einem idealen Fachwerk	54
6.3.1	Knotengleichgewicht	54
6.3.2	Dreikräfteschnitt (Rittersches Schnittverfahren)	55
6.3.3	Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistung (PdvL)	56
6.4	Aufgaben	56
6.5	Verständnisfragen	65

7	Reibung	67
7.1	Grundlagen	67
7.2	Lösungsweise von Aufgaben mit Reibung	68
7.3	Seilstatik	69
7.4	Weitere Reibungsarten	70
7.5	Aufgaben	72
7.6	Verständnisfragen	77
8	Beanspruchung	79
8.1	Allgemeiner Fall von Schnittgrößen	79
8.2	Beanspruchung in geraden Balken	80
8.2.1	Vorgehen	80
8.2.2	Differentielle Beziehungen	80
8.3	Beanspruchung in gekrümmten Balken	81
8.4	Anmerkung zu differentiellen Beziehungen	81
8.5	Aufgaben	83
8.6	Verständnisfragen	98
9	Spannungen	99
9.1	Definition	99
9.2	Spannungstensor	100
9.3	Anwendungen des Mohrschen Kreises	101
9.4	Aufgaben	102
9.5	Verständnisfragen	111
10	Verzerrungen	113
10.1	Herleitung	113
10.2	Zusammenhang zwischen Verschiebungsfeld und Deformationen für den ebenen Fall	115
10.3	Verzerrungstensor	115
10.4	Aufgaben	116
10.5	Verständnisfragen	120
11	Stoffgesetze für isotrope Materialien	121
11.1	Zugversuch	121
11.2	Torsionsversuch	122
11.3	Veranschaulichung der durch Normal- und Schubspannungen hervorgerufenen Deformationen	123
11.4	Temperaturdehnungen	124
11.5	Mehrachsige Spannungszustände	124
11.6	Aufgaben	126
11.7	Verständnisfragen	130
12	Zug und Druck	131
12.1	Herleitung	131
12.2	Aufgaben	132
12.3	Verständnisfragen	135

13 Flächenmoment zweiten Grades	137
13.1 Herleitung	137
13.2 Tabelle für Flächenträgheitsmomente	139
13.3 Aufgaben	141
13.4 Verständnisfragen	145
14 Spezielle Biegung	147
14.1 Verständnisfragen	151
15 Methode der finiten Elemente	153
15.1 Herleitung	153
15.2 Aufgaben	157
15.3 Verständnisfragen	162
16 Schiefe Biegung	163
16.1 Verständnisfragen	165
17 Schubspannungen infolge Biegung	167
17.1 Verständnisfragen	173
18 Torsion	175
18.1 Verständnisfragen	177
19 Zusammengesetzte Beanspruchung	179
19.1 Verständnisfragen	184
20 Deformationsenergie und Energieverfahren	185
20.1 Arbeit	185
20.2 Deformationsenergie	186
20.2.1 Linear elastische Feder	186
20.2.2 Deformationsenergie bei Zug und Druck	186
20.2.3 Deformationsenergie bei Biegung	186
20.2.4 Deformationsenergie bei Torsion	187
20.2.5 Zusammengesetzte Beanspruchung	187
20.3 Die Arbeitsgleichungen	187
20.3.1 Statisch bestimmte Probleme	187
20.3.2 Statisch unbestimmte Probleme	188
20.4 Der Satz von Castigliano	188
20.4.1 Statisch bestimmte Probleme	188
20.4.2 Statisch unbestimmte Probleme	189
20.5 Aufgaben	189
20.6 Verständnisfragen	202
21 Knickung	203
21.1 Stabilitätsprobleme	203
21.2 Balken unter Druck	203
21.3 Aufgaben	204
21.4 Verständnisfragen	208

A	Einführung in die Vektoralgebra im \mathbb{R}^3	209
A.1	Skalare und Vektoren	209
A.2	Skalarprodukt und Vektorprodukt	210
A.3	Beispiele aus der Kinematik	211
A.3.1	Ebene Bewegung	212
A.3.2	Bewegung im Raum	214
A.4	Aufgaben	215
A.5	Resultate der Aufgaben	215
B	Geraden- und Ebenengleichungen	217
B.1	Darstellungsformen einer Funktion	217
B.1.1	Analytische Darstellung	217
B.1.2	Parametrische Darstellung	217
B.2	Gleichungen für die Gerade im Raum	217
B.2.1	Allgemeiner Fall	218
B.2.2	Gleichung einer Geraden durch einen Punkt und parallel zum Richtungsvektor	218
B.2.3	Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte	219
B.3	Gleichungen einer Ebene	219
B.3.1	Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und parallel zu zwei Geraden	220
B.3.2	Gleichung einer Ebene durch drei Punkte	221
B.3.3	Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und senkrecht zu einer Geraden	221
B.4	Beispiel aus der Mechanik	222
B.4.1	Bestimmung der Zentralachse	222
C	Lineare Algebra	225
C.1	Matrizen	225
C.1.1	Definition einer reellen Matrix	225
C.1.2	Transponierte einer Matrix	225
C.2	Rechenoperationen für Matrizen	226
C.2.1	Addition und Subtraktion	226
C.2.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	226
C.2.3	Multiplikation von Matrizen	227
C.3	Inverse einer Matrix	227
C.3.1	Determinanten	227
C.3.2	Rang einer Matrix	228
C.3.3	Inverse Matrix	229
C.4	Eigenwertproblem	229
C.5	Beispiel aus der Elastizität	230
	Literaturverzeichnis	233
	Index	234

Goldene Regeln zum Lösen von Aufgaben

Ablauf:

- Verständnis
- Lösungsskizze
- Lösung
- Kontrolle

Beachte:

1. Gilt immer: sauber und sorgfältig arbeiten!
2. Aufgabe genau durchlesen, gegebene und gesuchte Grössen identifizieren und hinschreiben!
3. Lösungsstrategie überlegen, kein wildes Drauflos-Rechnen! Überlegen, zu welchem Teilgebiet der Mechanik diese Aufgabe gehört und mit welchen Verfahren sie gelöst werden könnte!
4. Grosszügige Skizze anfertigen; nach Möglichkeit farbig!
5. Bei einem Freikörperdiagramm auf die Vollständigkeit aller Kräfte und Momente achten!
6. Formulieren der Gleichungen mit Hilfe der unter 3. gemachten Überlegungen! In allgemeiner Form aufschreiben und mit kurzen Stichworten versehen! Kontrolle: Anzahl Unbekannte=Anzahl Gleichungen?
7. Ergebnisse auf Plausibilität prüfen! Insbesondere Einheiten kontrollieren!

Kapitel 1

Bewegung und Geschwindigkeit eines materiellen Punktes

1.1 Ortsvektor und Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit \underline{v} ist die zeitliche Ableitung des Ortsvektors \underline{r} :

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} \quad (1.1)$$

Die Geschwindigkeit ist tangential an die Bahnkurve:

$$\underline{v} = \dot{s} \cdot \underline{\tau} \quad (1.2)$$

wobei \dot{s} Schnelligkeit und $\underline{\tau}$ tangentialer Einheitsvektor sind:

$$\dot{s} = |\underline{v}| = v \quad (1.3)$$

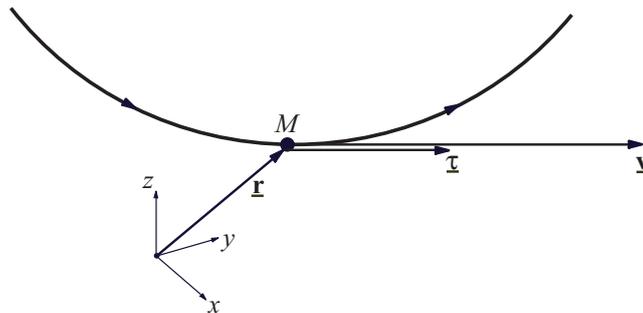


Abbildung 1.1: Ortsvektor und Geschwindigkeit

1.2 Kartesische Koordinaten

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Lage des materiellen Punktes M zur Zeit t durch drei Abstände $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ eindeutig definiert:

$$M(x(t), y(t), z(t))$$

Die Zerlegung des Ortsvektors $\underline{\mathbf{r}}$ von M zur Zeit t ergibt:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = x(t) \underline{\mathbf{e}}_x + y(t) \underline{\mathbf{e}}_y + z(t) \underline{\mathbf{e}}_z \quad (1.4)$$

wobei die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_x$, $\underline{\mathbf{e}}_y$, $\underline{\mathbf{e}}_z$ konstant ist. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}$ sind:

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{x} \underline{\mathbf{e}}_x + \dot{y} \underline{\mathbf{e}}_y + \dot{z} \underline{\mathbf{e}}_z \quad (1.5)$$

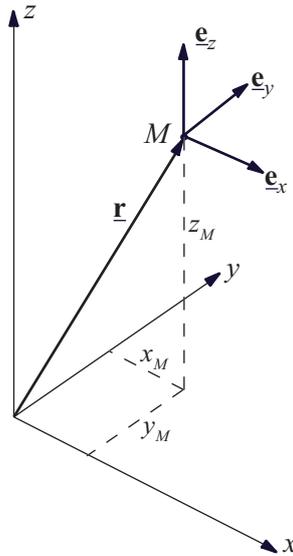


Abbildung 1.2: Kartesische Koordinaten

1.3 Zylindrische Koordinaten

In einem zylindrischen Koordinatensystem ist die Lage des materiellen Punktes M zur Zeit t durch zwei Abstände $\rho(t)$, $z(t)$ und einen Winkel $\varphi(t)$ definiert, wobei $\rho(t) \geq 0$:

$$M(\rho(t), \varphi(t), z(t))$$

Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}$ von M zur Zeit t ist:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \rho(t) \underline{\mathbf{e}}_\rho + z(t) \underline{\mathbf{e}}_z \quad (1.6)$$

wobei die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_z$ konstant ist, während die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_\rho(\varphi(t))$ von der Lage abhängig ist. Der Winkel φ steht implizit in der Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_\rho$. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}$ sind:

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{\rho} \underline{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z} \underline{\mathbf{e}}_z \quad (1.7)$$

Transformation von zylindrischen in kartesische Koordinaten und umgekehrt:

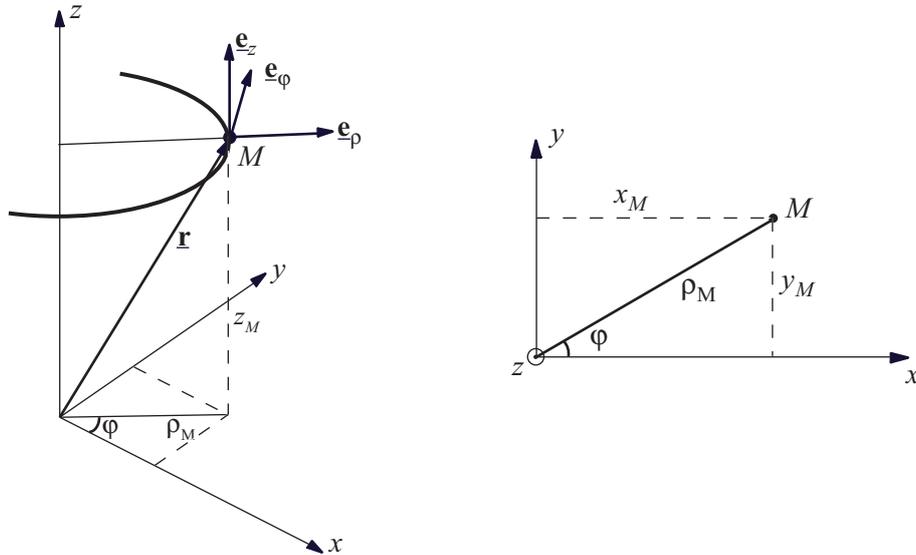


Abbildung 1.3: Zylindrische Koordinaten

- zylindrisch $(\rho, \varphi, z) \longrightarrow$ kartesisch (x, y, z)

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.8)$$

- kartesisch $(x, y, z) \longrightarrow$ zylindrisch (ρ, φ, z)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \rho^2 &\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Pythagoras}) \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} &\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.4 Sphärische Koordinaten

In einem sphärischen Koordinatensystem ist die Lage des materiellen Punktes M zur Zeit t durch einen Abstand $r(t)$ und zwei Winkel $\theta(t)$ und $\psi(t)$ definiert, wobei $r(t) \geq 0$ (siehe Abb. 1.4):

$$M(r(t), \theta(t), \psi(t))$$

Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}$ von M zur Zeit t ist:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = r(t) \underline{\mathbf{e}}_r(t) \quad (1.10)$$

wobei die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_r(\theta(t), \psi(t))$ von der Lage abhängig ist. Die Winkel θ und ψ stehen implizit in der Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_r$. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}$ sind:

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{r} \underline{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \underline{\mathbf{e}}_\theta + r \sin(\theta) \dot{\psi} \underline{\mathbf{e}}_\psi \quad (1.11)$$

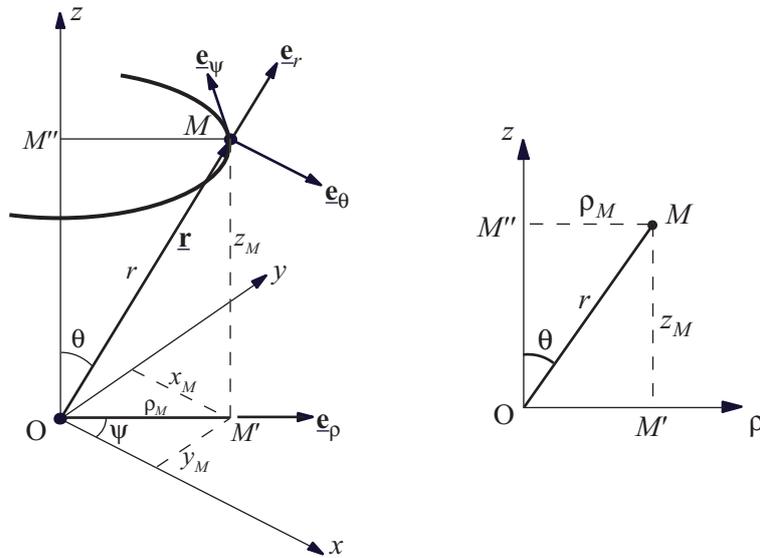


Abbildung 1.4: Sphärische Koordinaten

Transformation von sphärischen in zylindrische Koordinaten und umgekehrt:
 Die Winkel φ und ψ bei zylindrischen bzw. sphärischen Koordinaten sind identisch. Für die Herleitung der anderen Beziehungen wird die ρ - z -Ebene betrachtet (siehe Abb. 1.4)

- sphärisch $(r, \theta, \psi) \Rightarrow$ zylindrisch (ρ, φ, z)

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \theta \\ \varphi &= \psi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{1.12}$$

- zylindrisch $(\rho, \varphi, z) \Rightarrow$ sphärisch (r, θ, ψ)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\rho}{z} \\ \psi &= \varphi \end{aligned} \tag{1.13}$$

Transformation von sphärischen in kartesische Koordinaten und umgekehrt:

- sphärisch $(r, \theta, \psi) \Rightarrow$ kartesisch (x, y, z)

Beim Einsetzen von (1.12) in (1.8) erhält man:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \psi \\ y &= \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \psi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \tag{1.14}$$

- kartesisch $(x, y, z) \Rightarrow$ sphärisch (r, θ, ψ)

(1.9) wird in (1.13) eingesetzt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \psi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.5 Kreisbewegung

Betrachten wir eine Bewegung des Punktes M in zylindrischen Koordinaten. Falls $z(t) = z_0 = \textit{konst.}$ und $\rho(t) = \rho_0 = \textit{konst.}$, ist die Bewegung eine Kreisbewegung, deren Winkelgeschwindigkeit parallel zu \underline{e}_z ist:

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z = \dot{\varphi} \underline{e}_z \quad (1.16)$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich:

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (1.17)$$

oder wenn $\underline{\omega} \perp \underline{r}$ (und nur dann):

$$v = \omega \cdot r \quad (1.18)$$

1.6 Aufgabe

Die Bahnkurve eines materiellen Punktes besitzt folgende kartesische Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= C e^{-\omega t} \cos \omega t \\ y(t) &= C e^{-\omega t} \sin \omega t \quad (t \geq 0) \\ z(t) &= 2C\omega t \end{aligned}$$

wobei C [m] und ω [s⁻¹] zwei bekannte Konstanten sind.

- Bestimme den Geschwindigkeitsvektor \underline{v} ausgedrückt in Zylinderkoordinaten.
- Berechne die Schnelligkeit nach einem halben Umlauf um die z -Achse für $C = 1$ m und $\omega = 1$ s⁻¹.

Gegeben: $x(t), y(t), z(t)$

Gesucht: a) v_ρ, v_φ, v_z

b) v nach einem halben Umlauf für $C = 1$ m und $\omega = 1$ s⁻¹

Lösung:

a) Für die Lösung dieser Teilaufgabe gibt es zwei Ansätze:

- Bahnkurve in zylindrische Koordinaten transformieren und dann die Geschwindigkeit ausrechnen.

ii) Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten berechnen und erst dann in zylindrische Koordinaten transformieren.

i) Erster Lösungsweg.

Beziehungen für die Transformation (siehe Formel 1.9):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Daraus ergibt sich für $\rho(t)$, $\varphi(t)$ und $z(t)$:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= C\sqrt{e^{-2\omega t} \cos^2 \omega t + e^{-2\omega t} \sin^2 \omega t} \\ &= C\sqrt{e^{-2\omega t} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = C\sqrt{e^{-2\omega t}} = Ce^{-\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\varphi(t)) &= \frac{Ce^{-\omega t} \sin \omega t}{Ce^{-\omega t} \cos \omega t} = \tan \omega t \\ \Rightarrow \varphi(t) &= \omega t \end{aligned}$$

$$z(t) = 2C\omega t$$

Die Bahnkurve in Zylinderkoordinaten lautet somit:

$$\rho(t) = Ce^{-\omega t}, \quad \varphi(t) = \omega t, \quad z(t) = 2C\omega t$$

Die Geschwindigkeiten lassen sich gemäss Formel (1.7) berechnen:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{\rho} = -C\omega e^{-\omega t} \\ v_\varphi &= \rho \cdot \dot{\varphi} = C\omega e^{-\omega t} \\ v_z &= \dot{z} = 2C\omega \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\underline{v} = C\omega(-e^{-\omega t}\underline{e}_\rho + e^{-\omega t}\underline{e}_\varphi + 2\underline{e}_z)$$

ii) Zweiter Lösungsweg.

Geschwindigkeit gemäss Formel (1.5) berechnen:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t - C\omega e^{-\omega t} \sin \omega t = -C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t + \sin \omega t) \\ v_y = \dot{y} &= -C\omega e^{-\omega t} \sin \omega t + C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t = C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t - \sin \omega t) \\ v_z = \dot{z} &= 2C\omega \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y werden auf ρ - und φ - Achse projiziert, um die Komponenten v_ρ und v_φ zu bestimmen. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} v_\rho &= v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \\ v_\varphi &= -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi \\ v_z &= v_z \end{aligned}$$

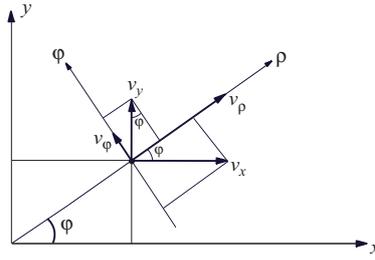


Abbildung 1.5: Geschwindigkeitskomponenten im kartesischen und zylindrischen Koordinatensystem

v_x und v_y sind bekannt. Der Winkel $\varphi(t)$ wird im Lösungsweg (i) berechnet: $\varphi(t) = \omega t$. Es folgt:

$$\begin{aligned} v_\rho &= -C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t + \sin \omega t) \cos \omega t + C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t - \sin \omega t) \sin \omega t \\ &= -C\omega e^{-\omega t} \cos^2 \omega t - C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t \sin \omega t + C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t \sin \omega t - C\omega e^{-\omega t} \sin^2 \omega t \\ &= -C\omega e^{-\omega t} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = -C\omega e^{-\omega t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &= C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t + \sin \omega t) \sin \omega t + C\omega e^{-\omega t} (\cos \omega t - \sin \omega t) \cos \omega t \\ &= C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t \sin \omega t + C\omega e^{-\omega t} \sin^2 \omega t + C\omega e^{-\omega t} \cos^2 \omega t - C\omega e^{-\omega t} \cos \omega t \sin \omega t \\ &= C\omega e^{-\omega t} (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = C\omega e^{-\omega t} \end{aligned}$$

$$v_z = 2C\omega$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{v}} = C\omega(-e^{-\omega t}\underline{\mathbf{e}}_\rho + e^{-\omega t}\underline{\mathbf{e}}_\varphi + 2\underline{\mathbf{e}}_z)$$

Beide Lösungswege führen zum gleichen Ergebnis. Der erste wird hier empfohlen: er ist weniger zeitaufwendig, die Berechnungen sind kürzer und somit ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zu machen, kleiner.

b) Nach einem halben Umlauf um die z-Achse beträgt der Winkel $\varphi = \pi$ rad. Mit $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$:

$$\varphi(t_1) = \omega t_1 = t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \pi \text{ s}$$

Damit kann die Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}(t_1)$ zur Zeit $t_1 = \pi$ s berechnet werden ($A = 1 \text{ m}$, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$):

$$\begin{aligned} v_\rho &= -e^{-t_1} = -e^{-\pi} \text{ m/s} \\ v_\varphi &= e^{-t_1} = e^{-\pi} \text{ m/s} \\ v_z &= 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Somit beträgt die Schnelligkeit:

$$\begin{aligned} v(t_1) &= |\underline{\mathbf{v}}(t_1)| = \sqrt{(-e^{-\pi})^2 + (e^{-\pi})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{2e^{-2\pi} + 4} = \sqrt{2}\sqrt{e^{-2\pi} + 2} \text{ m/s} \\ &\Rightarrow v(t_1) = 2.0009 \approx 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Nach einer gewissen Zeit verschwinden die x - und y -Komponenten der Geschwindigkeit. Der Massenpunkt bewegt sich dann mit einer Schnelligkeit $v = 2\text{ m/s}$ entlang die z -Achse (siehe Abb. 1.6).

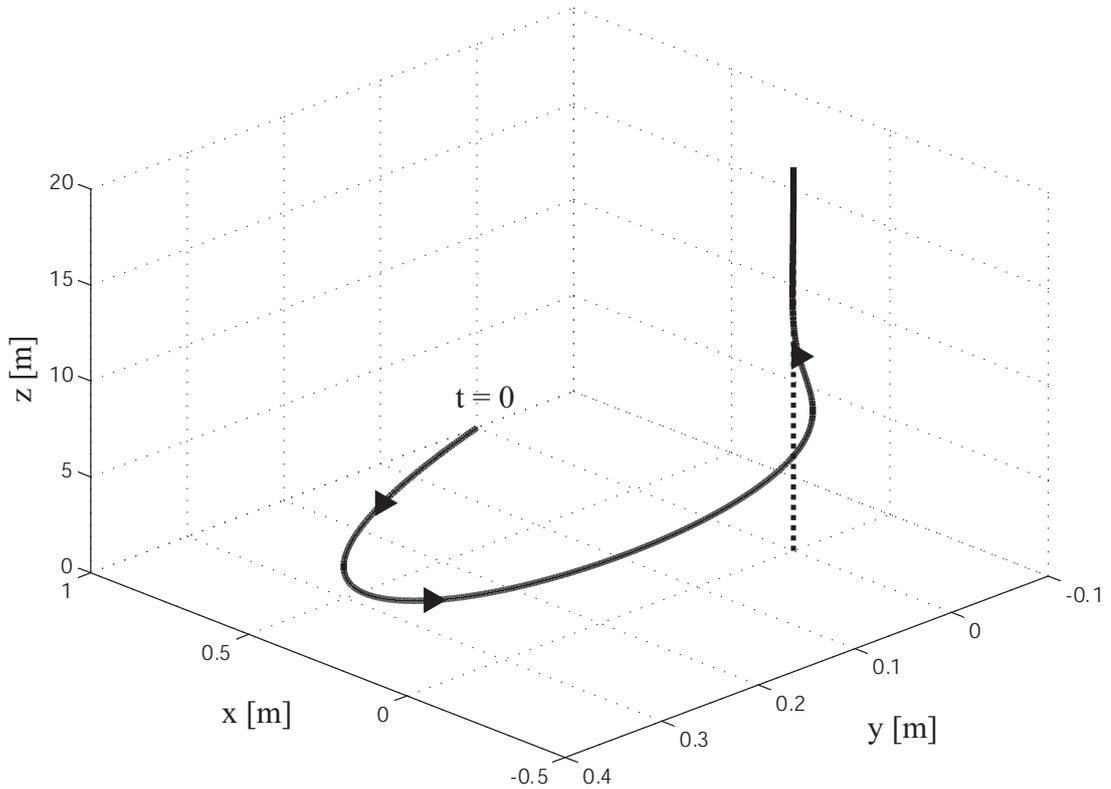


Abbildung 1.6: Bahnkurve

1.7 Verständnisfragen

1. Wie ist die Geschwindigkeit \underline{v} eines materiellen Punktes definiert?
2. Was ist die Schnelligkeit, worin unterscheidet sie sich von der Geschwindigkeit?
3. Welche Komponenten hat die Geschwindigkeit in kartesischen, zylindrischen bzw. sphärischen Koordinaten?
4. Beschreibe die zylindrischen Koordinatenflächen, d.h. die Flächen bei denen je eine der Zylinderkoordinaten konstant gehalten wird.

Kapitel 2

Zur Kinematik starrer Körper

2.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten $\underline{v}_M, \underline{v}_N$ zweier beliebiger Punkte M und N eines starren Körpers K weisen zu allen Zeiten gleiche Projektionen $\underline{v}'_M = \underline{v}'_N$ in Richtung ihrer Verbindungsgeraden MN auf:

$$\begin{aligned}\underline{v}'_M &= \underline{v}'_N \\ \underline{v}_M \cdot \underline{MN} &= \underline{v}_N \cdot \underline{MN} \\ |\underline{v}_M| \cos \alpha &= |\underline{v}_N| \cos \beta\end{aligned}\tag{2.1}$$

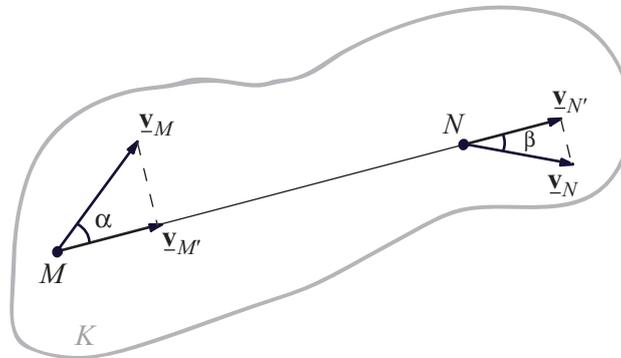


Abbildung 2.1: Projizierte Geschwindigkeiten an starren Körper

2.2 Translation

Alle Punkte M, N des starren Körpers K haben dieselbe Geschwindigkeit:

$$\underline{v}_M = \underline{v}_N, \quad \underline{\omega} = \underline{\mathbf{0}}$$

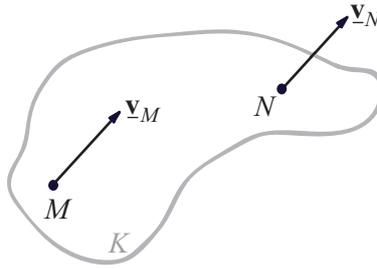


Abbildung 2.2: Translation eines starren Körpers

2.3 Rotation

Zwei Punkte A, B des starren Körpers (und damit die ganze Gerade AB) bleiben in Ruhe. Die Gerade $\mu = AB$ ist die Rotationsachse (siehe Abb. 2.3). Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers lautet:

$$\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{AM} \quad (2.2)$$

wobei A mit $v_a = 0$ ein beliebiger Punkt auf der Rotationsachse μ und $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_\mu$ die Rotationsgeschwindigkeit sind.

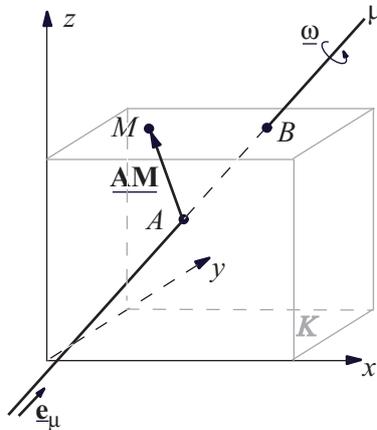


Abbildung 2.3: Rotation eines starren Körpers

2.4 Kreiselung

Ein Punkt B des starren Körpers bleibt für alle Zeiten fest. Die Bewegung entspricht einer momentanen Rotation um eine momentane Rotationsachse μ , wobei \underline{e}_μ seine Richtung mit der Zeit verändern kann.

2.5 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

2.5.1 Bewegungszustand

Der allgemeinste Bewegungszustand eines starren Körpers K wird durch zwei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}_B$ und $\underline{\omega}$ beschrieben. Beide Vektoren zusammen $\{\underline{\mathbf{v}}_B, \underline{\omega}\}$ werden als Kinemate bezeichnet. Die zwei Invarianten (im ganzen Körper konstant) des Bewegungszustandes sind:

- 1. Invariante:

$\underline{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit (siehe Abb. 2.4)

- 2. Invariante:

skalar: $\underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{v}}_M$

vektoriell: $\underline{\mathbf{v}}_\omega = (\underline{\mathbf{v}}_M)_\omega = (\underline{\mathbf{v}}_B)_\omega$

wobei: $\underline{\mathbf{v}}_\omega = (\underline{\mathbf{e}}_\zeta \cdot \underline{\mathbf{v}}_B) \underline{\mathbf{e}}_\zeta$

$$\underline{\mathbf{e}}_\zeta = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$$

$\underline{\mathbf{v}}_\omega$ ist die Geschwindigkeit in ω -Richtung oder die auf der Zentralachse projizierte Geschwindigkeit (siehe Abb. 2.4)

Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers:

$$\underline{\mathbf{v}}_M = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\omega} \times \underline{\mathbf{BM}} \quad (2.3)$$

2.5.2 Zentralachse

Zentralachse ζ : geometrischer Ort aller Punkte, deren Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}_\omega$ ist. Der starre Körper beschreibt eine Schraubung um diese Gerade ζ .

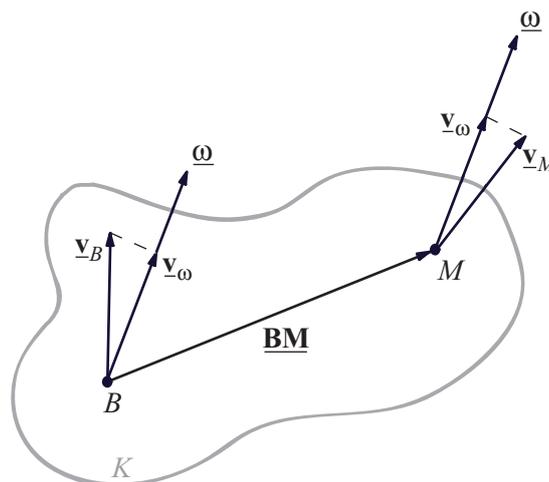


Abbildung 2.4: Allgemeine Bewegung eines starren Körpers

Bestimmung der Zentralachse:

$B(x_B, y_B, z_B)$ ist ein beliebiger Punkt des Körpers mit bekannter Kinemate.

$Z(x, y, z) \in \zeta$ ist ein unbekannter Punkt der Zentralachse ($\underline{\mathbf{v}}_Z = \underline{\mathbf{v}}_\omega$).

$$\underline{\mathbf{v}}_\omega = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\omega} \times \underline{\mathbf{BZ}} = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\omega} \times \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \\ z - z_B \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems nach x , y , und z liefert zwei Gleichungen für drei Unbekannten, die der analytischen Darstellung der gesuchten Zentralachse entsprechen.

Die Zentralachse kann auch parametrisch dargestellt werden:

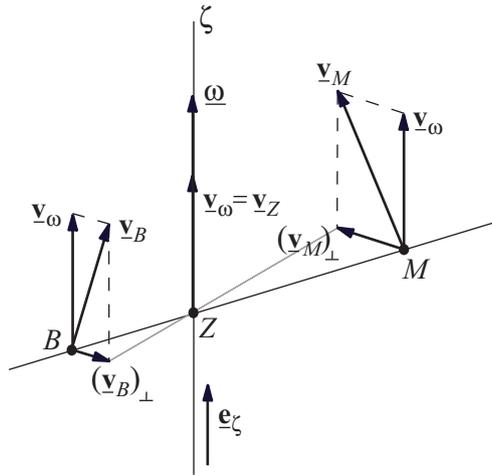


Abbildung 2.5: Schraubung um die Zentralachse ζ

$$\underline{\zeta} = \begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

wobei $Z(x_z, y_z, z_z)$ ein beliebiger Punkt der Zentralachse ist (siehe Abb. 2.5).

2.5.3 Spezialfälle

Die Spezialfälle können anhand der zweiten Invarianten charakterisiert werden:

$$\underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B = 0$$

$\underline{\omega} = \underline{\mathbf{0}}$: reine Translation

$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{0}}$: momentane Rotation um die Achse μ , $B \in \mu$ (siehe Abb. 2.6 links)

$\underline{\mathbf{v}}_B \perp \underline{\omega}$: momentane Rotation um die Achse μ , $B \notin \mu$ (siehe Abb. 2.6 rechts)

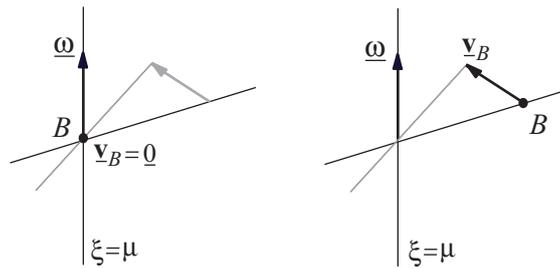


Abbildung 2.6: Spezialfälle bei verschwindender 2. Invariante

2.6 Ebene Bewegung

Bei einer ebenen Bewegung sind die Bahnkurven aller Punkte des starren Körpers eben und liegen in parallelen Ebenen.

2.6.1 Momentanzentrum

Die Bewegung in der Ebene ist eine momentane Rotation um einen Punkt Z , der Momentanzentrum heisst. Bei ebener Bewegung wird die Schnelligkeit eines beliebigen Punktes N folgendermassen berechnet:

$$v_N = \omega r, \quad \text{wobei } r = |\underline{\mathbf{ZN}}| \text{ und } v_Z = 0$$

Die Konstruktion des Schnittpunktes der Orthogonalen auf den Geschwindigkeitsvektoren $\underline{\mathbf{v}}$ ergeben das Momentanzentrum Z (siehe Abb. 2.7)

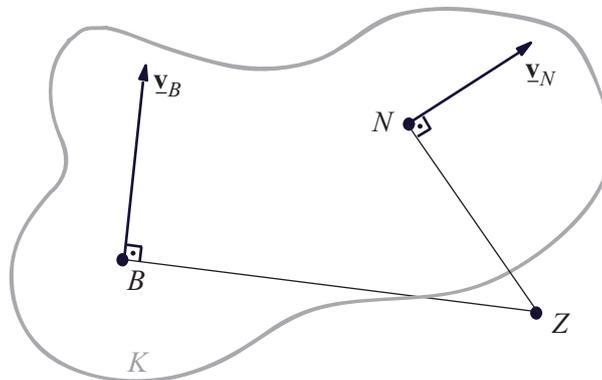


Abbildung 2.7: Konstruktion des Momentanzentrums

Sonderfälle:

- gleiche Geschwindigkeitsvektoren \Rightarrow Translation, Z im Unendlichen
- Geschwindigkeiten $\underline{\mathbf{v}}_N \parallel \underline{\mathbf{v}}_B$ und $\underline{\mathbf{v}}_N \neq \underline{\mathbf{v}}_B$: das Momentanzentrum Z ist der Schnittpunkt der Gerade BN mit der Verbindungslinie der Vektorspitzen (siehe Abb. 2.8).

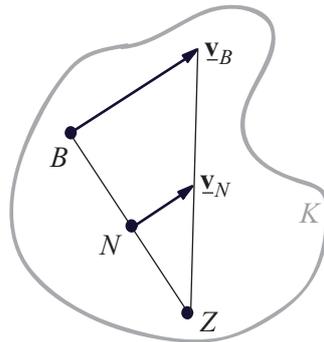


Abbildung 2.8: Momentanzentrum bei ungleichen, parallelen Geschwindigkeiten

2.6.2 Polbahnen

Feste Polbahn: geometrischer Ort des Momentanzentrums bezüglich eines festen Koordinatensystems $(0xyz)$.

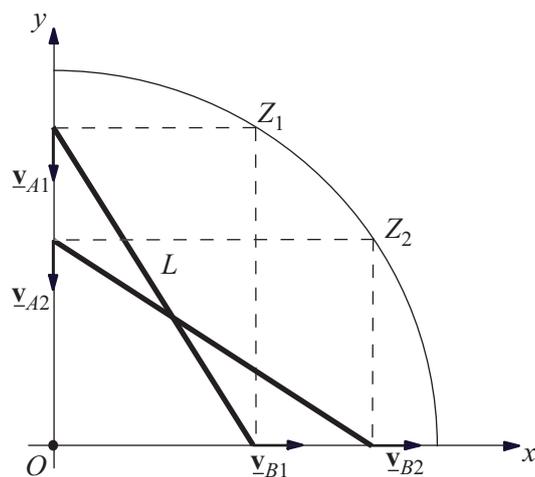


Abbildung 2.9: Feste Polbahn eines Stabes, der eine Wand entlang rutscht: Viertelkreis um O mit Radius L

Bewegliche Polbahn: geometrischer Ort von Z bezüglich eines körperfesten Koordinatensystems $(0\xi\eta z)$.

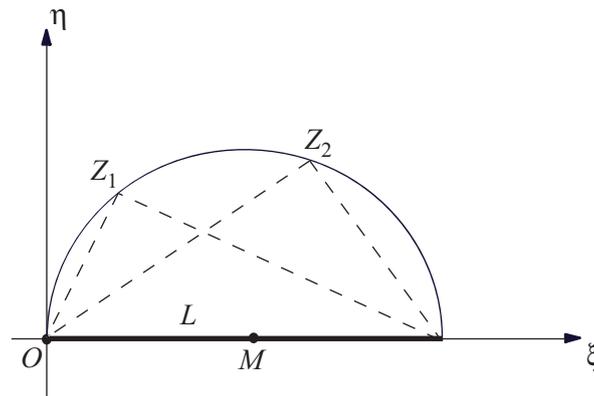


Abbildung 2.10: Bewegliche Polbahn (bzgl. Stab selbst): Halbkreis um die Stabmitte M mit Radius $L/2$

2.6.3 Ebene Fachwerke

Geeigneter Lösungsweg zur Bestimmung des Bewegungszustandes eines ebenen Fachwerkes:

1. Identifikation aller starren Körper:

- Bereiche nur aus Dreiecken
- einzelne starre Stäbe
- andere starre Körper (z.B. Platten)

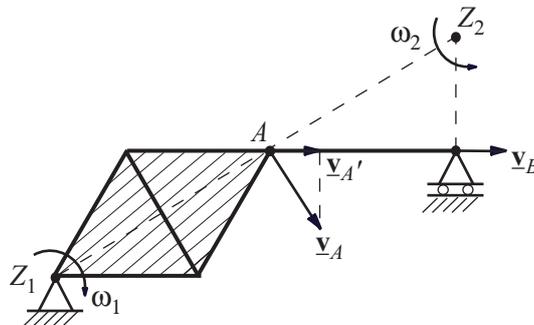


Abbildung 2.11: Bewegungszustand eines ebenen Fachwerkes

2. Identifikation der Lagerungen:

- drehbar (\Rightarrow Momentanzentrum, zum Beispiel Z_1)
- drehbar und verschiebbar (\Rightarrow Richtung von \underline{v} bekannt, zum Beispiel \underline{v}_B)

3. ω_i und z_i für alle beteiligten Körper bestimmen:

- Satz vom Momentanzentrum ($v = \omega r$)

- Satz der projizierten Geschwindigkeiten
- parallele Stäbe im Parallelogramm haben die gleiche Rotationsgeschwindigkeit (Betrag und Richtung) (siehe Abb. 2.12)

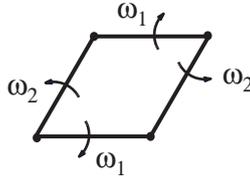


Abbildung 2.12: Rotationsgeschwindigkeiten in einem Parallelogramm

2.7 Zur Lösung von Aufgaben in der Kinematik

Auf Signalworte im Aufgabentext achten:

- reine Rotation, rotiert \Rightarrow eine ruhende Achse $\mu = \zeta$
- gleiten \Rightarrow Geschwindigkeit senkrecht zur Berührungsfläche ist 0
- rollen \Rightarrow Geschwindigkeit im Berührungspunkt B ist 0, $B \in \mu$

Wann ist mit den Beträgen zu rechnen, wann vektoriell?

- Antwort: Vektoriell führt immer zum Ziel! Bei ebenen Bewegungen ist dabei die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Ebene null. Die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit in der Ebene sind null. Die Rotationsgeschwindigkeit hat nur eine Komponente senkrecht zur Ebene.
- Sonderfall: Bei ebenen Bewegungen kann es bequemer sein, nur mit den Beträgen der Vektoren zu rechnen, da bei Kenntnis des Momentanzentrums die Beziehung $|\underline{v}| = |\underline{\omega}| \cdot |\underline{r}|$ gilt. Die Richtungen der Vektoren sollten aus der Skizze bestimmt werden.
- Vorzeichenkonvention: Unbekannte Vektoren sind positiv in Richtung der positiven Koordinatenachsen einzuführen. Liefern die Rechnungen für Komponenten negative Ergebnisse, so zeigt diese Komponente in Wirklichkeit in die entgegengesetzte Richtung.
- Darstellung von Vektoren: \otimes in Ebene hinein und \odot aus der Ebene heraus.

2.8 Aufgaben

Aufgabe 1

Der Bewegungszustand eines starren Quaders mit den Seitenlängen a , a und $2a$ ist zur Zeit t durch die Geschwindigkeiten in den Ecken E , D , F , die Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ und die Schnelligkeit $|\underline{v}_Z|$ auf der Zentralachse gegeben.

$$\underline{v}_E = (2v, e_2, e_3)$$

$$\underline{v}_D = (d_1, d_2, 2v)$$

$$\underline{v}_F = (f_1, v, f_3)$$

$$\underline{\omega} = \omega (0, 1, 1)$$

$$|\underline{v}_Z| = \sqrt{2}v$$

(v bekannt, $e_2, e_3, d_1, d_2, f_1, f_3, \omega$ unbekannt)

- Stelle den Bewegungszustand durch eine Kinemate in der Ecke D dar.
- Bestimme die Zentralachse ζ .
- Finde die Punkte der Quaderfläche $ABFE$ mit minimaler und maximaler Schnelligkeit und drücke v_{min} und v_{max} durch v aus.

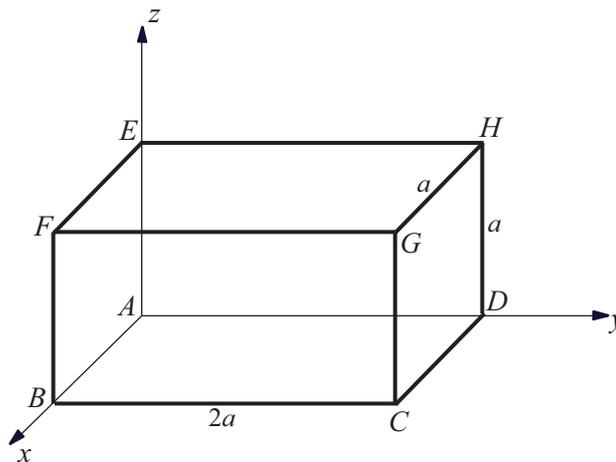


Abbildung 2.13: Starrer Quader

Gegeben: $v, v_{Ex}, v_{Dz}, v_{Fy}$, Richtung von $\underline{\omega}$, Schnelligkeit v_Z auf ζ

Gesucht: a) Kinemate in D

b) Zentralachse ζ

c) v_{min} und v_{max} auf $ABFE$ und deren entsprechende Punkte

Lösung:

a) Kinematik in D : $\{\underline{\mathbf{v}}_D, \underline{\boldsymbol{\omega}}\}$. Gemäss Formel (2.3) werden zwei vektorielle Gleichungen zwischen $\underline{\mathbf{v}}_E$, $\underline{\mathbf{v}}_F$ und $\underline{\mathbf{v}}_D$ aufgestellt. Die Paare werden so gewählt, dass die Verbindungsvektoren so einfach wie möglich sind:

$$\underline{\mathbf{EF}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{ED}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$$

Gemäss Formel (2.3) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}_F &= \underline{\mathbf{v}}_E + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{EF}} &\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ v \\ f_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2v \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{v}}_D &= \underline{\mathbf{v}}_E + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{ED}} &\Rightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 2v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2v \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 = 2v & (1) \\ v = e_2 + a\omega & (2) \\ f_3 = e_3 - a\omega & (3) \\ d_1 = 2v - 3a\omega & (4) \\ d_2 = e_2 & (5) \\ 2v = e_3 & (6) \end{cases}$$

Damit haben wir sieben Unbekannten und sechs Gleichungen. Wir brauchen eine zusätzliche Gleichung. Gemäss (2.4) ist die Schnelligkeit auf der Zentralachse:

$$|\underline{\mathbf{v}}_\omega| = |\underline{\mathbf{v}}_Z| = (\underline{\mathbf{e}}_\zeta \cdot \underline{\mathbf{v}}_D) = \sqrt{2}v$$

Die Richtung der Zentralachse ist durch den Einheitsvektor $\underline{\mathbf{e}}_\zeta$ gekennzeichnet:

$$\underline{\mathbf{e}}_\zeta = \frac{\underline{\boldsymbol{\omega}}}{|\underline{\boldsymbol{\omega}}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die auf die Zentralachse projizierte Geschwindigkeit im Punkt D ist:

$$|\underline{\mathbf{v}}_Z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 2v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_2 + 2v) = \sqrt{2}v$$

$$d_2 + 2v = 2v$$

$$d_2 = 0$$

aus (5): $e_2 = 0$

aus (2): $a\omega = v \Rightarrow \omega = \frac{v}{a}$

aus (4): $d_1 = 2v - 3a\omega = 2v - 3v = -v$

Kinemate im Punkt D :

$$\{\mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}, \underline{\omega} = \frac{v}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

weiter aus (1) und (3):

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ v \end{pmatrix}$$

b) Betrachtet wird jetzt ein Punkt $Z(x, y, z)$ auf der Zentralachse ζ :

$$Z \in \zeta \Rightarrow \mathbf{v}_Z = \underline{\mathbf{v}}_\omega / \underline{\omega}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_Z = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } |\underline{\mathbf{v}}_Z| = \sqrt{2}v$$

und somit:

$$\underline{\mathbf{v}}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix}$$

Gemäss (2.3):

$$\underline{\mathbf{v}}_Z = \underline{\mathbf{v}}_D + \omega \times \underline{\mathbf{DZ}} \text{ mit } D(0, 2a, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} + \frac{v}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y - 2a \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = -v + \frac{v}{a}(z - y + 2a) & (7) \\ v = \frac{v}{a} \cdot x & (8) \\ v = 2v + \frac{v}{a} \cdot (-x) & (9) \end{cases}$$

Gleichungen (8) und (9) sind linear abhängig; zwei lineare unabhängige Ebenengleichungen für drei Unbekannten führen zu einer Geradengleichung.

$$\text{aus (8): } x = a$$

$$\text{aus (7): } z = y - a$$

Die Zentralachse ζ lautet:

$$\zeta : \begin{cases} x = a \\ y = k \\ z = k - a \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

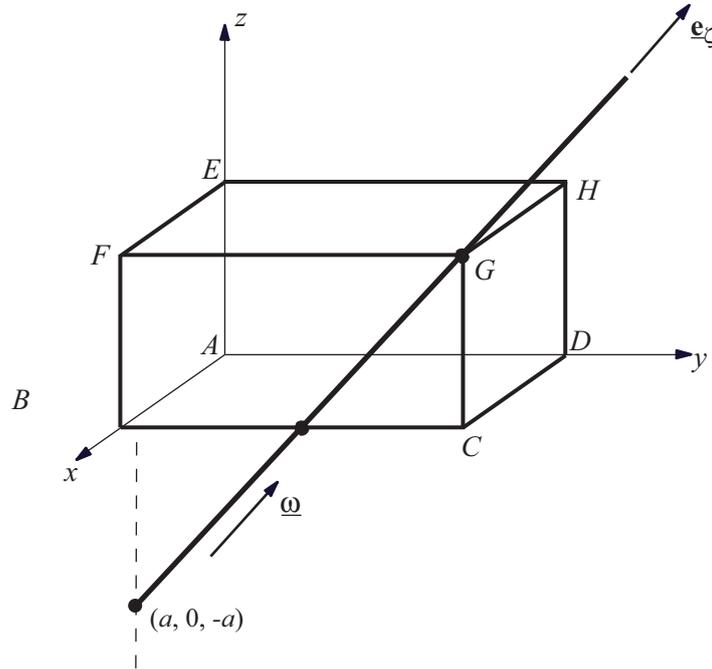


Abbildung 2.14: Zentralachse des starren Quaders

c) Minimale Schnelligkeit: Punkt mit dem minimalen Abstand von $\zeta \Rightarrow$ Punkt B (aus Anschauung der Abbildung 2.14).

$$\underline{\mathbf{v}}_B = \underline{\mathbf{v}}_F + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{FB}} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ v \end{pmatrix} + \frac{v}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}$$

$$v_{min} = |\underline{\mathbf{v}}_B| = \sqrt{v^2 + v^2 + v^2} = \sqrt{3}v$$

Maximale Schnelligkeit: Punkt mit dem grössten Abstand von $\zeta \Rightarrow$ Punkt E .

$$\underline{\mathbf{v}}_E = \underline{\mathbf{v}}_F + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{FE}} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ v \end{pmatrix} + \frac{v}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$v_{max} = |\underline{\mathbf{v}}_E| = \sqrt{4v^2 + 4v^2} = 2\sqrt{2}v$$

Aufgabe 2

Das in der Skizze dargestellte mechanische System besteht aus 13 starren Stäben, welche reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Das System ist in A und M gelenkig gelagert. Der Stab AC rotiert mit Rotationsgeschwindigkeit ω um den Punkt A . Ermittle die Rotationsgeschwindigkeiten ω_i und die Lage der Momentanzentren der vier Stäbe $i = 3, 4, 5, 6$.

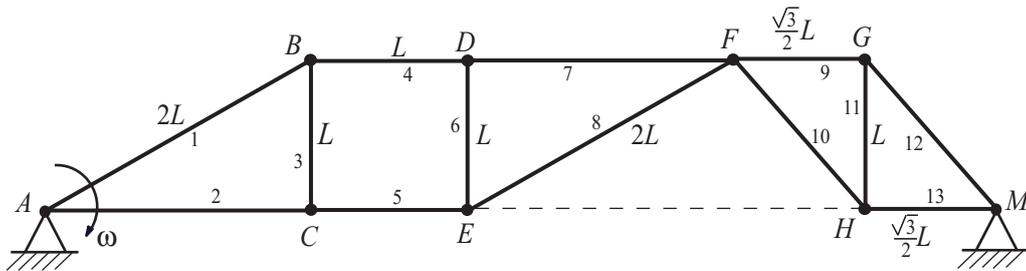


Abbildung 2.15: Ebenes Fachwerk

Gegeben: Geometrie, ω

Gesucht: $Z_i, \omega_i, i = 3, 4, 5, 6$

Lösung:

1. Identifikation aller starren Körper:

5 starre Körper: Bereiche $ABC, DEF, FGMH$ (Dreiecke); Stäbe BD, CE .
Stab BC gehört zu ABC , Stab DE zu DEF .

2. Identifikation der Lagerungen:

Punkt A : drehbar $\Rightarrow Z_1 = Z_2 = Z_3 = A = Z_{ABC}$

Punkt M : drehbar $\Rightarrow Z_{FGHM} = M$

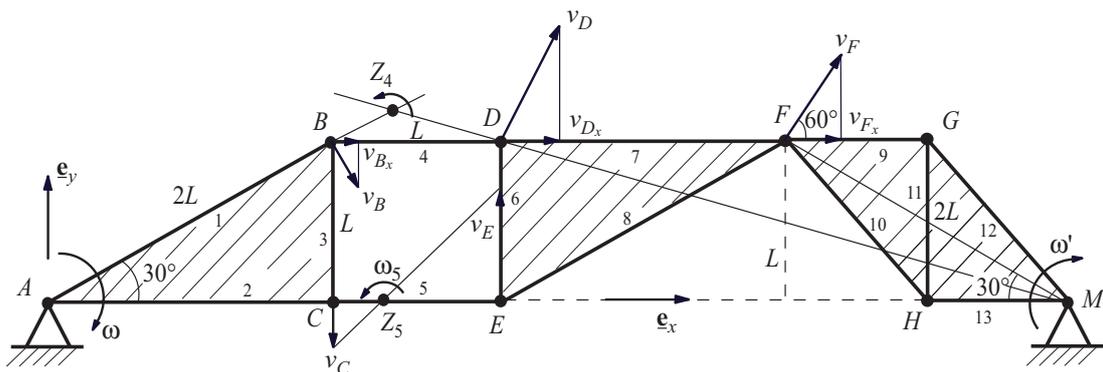


Abbildung 2.16: Bewegungszustand des ebenen Fachwerkes in der Anfangslage

3. ω_i und Z_i für Stäbe 3 bis 6:

$$Z_3 = A, Z_3(0, 0, 0)$$

$$\omega_3 = \omega$$

Geschwindigkeiten in B und C (Richtungen siehe Abb. 2.16):

$$v_B = 2\omega L$$

$$v_C = \sqrt{3}\omega L$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten:

$$v_{Bx} = v_B \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v_B = \omega L$$

und $v_{Fx} = v_{Dx} = v_{Bx} = \omega L$, gemäss SdpG auf BD und DF

$$v_{Cx} = 0 \Rightarrow v_{Ex} = 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{v}}_E \perp \underline{\mathbf{e}}_x$$

Satz vom Momentanzentrum:

M ist Momentanzentrum des starren Körpers $FGMH \Rightarrow \underline{\mathbf{v}}_F \perp \underline{\mathbf{MF}}$ und

$v_F = \omega' \cdot 2L$, wobei ω' noch unbekannt ist. Die Orthogonalen auf $\underline{\mathbf{v}}_E$ und $\underline{\mathbf{v}}_F$

(Betrag noch unbekannt) ergeben den Schnittpunkt M als Momentanzentrum des Dreieckes DEF .

Satz der projizierten Geschwindigkeiten:

$$v_F \cos 60^\circ = v_{Fx} = \omega L \Rightarrow v_F = 2\omega L$$

Satz vom Momentanzentrum:

$$\omega' = \frac{v_F}{2L} = \omega$$

$$\Rightarrow \omega_i = \omega, \quad i = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

$$v_E = \omega \cdot 2\sqrt{3}L = 2\sqrt{3}\omega L$$

$$Z_6 = M, \quad Z_6 \left(L \left(3\sqrt{3} + 1 \right), 0, 0 \right), \quad \omega_6 = \omega$$

Das Momentzentrum Z_5 liegt auf dem Stab 5 und kann jetzt geometrisch bestimmt werden (siehe Kapitel 2.6.1, 2. Sonderfall):

$$\omega_5 \cdot \frac{L}{3} = v_C = \sqrt{3}\omega L$$

$$\omega_5 = 3\sqrt{3}\omega$$

$$Z_5 \left(L \left(\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right), 0, 0 \right)$$

Schnelligkeit in D :

$$v_D = \omega \cdot DM = \omega \sqrt{L^2 + \left(2 \cdot \sqrt{3}L \right)^2}$$

$$\Rightarrow v_D = \sqrt{13} \cdot \omega L$$

Momentanzentrum Z_4 kann jetzt geometrisch bestimmt werden (siehe Abb. 2.16). Parallelogramm:

$$\omega_4 = \omega_5 \Rightarrow \omega_4 = 3\sqrt{3}\omega$$

Satz vom Momentanzentrum:

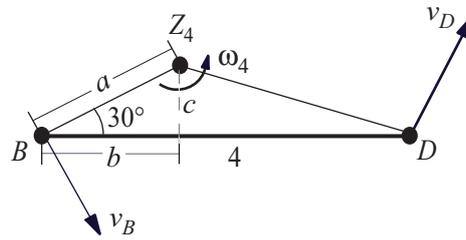


Abbildung 2.17: Bestimmung des Momentanzentrum Z_4

$$\omega_4 \cdot a = v_B \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\omega \cdot a = 2\omega L \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{9}L$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = a \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}L}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{3} \\ c = a \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}L}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}L}{9} \end{cases}$$

$$Z_4 \left(L \left(\sqrt{3} + \frac{1}{3} \right), L \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \right), 0 \right)$$

2.9 Verständnisfragen

1. Wie viele Freiheitsgrade hat der starre Körper im Raum und wie viele in der Ebene?
2. Was ist ein Momentanzentrum?
3. Wie sind die beiden Polbahnen definiert?
4. Wie kann die Bewegung eines Körpers im allgemeinsten Fall beschrieben werden?
5. Ist eine Schraubung eine ebene Bewegung?
6. Wie wird eine Kinematik im Raum und wie für eine ebene Bewegung definiert?
7. Welche Größe der Kinematik ist vom Bezugspunkt abhängig?
8. Welches sind die Invarianten des Bewegungszustandes?
9. Welche Invarianten verschwinden bei der Translation, bei der Rotation bzw. der Schraubung?

Kapitel 3

Kräfte und Momente

3.1 Kräfte

Die Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ ist mathematisch als punktgebundener Vektor dargestellt, charakterisiert durch:

- ihre Wirkungslinie
- ihre Richtung
- ihren Angriffspunkt A
- ihre Grösse F (Betrag) in Newton $[N]$

3.1.1 Reaktionsprinzip

A_1 und A_2 sind zwei materielle Punkte. Übt A_1 auf A_2 die Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ aus, so wirkt A_2 auf A_1 mit der Gegenkraft $-\underline{\mathbf{F}}$.

3.1.2 Kontakt- oder Fernkräfte

Kontaktkraft: Wechselwirkung durch Berührung, Angriffspunkte im gleichen Ort. Beispiel: Reibung, Normalkraft.

Fernkraft: Wechselwirkung ohne Berührung, Angriffspunkte in Schwerpunkten. Beispiele: Gravitationskraft im Sonnensystem.

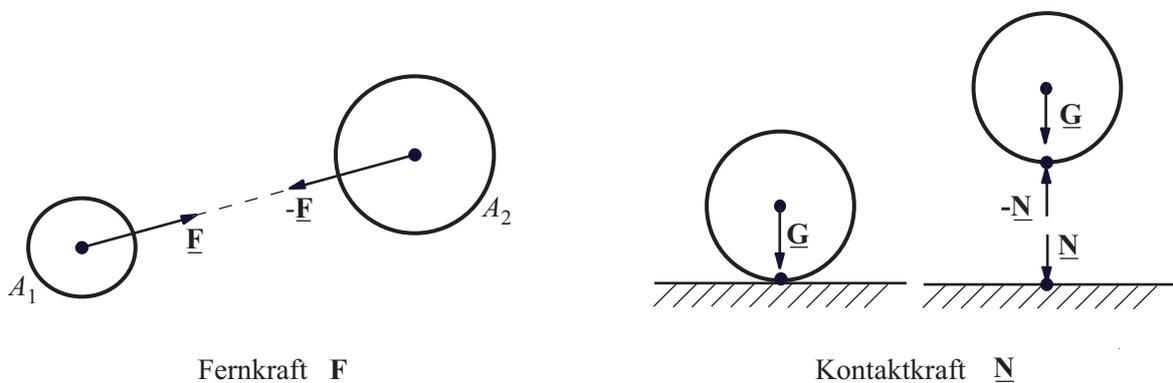


Abbildung 3.1: Beispiel einer Fernkraft (links) und einer Kontaktkraft (rechts)

3.1.3 Innere oder äussere Kräfte

Innere Kraft: materieller Angriffspunkt der Reaktion liegt innerhalb des materiellen Systems. In den Gleichgewichtsgleichungen des Systems treten innere Kräfte nicht auf.

Äussere Kraft: materieller Angriffspunkt der Reaktion liegt ausserhalb des materiellen Systems. In den Gleichgewichtsgleichungen müssen die äusseren Kräfte berücksichtigt werden.

Bemerkung: Materielles System hängt von der Begrenzung ab!

Beispiel:

Ein Klotz von Masse m ruht auf einem schiefen, starren Balken, der gemäss Abbildung 3.2 reibungsfrei gelagert ist.

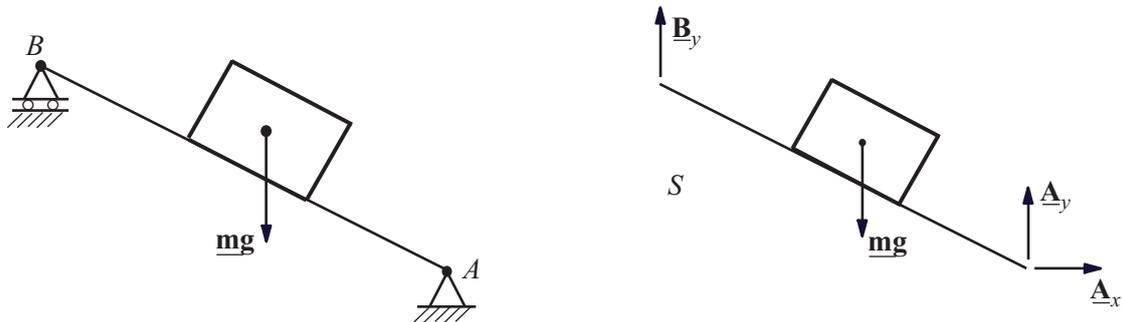


Abbildung 3.2: Gesamtes System (links) und freigeschnittenes System (rechts)

In einem ersten Schritt wird das System von der Umgebung freigeschnitten. In diesem Fall sind die Lagerkräfte \underline{A}_x , \underline{A}_y , \underline{B}_y sowie die Gewichtskraft \underline{mg} äussere Kräfte. Normal- und Reibungskraft zwischen Klotz und Balken sind innere Kräfte.

Soll die Reibungskraft zwischen Klotz und Balken bestimmt werden, wird der Klotz vom Balken getrennt. Daraus entstehen zwei materielle Systeme S_1 und S_2 (siehe Abb. 3.3). Die Kräfte \underline{N} und \underline{F}_R müssen in S_2 eingezeichnet werden. Da ihre Reaktionen in S_1 liegen, sind die beiden Kräfte durch die Trennung zu äusseren Kräften geworden.

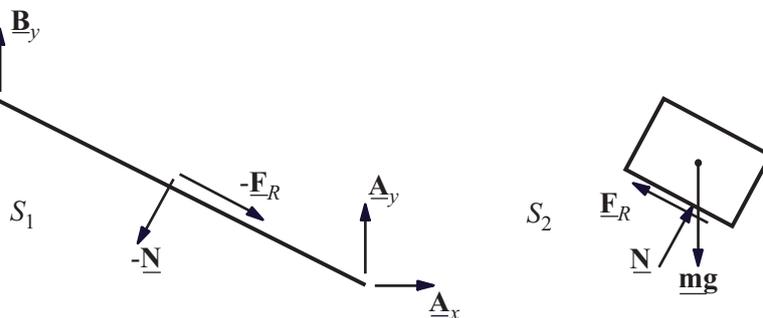


Abbildung 3.3: Trennung von Balken und Masse

3.1.4 Resultierende einer Kräftegruppe

Die Resultierende einer Kräftegruppe $\{\underline{\mathbf{F}}_i\}$ ist die vektorielle Summe aller Kräfte:

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \quad (3.1)$$

oder

$$R_x = \sum_i F_{xi}, \quad R_y = \sum_i F_{yi}, \quad R_z = \sum_i F_{zi},$$

wobei $\underline{\mathbf{F}}_i = F_{xi}\underline{\mathbf{e}}_x + F_{yi}\underline{\mathbf{e}}_y + F_{zi}\underline{\mathbf{e}}_z$, $i = 1 \dots n$
 und $\underline{\mathbf{R}} = R_x\underline{\mathbf{e}}_x + R_y\underline{\mathbf{e}}_y + R_z\underline{\mathbf{e}}_z$

3.2 Moment

Das Moment einer Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit Angriffspunkt A bezüglich eines Punktes O ist folgendermassen definiert:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{\mathbf{OA}} \times \underline{\mathbf{F}} \quad (3.2)$$

Das Moment ist das Vektorprodukt des Ortsvektors zwischen O und A und der Kraft $\underline{\mathbf{F}}$. Sein Betrag lautet $[Nm]$:

$$M_O = |\underline{\mathbf{OA}}| |\underline{\mathbf{F}}| \cdot \sin \alpha = F \cdot a \quad (3.3)$$

Der Vektor $\underline{\mathbf{M}}_O$ steht senkrecht zu der von $\underline{\mathbf{OA}}$ und $\underline{\mathbf{F}}$ aufgespannten Ebene. Ausserdem bil-

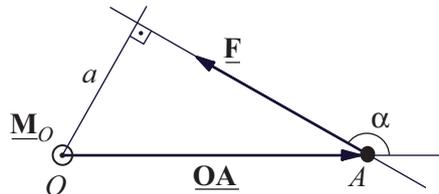


Abbildung 3.4: Moment einer Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ im Punkt O

den $\underline{\mathbf{M}}_O$, $\underline{\mathbf{OA}}$ und $\underline{\mathbf{F}}$ ein Rechtssystem. **Bemerkung:** $\underline{\mathbf{F}}$ darf entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, das Moment $\underline{\mathbf{M}}_O$ ändert sich nicht! Das Moment einer Kräftegruppe bezüglich eines Punktes O ist:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \sum_i \underline{\mathbf{OA}}_i \times \underline{\mathbf{F}}_i \quad (3.4)$$

Bei Wahl eines anderen Bezugspunktes P :

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{PO}} \times \underline{\mathbf{R}} \quad (3.5)$$

wobei $\underline{\mathbf{R}}$ die Resultierende der Kräftegruppe ist (siehe Gleichung 3.1).

Kräftepaar: Eine aus zwei parallelen entgegengerichteten Kräften bestehende Kräftegruppe mit $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$ heisst Kräftepaar. Sein Moment:

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{A}'\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{F}} \quad (3.6)$$

ist ein freier Vektor und vom Bezugspunkt unabhängig. Demzufolge kann das Kräftepaar verschoben werden, ohne seine Wirkung auf den starren Körper zu verändern.

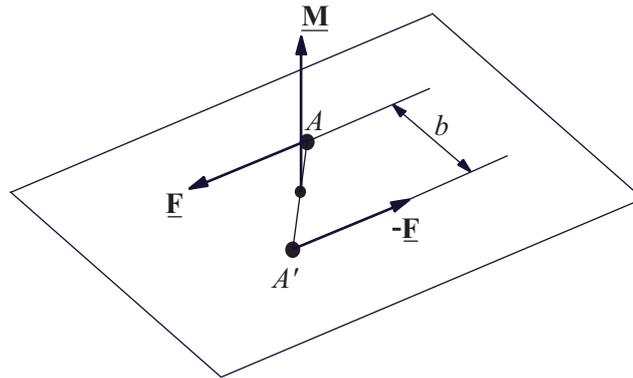


Abbildung 3.5: Kräftepaar

Der Betrag eines Kräftepaars lautet:

$$M = b \cdot F \quad (3.7)$$

wobei b die Breite des Kräftepaars ist.

3.3 Leistung

Die Leistung einer Einzelkraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit dem materiellen Angriffspunkt M ist das Skalarprodukt:

$$P = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_M \quad (3.8)$$

wobei $\underline{\mathbf{v}}_M$ die Geschwindigkeit des Punktes M ist.

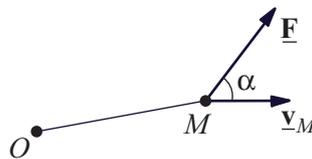


Abbildung 3.6: Zur Leistung einer Einzelkraft

Gemäss Definition des Skalarproduktes ist folgende Formel äquivalent:

$$P = |\underline{\mathbf{F}}| |\underline{\mathbf{v}}_M| \cdot \cos \alpha$$

wobei α den Winkel zwischen Kraft und Geschwindigkeit darstellt (siehe Abb. 3.6).

Die Leistung eines Momentes $\underline{\mathbf{M}}_O$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Momentes mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$:

$$P = \underline{\mathbf{M}}_O \cdot \underline{\omega} \quad (3.9)$$

Leistung einer Kräftegruppe:

$$P = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_i \quad (3.10)$$

oder

$$P = \underline{\mathbf{v}}_B \cdot \underline{\mathbf{R}} + \underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B \quad (3.11)$$

wobei: $\underline{\mathbf{R}}$ Resultierende der Kräftegruppe (Gleichung 3.1)

$\underline{\mathbf{M}}_B$ Moment der Kräftegruppe bezüglich B (Gleichung 3.4)

3.4 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

3.4.1 Statische Äquivalenz

Zwei Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G^*\}$ sind statisch äquivalent, wenn ihre Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ und ihr Moment $\underline{\mathbf{M}}_B$ bezüglich eines beliebigen Punktes B gleich sind.

3.4.2 Reduktion einer Kräftegruppe

Eine Kräftegruppe $\{G\}$ kann immer auf ihre Dynamie $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}_B\}$ in einem beliebigen Punkt B reduziert werden.

Die zwei Invarianten der Kräftegruppe $\{G\}$ sind:

1. Invariante: $\underline{\mathbf{R}}$

2. Invariante: $\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_M$, für beliebige Punkte B, M ,

oder:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(R)} = (\underline{\mathbf{e}}_\zeta \cdot \underline{\mathbf{M}}_B) \cdot \underline{\mathbf{e}}_\zeta, \quad \text{wobei: } \underline{\mathbf{e}}_\zeta = \frac{\underline{\mathbf{R}}}{|\underline{\mathbf{R}}|} \quad (3.12)$$

Die Zentralachse ζ ist der geometrische Ort aller Punkte, welche die Dynamie $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}^{(R)}\}$ besitzen.

Bestimmung der Zentralachse ζ :

Sei B ein beliebiger Punkt des Körpers mit Dynamie $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}_B\}$.

$Z(x, y, z) \in \zeta$ mit $\underline{\mathbf{M}}_Z = \underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ ist zu bestimmen:

$$\underline{\mathbf{M}}_Z = \underline{\mathbf{M}}_B + \underline{\mathbf{ZB}} \times \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}^{(R)} \quad (3.13)$$

$\underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ kann aus der Gleichung (3.12) bestimmt werden.

Die Auflösung des Gleichungssystems nach x, y und z liefert die gewünschte Geradengleichung der Zentralachse ζ :

$$\zeta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \underline{\mathbf{R}} \quad (3.14)$$

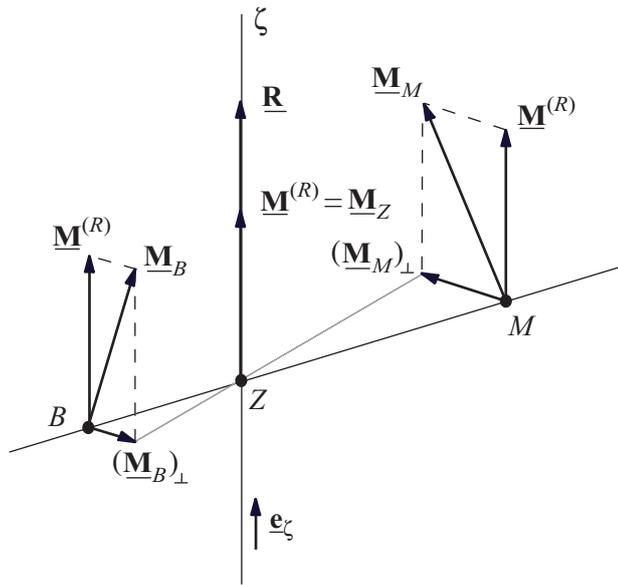


Abbildung 3.7: Zentralachse einer Kräftegruppe

3.4.3 Sonderfälle

1. **Reduktion der Kräftegruppe auf eine Einzelkraft \underline{R} :** Nur dann möglich, wenn die zweite Invariante $\underline{M}^{(R)}$ verschwindet:

$$\underline{M}^{(R)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{R} \cdot \underline{M} = 0, \text{ für beliebige Bezugspunkte}$$

2. **Ebene Probleme:** \underline{M}_B steht immer senkrecht auf \underline{R} , so dass sich die Kräftegruppe immer auf eine Einzelkraft reduzieren lässt.

3.5 Kräftemittelpunkt bei linienverteilten Kräften

3.5.1 Allgemein

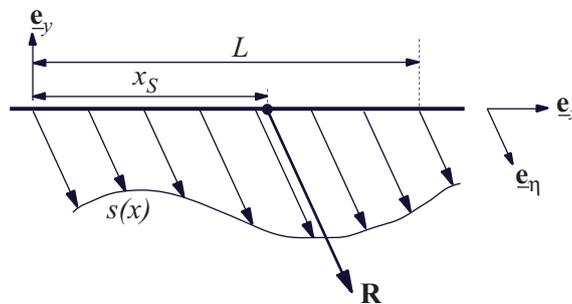


Abbildung 3.8: Kräftemittelpunkt einer parallelen Kräftegruppe

Der Kräftemittelpunkt x_s einer parallelen Kräftegruppe mit Kraftdichte $\underline{s} = s(x)\underline{e}_\eta$ ist der Angriffspunkt ihrer Resultierenden \underline{R} :

$$x_s = \frac{\int_0^L x s(x) dx}{\int_0^L s(x) dx} = \frac{\int_0^L x s(x) dx}{R} \quad (3.15)$$

3.5.2 Sonderfälle

1. **Gleichförmige Kräfteverteilung** ($s(x) = s_0 = \text{konstant}$):

$$\text{Kräftemittelpunkt: } x_s = \frac{L}{2}$$

$$\text{Resultierende: } R = L \cdot s_0$$

2. **Dreieckverteilung** ($s(x) = \frac{x}{L}s_0$):

$$\text{Kräftemittelpunkt: } x_s = \frac{2L}{3}$$

$$\text{Resultierende: } R = \frac{Ls_0}{2}$$

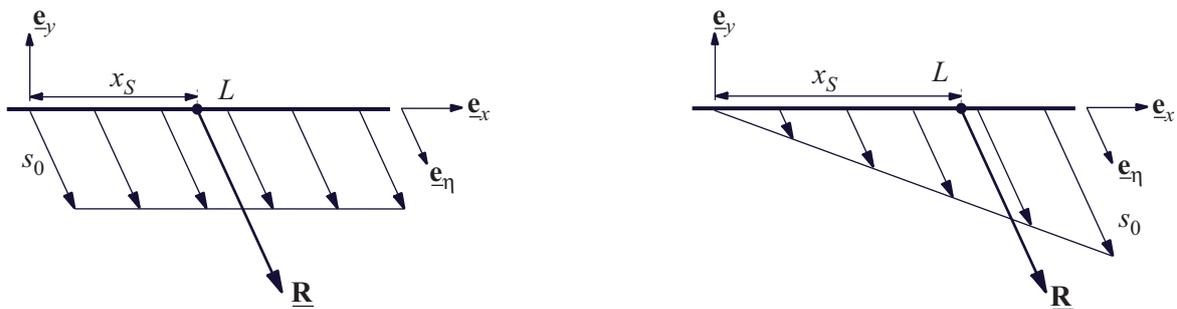


Abbildung 3.9: Gleichförmige Kräfteverteilung (links) und Dreieckverteilung (rechts)

3.6 Aufgaben

Aufgabe 1

Am eingezeichneten starren gewichtslosen Quader mit den Seitenlängen $2a$, $2a$ und a greifen gemäss Abbildung 3.10 vier Kräfte und drei Momente an.

$$F_1 = 3P, \quad F_2 = 2P, \quad F_3 = \frac{5}{2}P, \quad F_4 = P$$

$$M_1 = \frac{15}{4}aP, \quad M_2 = 2aP, \quad M_3 = \frac{3}{2}aP$$

Reduziere diese Kräftegruppe auf den Punkt O .

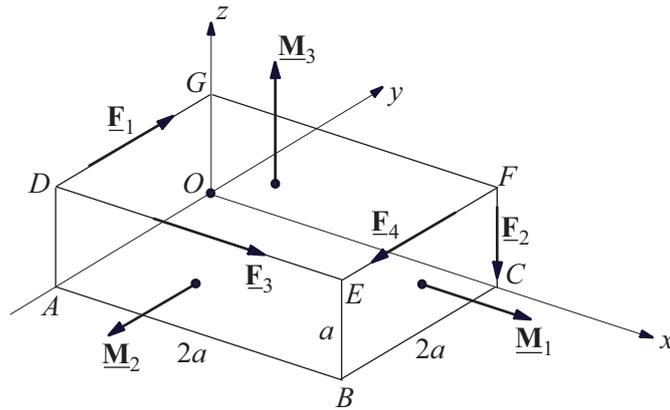


Abbildung 3.10: Skizze zur Aufgabe 1

Gegeben: Länge a , Kraft P , Beträge und Richtungen der Kräfte/Momente

Gesucht: $\underline{\mathbf{R}}$ und $\underline{\mathbf{M}}_O$

Lösung:

In einem ersten Schritt werden Kräfte und Momente vektoriell ausgedrückt.

$$\underline{\mathbf{F}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3P \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{F}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{F}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{M}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2aP \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{M}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}aP \end{pmatrix}$$

Die Resultierende lässt sich aus der Summe aller vorhandenen Kräfte gemäss Gleichung (3.1) berechnen:

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{F}}_2 + \underline{\mathbf{F}}_3 + \underline{\mathbf{F}}_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} P$$

Das resultierende Moment in O wird gemäss Gleichung (3.2) berechnet:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \sum_i \underline{\mathbf{M}}_i + \sum_i \underline{\mathbf{OA}}_i \times \underline{\mathbf{F}}_i$$

$$\sum_i \underline{\mathbf{M}}_i = \underline{\mathbf{M}}_1 + \underline{\mathbf{M}}_2 + \underline{\mathbf{M}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} aP$$

Für die Berechnung des Momentes der Kräfte wird folgende Eigenschaft verwendet: Das Moment einer Kraft ändert sich nicht, wenn die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird. Angewendet auf Kraft $\underline{\mathbf{F}}_1$:

$$\underline{\mathbf{M}}_O^{(\underline{\mathbf{F}}_1)} = \underline{\mathbf{OD}} \times \underline{\mathbf{F}}_1 = \underline{\mathbf{OG}} \times \underline{\mathbf{F}}_1$$

Der Angriffspunkt der Kraft F_1 darf dementsprechend auf der Kante DG beliebig gewählt werden. Das Moment der drei anderen Kräfte wird mit einer ähnlichen Überlegung berechnet.

$$\begin{aligned} \sum_i \underline{\mathbf{OA}}_i \times \underline{\mathbf{F}}_i &= \underline{\mathbf{OG}} \times \underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{OC}} \times \underline{\mathbf{F}}_2 + \underline{\mathbf{OD}} \times \underline{\mathbf{F}}_3 + \underline{\mathbf{OF}} \times \underline{\mathbf{F}}_4 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{2}P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4aP \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2}aP \\ 5aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aP \\ 0 \\ -2aP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2aP \\ \frac{13}{2}aP \\ 3aP \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das resultierende Moment im Punkt O lautet:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}aP \\ -2aP \\ \frac{3}{2}aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2aP \\ \frac{13}{2}aP \\ 3aP \end{pmatrix} = \frac{aP}{4} \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Damit wurde die Kräftegruppe auf ihre Dynamie $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}_O\}$ in Punkt O reduziert.

Aufgabe 2

Auf ein Oktaeder (Seitenlänge $\sqrt{2}a$, Höhe $2a$) wirken in den Eckpunkten die in der Skizze eingezeichneten Kräfte.

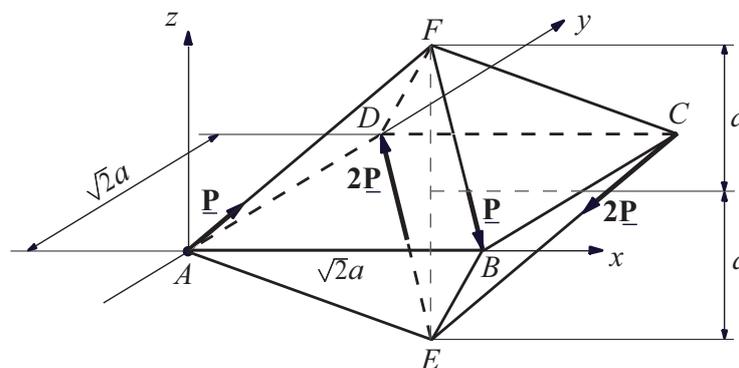


Abbildung 3.11: Skizze zur Aufgabe 2

- Bestimme die Resultierende.
- Bestimme das resultierende Moment bezüglich A und E .
- Bestimme zwei zusätzliche, in E und in F wirkende Kräfte $\underline{\mathbf{F}}_E$ und $\underline{\mathbf{F}}_F$ so, dass sich die aus allen Kräften bestehende Kräftegruppe auf ein einzelnes Moment $\underline{\mathbf{M}} = (2aP, 0, 0)^T$ in x -Richtung reduzieren lässt! Von der Kraft $\underline{\mathbf{F}}_E$ wissen wir, dass sie keine z -Komponente hat.

Gegeben: Länge a , Geometrie des Oktaeders, P

Gesucht: a) Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$

b) Momente $\underline{\mathbf{M}}_A$ und $\underline{\mathbf{M}}_E$

c) $\underline{\mathbf{F}}_E$ mit $F_{Ez} = 0$ und $\underline{\mathbf{F}}_F$, so dass sich die Kräftegruppe auf ein

einzelnes Moment $\underline{\mathbf{M}}^* = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ reduzieren lässt

Lösung:

a) Bevor die Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ berechnet werden kann, müssen die Kräfte $\underline{\mathbf{F}}_A$, $\underline{\mathbf{F}}_B$, $\underline{\mathbf{F}}_C$ und $\underline{\mathbf{F}}_D$ vektoriell bestimmt werden. Die Koordinaten der Eckpunkte sind:

$$A(0, 0, 0), B(\sqrt{2}a, 0, 0), C(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a, 0), \\ D(0, \sqrt{2}a, 0), E\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}, -a\right), F\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}a}{2}, a\right)$$

Die Kraft $\underline{\mathbf{F}}_A$ beträgt P und hat die gleiche Richtung wie Vektor $\underline{\mathbf{AF}}$:

$$\underline{\mathbf{F}}_A = \frac{\underline{\mathbf{AF}}}{|\underline{\mathbf{AF}}|} \cdot P = \frac{P}{|\underline{\mathbf{AF}}|} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ a \end{pmatrix} = \frac{P}{\sqrt{2}a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ \frac{\sqrt{2}a}{2} \\ a \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{F}}_A = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Kräfte $\underline{\mathbf{F}}_B$, $\underline{\mathbf{F}}_C$ und $\underline{\mathbf{F}}_D$ werden mit dem gleichen Vorgehen bestimmt:

$$\underline{\mathbf{F}}_B = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{F}}_C = P \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{F}}_D = P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Resultierende wird gemäss Formel (3.1) berechnet:

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i = \underline{\mathbf{F}}_A + \underline{\mathbf{F}}_B + \underline{\mathbf{F}}_C + \underline{\mathbf{F}}_D \\ \underline{\mathbf{R}} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Das Moment bezüglich A kann mit Hilfe von Formel (3.4) berechnet werden:

$$\underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{AA}} \times \underline{\mathbf{F}}_A + \underline{\mathbf{AB}} \times \underline{\mathbf{F}}_B + \underline{\mathbf{AC}} \times \underline{\mathbf{F}}_C + \underline{\mathbf{AD}} \times \underline{\mathbf{F}}_D \\ \underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{0}} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{M}}_A = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + aP \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + aP \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Das Moment bezüglich E wird mit Hilfe von Formel (3.5) berechnet:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_E &= \underline{\mathbf{M}}_A + \underline{\mathbf{E}}\mathbf{A} \times \underline{\mathbf{R}} \\ \underline{\mathbf{M}}_E &= aP \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + aP \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{M}}_E &= aP \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) Gemäss Angaben sind die Resultierende und das resultierende Moment der neuen Kräftegruppe:

$$\underline{\mathbf{R}}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{M}}^* = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die beiden Kräfte:

$$\underline{\mathbf{F}}_E = \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}}_F = \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix}$$

mit fünf unbekanntenen Komponenten.

Mit Hilfe der Resultierenden und des Moments werden sechs Gleichungen aufgestellt, aus denen die unbekanntenen Komponenten bestimmt werden können.

Die Resultierende $\underline{\mathbf{R}}^*$ der neuen Kräftegruppe $\{G^*\} = \{\underline{\mathbf{F}}_A, \underline{\mathbf{F}}_B, \underline{\mathbf{F}}_C, \underline{\mathbf{F}}_D, \underline{\mathbf{F}}_E, \underline{\mathbf{F}}_F\}$ soll verschwinden:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{R}}^* &= \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{F}}_E + \underline{\mathbf{F}}_F = \underline{\mathbf{0}} \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)\end{aligned}$$

Verschwimmt die Resultierende einer Kräftegruppe, so ist ihr Moment ortsunabhängig. Gemäss Formel (3.5) gilt:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \underline{\mathbf{M}}_Q + \underline{\mathbf{P}}\mathbf{Q} \times \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}_Q + \underline{\mathbf{P}}\mathbf{Q} \times \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{M}}_Q, \quad \forall \text{ Punkte } P, Q$$

Die Kräftegruppe $\{G^*\}$ lässt sich damit in jedem Punkt auf ein einzelnes Moment $\underline{\mathbf{M}}^* = (2aP, 0, 0)^T$ reduzieren. Hier wird die Kräftegruppe in E reduziert:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_E^* &= \underline{\mathbf{M}}_E + \underline{\mathbf{E}}\mathbf{E} \times \underline{\mathbf{F}}_E + \underline{\mathbf{E}}\mathbf{F} \times \underline{\mathbf{F}}_F = \underline{\mathbf{M}}^* \\ &= aP \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{0}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{pmatrix} = aP \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2F_{Fy} \\ 2F_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{M}}_E^* &= a \begin{pmatrix} -2F_{Fy} \\ 2P + 2F_{Fx} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2aP \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (**)\end{aligned}$$

Aus (**) folgt:

$$\begin{cases} 2aP = -2aF_{Fy} \Rightarrow F_{Fy} = -P \\ 2P + 2F_{Fx} = 0 \Rightarrow F_{Fx} = -P \end{cases}$$

Aus (*) folgt:

$$\begin{cases} -P + F_{Ex} + F_{Fx} = -2P + F_{Ex} \Rightarrow F_{Ex} = 2P \\ F_{Ey} + F_{Fy} = F_{Ey} - P = 0 \Rightarrow F_{Ey} = P \\ F_{Fz} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{F}}_E = \begin{pmatrix} 2P \\ P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{F}}_F = \begin{pmatrix} -P \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.7 Verständnisfragen

1. Was ist bei einer Kraft ausser ihrem Betrag und ihrer Richtung wesentlich?
2. Was sind innere und äussere Kräfte eines Systems?
3. Ist bei starren Körpern der Momentvektor vom Bezugspunkt abhängig?
4. Wie bestimmt man das Moment geometrisch?
5. Wann ist die Leistung einer Kraft null?
6. Wie ist die statische Äquivalenz zweier Kräftegruppen definiert?
7. Welche Grössen der Dynamik sind vom Bezugspunkt abhängig?
8. Unter welcher Bedingung lässt sich eine Kräftegruppe auf eine Einzelkraft bzw. auf ein Moment reduzieren?
9. Unter welcher Bedingung an ihrer Leistung ist eine Kräftegruppe im Gleichgewicht?
10. Worauf lässt sich eine parallele Kräftegruppe reduzieren?

Kapitel 4

Ruhe und Gleichgewicht

4.1 Hauptsatz der Statik

In einer Ruhelage eines Systems müssen notwendigerweise alle äusseren Kräfte und Momente für das System im Gleichgewicht sein. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\underline{\mathbf{R}}^{(a)} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \underline{\mathbf{M}}_O^{(a)} = \underline{\mathbf{0}} \quad (4.1)$$

Bemerkung: Diese notwendige Gleichgewichtsbedingungen sind im allgemeinen nicht ausreichend für bleibende Ruhe.

4.2 Standfestigkeit

Ein Körper bleibt standfest, solange die Gleichgewichtsbedingungen eine resultierende Normalkraft N liefern, die innerhalb der Standfläche angreift und gegen den Körper gerichtet ist (siehe Abb. 4.1).

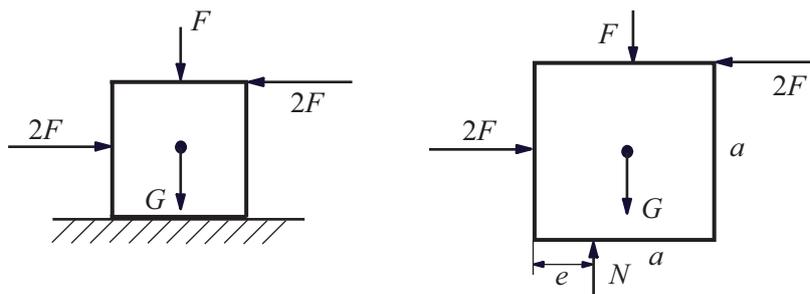


Abbildung 4.1: Freischneiden eines kubischen Klotzes

Bei diesem kubischen Klotz (reibungsfreie Auflagerung) sind die Bedingungen für Standfestigkeit:

- i) $e > 0$
- ii) $e < a$
- iii) $N > 0$

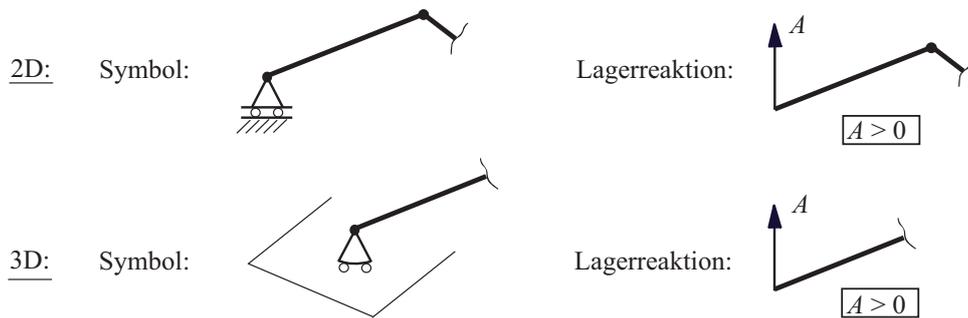
wobei a die Kantenlänge ist.

Sind diese Bedingungen erfüllt, ist der Klotz standfest. Sonst wird der Klotz kippen (z.B. $e < 0$) oder abheben (z.B. $N < 0$). Dieses akademische Beispiel wird in Aufgabe 4.1 weiter besprochen.

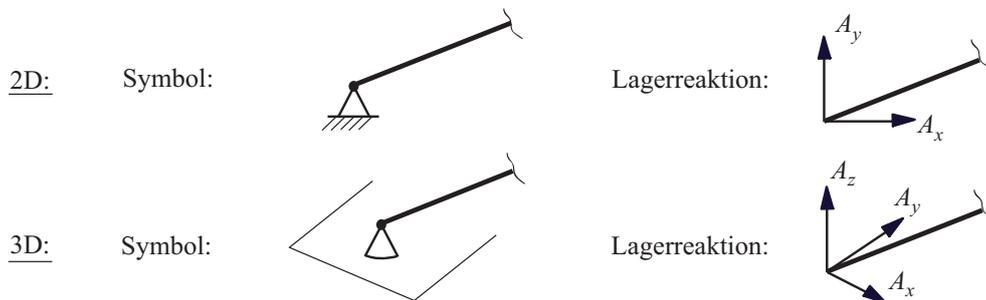
4.3 Lagerbindungen und Lagerkräfte

Die Art des Lagers entscheidet darüber, wie viele Bindungskomponenten einzuführen sind.

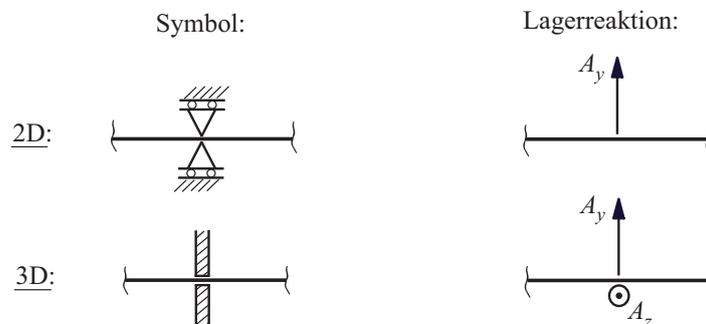
4.3.1 Auflager (reibungsfrei)



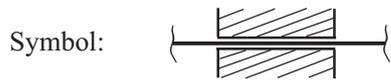
4.3.2 Gelenke (reibungsfrei)



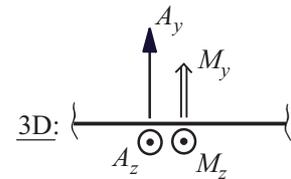
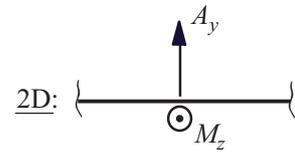
4.3.3 Kurzes Querlager (reibungsfrei)



4.3.4 Langes Querlager (reibungsfrei)

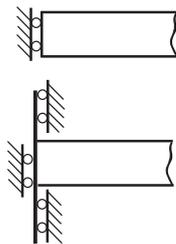


Lagerreaktion:

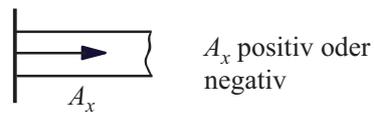


4.3.5 Längslager (reibungsfrei)

Symbol:

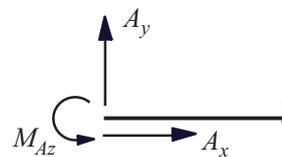


Lagerreaktion:

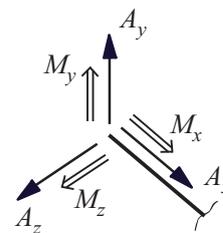
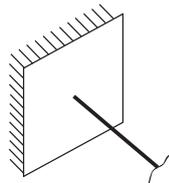


4.3.6 Einspannung

2D:



3D:

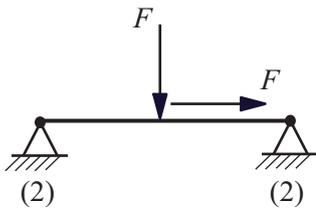


4.4 Statische Bestimmtheit

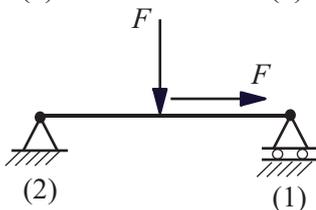
m : Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen

n : Anzahl der Bindungen (Unbekannten)

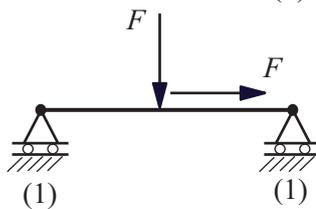
Bei einem statisch unbestimmtem Problem ist die Anzahl m der Gleichgewichtsbedingungen kleiner als die Anzahl n der Bindungen. Das Problem ist $(n-m)$ -fach statisch unbestimmt.



$m = 3, n = 4$ $n > m$
 \Rightarrow Problem 1-fach statisch unbestimmt



$m = 3, n = 3$ $n = m$
 \Rightarrow Problem statisch bestimmt



$m = 3, n = 2$ $n < m$
 \Rightarrow Problem statisch überbestimmt (Mechanismus)

4.5 Zur Lösung von Aufgaben der Statik

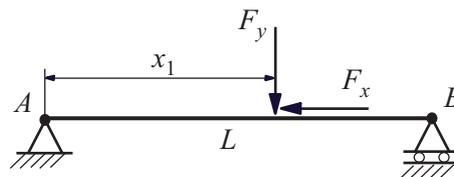


Abbildung 4.2: Musterbeispiel

- i) System abgrenzen.
- ii) Geeignetes Koordinatensystem einführen. Eine geeignete Einführung kann so erfolgen, dass die Lagerreaktionen in möglichst wenig verschiedenen Gleichgewichtsbedingungen auftreten. Die Koordinatenachsen sollen parallel zu den Lagerreaktionen eingeführt werden.

iii) Lagerreaktionen eintragen:

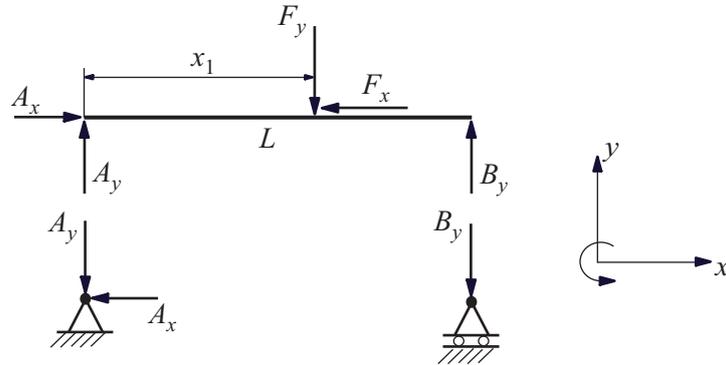


Abbildung 4.3: Trennung und Einführung der Lagerkräfte

iv) Statische Bestimmtheit: m , n bestimmen (siehe Abschnitt 4.4).

Hier: $n = 3$ und $m = 3 \Rightarrow$ System statisch bestimmt.

Falls nötig, System trennen.

v) 2D-Aufgaben: Komponentenbedigungen in x - und y -Richtung.

$$\sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow A_x - F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \Rightarrow A_y + B_y - F_y = 0 \quad (2)$$

3D-Aufgaben: $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$

vi) 2D-Aufgaben: Momentenbedingung um einen beliebigen Bezugspunkt, indem sich die Wirkungslinien von möglichst vielen unbekanntem Kräften schneiden.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_y \cdot x_1 + B_y \cdot L = 0 \quad (3)$$

3D-Aufgaben: $\mathbf{M}_P = \sum_i \mathbf{P}\mathbf{A}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, P beliebiger Punkt

vii) Auflösen des Gleichungssystems

$$\text{aus (1): } A_x = F_x$$

$$\text{aus (3): } B_y = \frac{x_1}{L} F_y$$

$$\text{aus (2): } A_y = F_y - B_y = F_y \left(1 - \frac{x_1}{L}\right)$$

viii) Diskussion der Ergebnisse auf Plausibilität (Abheben, Gleiten, Kippen,...).

Falls $F_y < 0$ ist B_y auch negativ \Rightarrow der Balken hebt ab.

Wichtig: Einheitskontrolle! Hier: $[A_y] = [N]$.

4.6 Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei ein kubischer Klotz (Kantenlänge a) vom Gewicht G auf einer reibungsfreien horizontalen Ebene. Am Klotz greifen gemäss Abbildung 4.4 drei Kräfte vom Betrag F , $2F$ und $2F$ an.

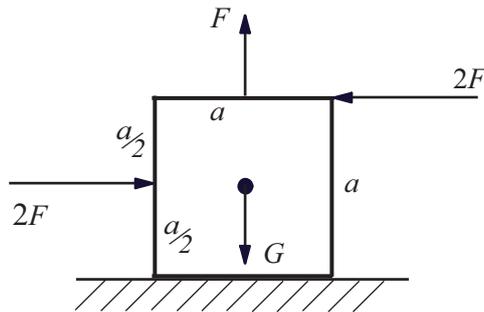


Abbildung 4.4: Klotz mit angreifenden Einzelkräften

Wie gross darf F sein, damit der Klotz ruhen kann?

Hinweis: Die Aufgabe darf als eine 2D-Aufgabe betrachtet werden.

Gegeben: Gewicht G , Kantenlänge a , Kraft F

Gesucht: Minimale und maximale Werte für F

Lösung:

Die Aufgabe wird gemäss Abschnitt 4.5 gelöst:

i) Der Klotz wird von der Ebene getrennt.

ii) Koordinatensystem wird eingeführt.

iii) Lagerreaktionen werden eingezeichnet: der Angriffspunkt e der Normalkraft N ist noch unbekannt.

iv) 2D-Aufgabe $\Rightarrow m = 3$

Unbekannten: $N, e \Rightarrow n = 2$

$m > n \Rightarrow$ Mechanismus? Nein, die Komponentenbedingung in der x -Richtung ist trivialerweise erfüllt $\Rightarrow m = 2, n = 2$, und das System ist statisch bestimmt.

v) Komponentenbedingungen:

$$\sum F_x : 2F - 2F = 0 \quad (1) \text{ (triviale Gleichung)}$$

$$\sum F_y : N + F - G = 0 \Rightarrow N = G - F \quad (2)$$

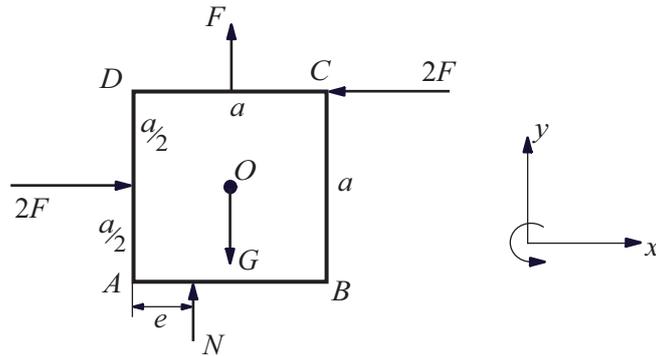


Abbildung 4.5: Trennung und Einführung der Lagerkräfte

vi) Momentenbedingung bezüglich Mittelpunkt O :

$$\begin{aligned}
 \sum M_O : 2F \frac{a}{2} - N \left(\frac{a}{2} - e \right) &= 0 \\
 \Rightarrow 2Fa - Na + 2Ne &= 0 \\
 \Rightarrow 2Ne &= a(N - 2F) \\
 \Rightarrow e &= \frac{a}{2} \cdot \frac{N - 2F}{N} \quad (3)
 \end{aligned}$$

vii) (2) in (3):

$$e = \frac{a}{2} \cdot \frac{G - 3F}{G - F}$$

viii) Standfestigkeit:

- $N > 0 \Rightarrow G - F > 0 \Rightarrow F < G$ (kein Abheben) (4)
- $e > 0 \Rightarrow \frac{G-3F}{G-F} > 0$
Nenner $G - F > 0$ (siehe (4))
 \Rightarrow Zähler $G - 3F > 0 \Rightarrow G > 3F \Rightarrow F < \frac{G}{3}$ (kein Kippen) (5)
- $e < a \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot \frac{G-3F}{G-F} < a$. Daraus folgt:
 $G - 3F < 2G - 2F$
 $\Rightarrow -G < F$
 $\Rightarrow F > -G$ (kein Kippen) (6)

Die Bedingungen für Gleichgewicht sind (5) und (6). Damit ist (4) automatisch erfüllt:

$$-G < F < \frac{G}{3}$$

Aufgabe 2

Zwei massenlose, starre Stäbe sind im Punkt B zu einem L-förmigen Träger zusammengeschweisst (Abmessungen siehe Abb. 4.6). Der Stab AB ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert. In den Punkten B und C sind zwei gewichtslose undeformbare Seile BD und CD befestigt. Als einzige Belastung wirkt eine gleichmässig über BC verteilte Last vom Gesamtbetrag P in Richtung $-\mathbf{e}_z$. Man bestimme die Lagerkraft im Punkt A sowie die Seilkräfte.

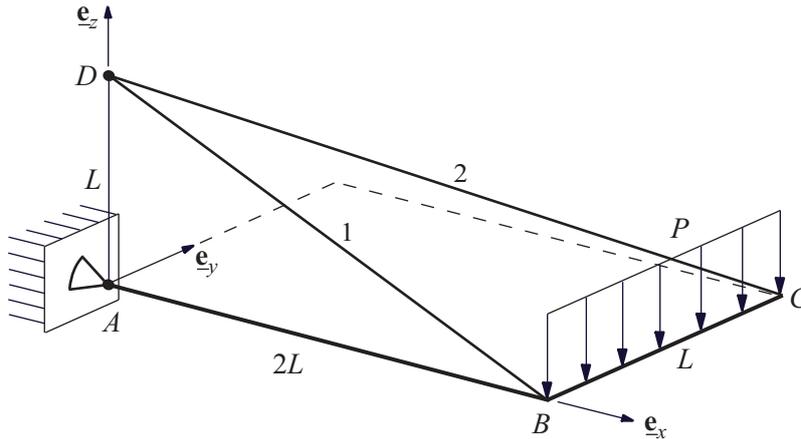


Abbildung 4.6: Skizze des mechanischen Systems mit Belastungen

Gegeben: Geometrie, Länge L , Kraft P

Gesucht: Lagerkraft $\underline{\mathbf{A}}$, Seilkräfte $\underline{\mathbf{S}}_1, \underline{\mathbf{S}}_2$

Lösung:

i) ii) iii) System wird freigeschnitten, Lagerreaktionen eingeführt und die gleichmässig verteilte Last auf eine Einzelkraft $\underline{\mathbf{P}}$ im Stabmittelpunkt E reduziert (siehe Abb. 4.7).

iv) 3D-Aufgabe \Rightarrow 6 Gleichgewichtsbedingungen (GGB), $m = 6$

Unbekannten: $A_x, A_y, A_z, |\underline{\mathbf{S}}_1|, |\underline{\mathbf{S}}_2| \Rightarrow n = 5$.

Mechanismus? Nein, die Momentenbedingung um die z -Achse ist trivial:

- die Wirkungslinien der Kräfte $\underline{\mathbf{S}}_1$ und $\underline{\mathbf{S}}_2$ schneiden die z -Achse.
- die Wirkungslinie der Last $\underline{\mathbf{P}}$ ist parallel zur z -Achse.

Daraus folgt: $\sum M_{Az} : 0 = 0$ und damit wird $m = n = 5$: die Aufgabe ist statisch bestimmt.

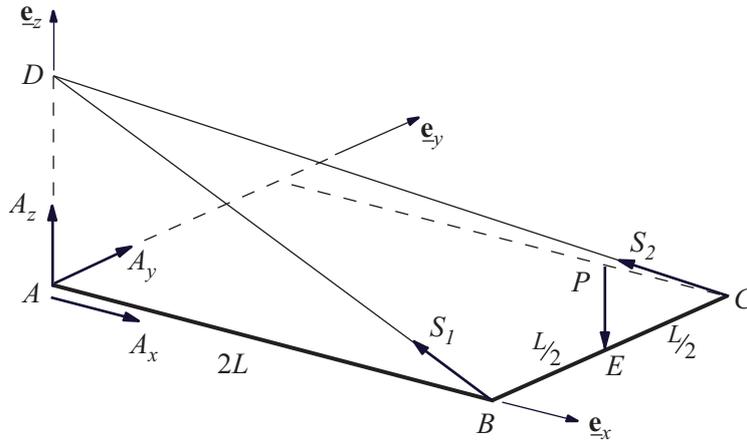


Abbildung 4.7: Freischneiden und Einführen der Lagerkräfte

v) Bestimmung der Richtung der Seilkräfte $\underline{\mathbf{S}}_1$ und $\underline{\mathbf{S}}_2$:

$$\underline{\mathbf{BD}} = \begin{pmatrix} -2L \\ 0 \\ L \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{S}}_1 = k_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1 \text{ unbekannt}$$

$$\underline{\mathbf{CD}} = \begin{pmatrix} -2L \\ -L \\ L \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{S}}_2 = k_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_2 \text{ unbekannt}$$

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{S}}_1 + \underline{\mathbf{S}}_2 + \underline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x - 2k_1 - 2k_2 & = 0 & (1) \\ A_y - k_2 & = 0 & (2) \\ A_z + k_1 + k_2 - P & = 0 & (3) \end{cases}$$

vi) Berechnung des Momentes $\underline{\mathbf{M}}_A$ im Punkt A:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}_A &= \underline{\mathbf{AB}} \times \underline{\mathbf{S}}_1 + \underline{\mathbf{AE}} \times \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{AC}} \times \underline{\mathbf{S}}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2L \\ \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2L \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \times k_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= L k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + LP \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + L k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -L \frac{P}{2} + L k_2 & = 0 & (4) \\ -2L k_1 + 2LP - 2L k_2 & = 0 & (5) \\ 0 & = 0 & (6) \end{cases} \end{aligned}$$

mit (6) als triviale Momentenbedingung um die z -Achse (siehe iv))

vii) aus (4): $k_2 = \frac{P}{2}$

$$\begin{aligned} \text{aus (5): } 2k_1 &= 2P - 2k_2 = 2P - P = P \\ &\Rightarrow k_1 = \frac{P}{2} \end{aligned}$$

$$\text{aus (1): } A_x = 2k_1 + 2k_2 = P + P = 2P$$

$$\text{aus (2): } A_y = k_2 = \frac{P}{2}$$

$$\text{aus (3): } A_z = P - k_1 - k_2 = P - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} = 0$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{A}} = P \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{S}}_1 = P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{S}}_2 = P \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

viii) Ein Seil kann nur auf Zug belastet sein. Das System ist im Gleichgewicht, solange k_1 und k_2 positiv bleiben:

$$k_1 = k_2 = \frac{P}{2} > 0 \Rightarrow P > 0$$

Da die Last $\underline{\mathbf{P}}$ in Richtung $-\underline{\mathbf{e}}_z$ wirkt, ist diese Bedingung immer erfüllt.

4.7 Verständnisfragen

1. Wie lautet der Hauptsatz der Statik?
2. Welche Kräfte müssen in den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper berücksichtigt werden?
3. Wie viele Gleichgewichtsbedingungen können wir am starren Körper im Raum bzw. in der Ebene definieren?
4. Warum sind bei einem starren Körper in der Ebene zwei Momentenbedingungen, aber nur eine Komponentenbedingungen trivial?
5. Bilden die äusseren Kräfte am ruhenden System ein Nullsystem?
6. Ist ein starrer Körper, dessen äusseren Kräfte ein Nullsystem bilden, in Ruhe?

Kapitel 5

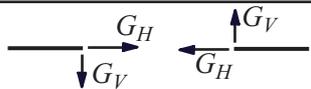
Systemtrennung

5.1 Einführung

Tragwerke bestehen oftmals aus mehreren starren Körpern, die durch Verbindungselemente miteinander verbunden sind. Diese Verbindungselemente übertragen Kräfte und Momente, die durch Schnitte in den Elementen sichtbar gemacht werden können. Sie werden nach dem Prinzip von "Actio-Reactio" gleich gross und entgegengesetzt auf gleichen Wirkungslinien an den getrennten starren Körpern eingeführt (also ist ihr Gesamtbetrag Null). Somit werden innere Kräfte des Gesamtsystems zu äusseren Kräften der abgetrennten Teilsysteme.

Merke: Die Verbindungsreaktionen wurden korrekt eingeführt, wenn bei einer (gedanklichen) Zusammensetzung des Gesamtsystems aus den Teilsystemen alle Kräfte bis auf die äusseren Kräfte des Gesamtsystems wieder verschwinden.

5.2 Wichtige Verbindungselemente

Name	Symbol	Verbindungsreaktionen	Anzahl Verbindungsreaktionen	
			2D	3D
Gelenk			2	3
Pendelstab, -stütze			1	1

Statische Bestimmtheit im ebenen Fall (vergleiche mit Kapitel 4.4) :

$$m + v = 3n$$

m : Lagerreaktionen

v : Verbindungsreaktionen

n : Anzahl starrer Teilkörper

5.3 Dreigelenkbogen

Ein in der Praxis häufig auftretendes Tragwerk ist der Dreigelenkbogen. Er ist vom Zweigelenkbogen abgeleitet:

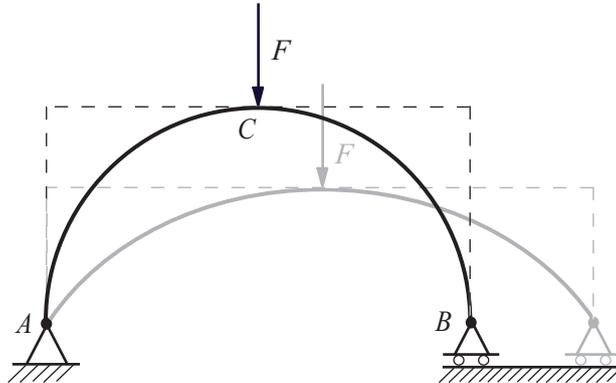


Abbildung 5.1: Zweigelenkbogen

In diesem Beispiel ist der Bogen statisch bestimmt gelagert. Da reale Systeme nie vollkommen starr sind, könnten sehr grosse, unzulässige Deformationen auftreten (siehe Abb. 5.1, grau). Dies lässt sich verhindern, indem in Punkt B ebenfalls ein Festlager angebracht wird. Da dann das Tragwerk nicht mehr statisch bestimmt ist, wird in Punkt C ein Gelenk angebracht. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Gesamtsystem anschliessend wieder statisch bestimmt ist:

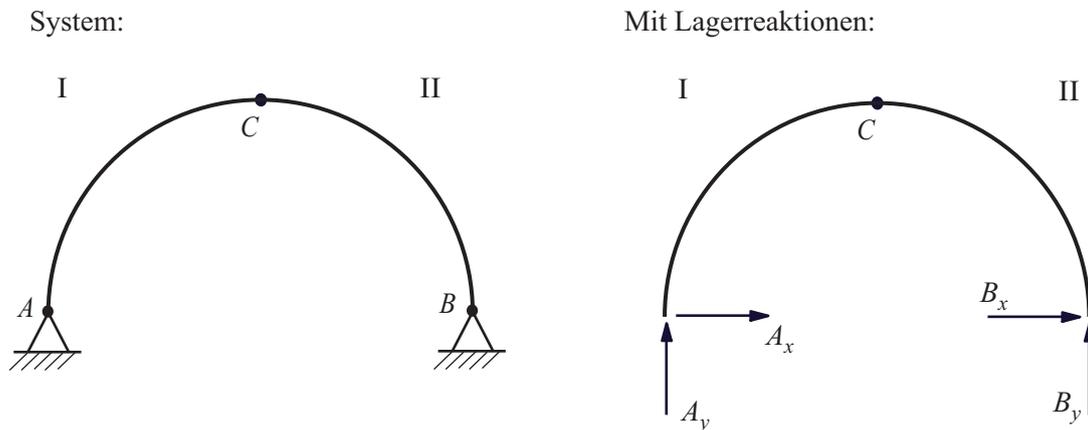


Abbildung 5.2: Dreigelenkbogen und seine Trennung von der Umgebung

Unbekannte: $A_x, A_y, B_x, B_y \Rightarrow m = 4$

Gleichungen: $\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i M_{iz}(A) = 0 \Rightarrow n = 1$

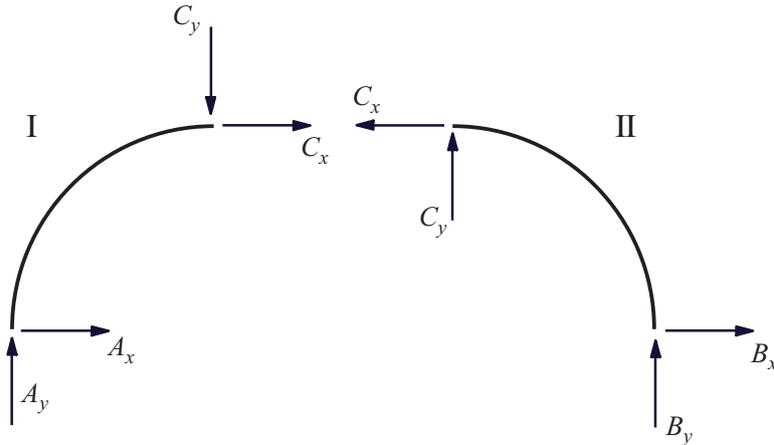


Abbildung 5.3: Systemtrennung und Einführung der Schnittkräfte

Unbekannte: Teil I: A_x, A_y, C_x, C_y
 Teil II: B_x, B_y

$$\Rightarrow m = 4 \text{ und } v = 2$$

Gleichungen: Teil I: $\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i M_{iz}(A) = 0$
 Teil II: $\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i M_{iz}(B) = 0$
 $\Rightarrow n = 2$

Es liegen sechs Unbekannte und sechs Gleichungen und somit statische Bestimmtheit vor.

5.4 Lösungsweise von Aufgaben zur Systemtrennung

Schritte i) bis iv) wie bei der Bestimmung der Lagerreaktionen (siehe Kap.4.5)

v) Systemtrennung. System in seine starren Körper aufteilen und die dabei auftretenden Verbindungsreaktionen als äussere Kräfte der Untersysteme eintragen. Auf das folgende ungetrennte System wirken 2 + 2 Lagerreaktionen (ebener Fall). Am Gesamtsystem können nur drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden und somit sind die Lagerreaktionen am Gesamtsystem nicht bestimmbar \Rightarrow Trennung!

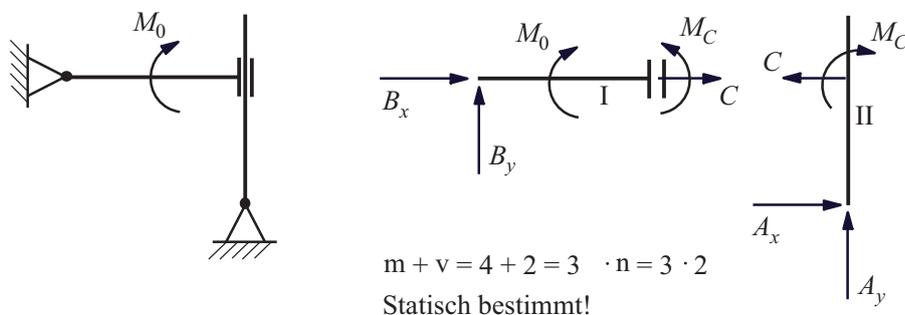


Abbildung 5.4: Systemtrennung mit sichtbargemachten Verbindungsreaktionen

vi) Aufstellen der Komponenten- und Momentenbedingungen für jeden starren Körper und lösen der Gleichungen.

Stab 1:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 \Rightarrow B_x + C = 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \Rightarrow B_y = 0 \\ \sum M_z(B) &= 0 \Rightarrow M_C - M_O = 0\end{aligned}$$

Stab 2:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 \Rightarrow A_x - C = 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \Rightarrow A_y = 0 \\ \sum M_z(A) &= 0 \Rightarrow -M_C + C \cdot L = 0\end{aligned}$$

vii) Diskussion der Ergebnisse. Anschaulich ist, dass \underline{M}_O und \underline{M}_C entgegengerichtet sind.
Hinweis: Bei manchen Aufgaben kann es hilfreich sein, Komponentenbedingungen oder Momentenbedingungen am Gesamtsystem aufzustellen.

5.5 Aufgabe

Das gezeichnete System besteht aus zwei gewichtslosen Stäben AC und BD . Man bestimme die Lagerreaktionen in A und B sowie die inneren Kräfte in C .

Hinweis: Beim Lager in C handelt es sich um ein langes Querlager.

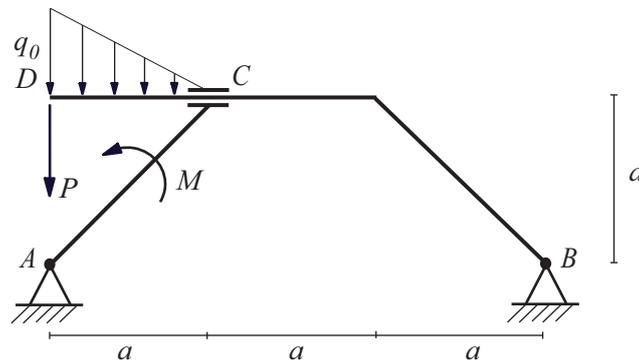


Abbildung 5.5: Gesamtsystem

Gegeben: Geometrie, a , q_0 , P und M

Gesucht: Lagerreaktionen in A , B und C

Lösung:

- i) System abgrenzen von Umgebung
- ii) Koordinatensystem einführen

iii) Lagerreaktion positiv in positiver Koordinatenrichtung einführen. Es treten vier unbekannte Lagerreaktionen auf (da nur drei Gleichungen aus den Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, muss das System weiter getrennt werden).

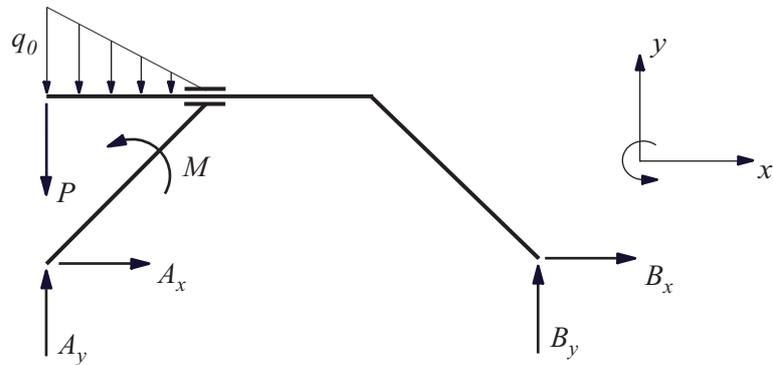


Abbildung 5.6: Einführung der Lagerkräfte

Bei manchen Aufgaben können u.U. schon hier aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem Lagerreaktionen bestimmt werden.

iv) Sind die Lagerreaktionen am Gesamtsystem bestimmbar? Nein, da nur drei Gleichungen für vier Unbekannte zur Verfügung stehen.

v) System trennen und Verbindungsreaktionen eintragen:

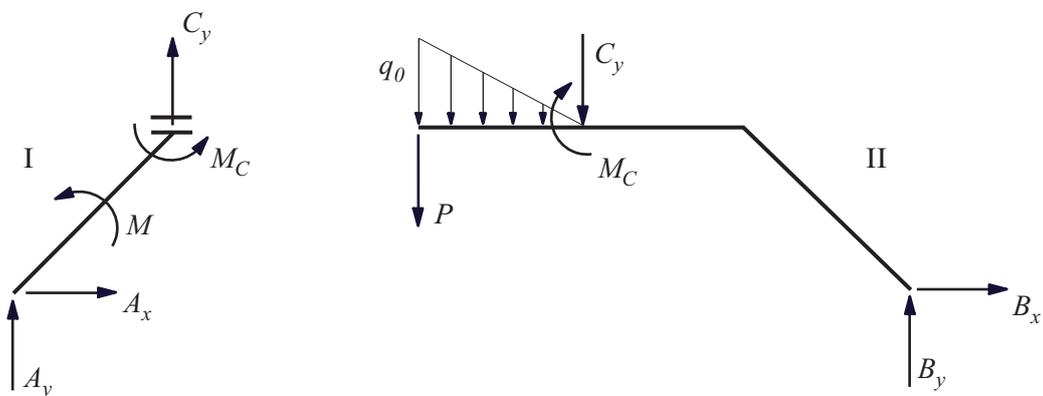


Abbildung 5.7: Systemtrennung

vi) Gleichgewichtsbedingungen an Teilsystemen aufstellen:

$$\text{Teil I: } \sum F_x : A_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : A_y = -C_y \quad (2)$$

$$\sum M_A : M + M_C + C_y a = 0 \quad (3)$$

$$\text{Teil II: } \sum F_x : B_x = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y : B_y - P - \frac{1}{2}q_0 a - C_y = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_B : 3Pa + \frac{1}{2}q_0 a \cdot \frac{8}{3}a + C_y 2a - M_C = 0 \quad (6)$$

$$\text{aus (3): } M_C = -M - C_y a \quad (7)$$

$$\text{in (6): } 3Pa + \frac{4}{3}q_0 a^2 + C_y 2a + M + C_y a = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow C_y = -P - \frac{4}{9}q_0 a - \frac{M}{3a} = -A_y \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ in (7): } \Rightarrow M_C &= -M + Pa + \frac{4}{9}q_0 a^2 + \frac{M}{3a}a \\ &= -\frac{2}{3}M + Pa + \frac{4}{9}q_0 a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ in (5): } \Rightarrow B_y - P - \frac{1}{2}q_0 a + P + \frac{4}{9}q_0 a + \frac{M}{3a} &= 0 \\ B_y &= -\frac{M}{3a} + \frac{1}{18}q_0 a \end{aligned}$$

vii) Diskussion der Ergebnisse. Intuitiv einsichtig ist, dass C_y negativ sein sollte; ebenso wie dann \underline{M}_C dem äusseren Moment \underline{M} entgegengerichtet ist.

5.6 Verständnisfragen

1. Was ist eine Bindung?
2. Was ist eine (für eine Bindung) zulässige bzw. eine unzulässige Bewegung?
3. Wodurch ist eine reibungsfreie Bindung charakterisiert?
4. Skizziere mindestens vier gebräuchliche Bindungen!
5. Wann ist ein System statisch unbestimmt, wann ist es statisch überbestimmt?
6. Wie viele Unbekannte müssen beim Lösen einer Einspannung im 2D bzw. 3D eingeführt werden? Was für Unbekannte sind es?
7. Warum müssen Systeme, wie z.B. ein Dreigelenkbogen, getrennt werden? Was ist das Ziel dieser Systemtrennung?
8. Wie viele neue Gleichgewichtsbedingungen kann man nach der Trennung bei einem ebenen System aus zwei Körpern aufstellen?

Kapitel 6

Statisch bestimmte Fachwerke

6.1 Ideale Fachwerke

Ein ideales Fachwerk hat folgende Eigenschaften:

- Alle Knoten sind reibungsfreie Gelenke.
- das Gewicht der Stäbe wird vernachlässigt \Rightarrow Stäbe gewichtslos.
- alle Knoten befinden sich am Ende von Stäben.
- alle Lasten greifen nur an den Knoten an.

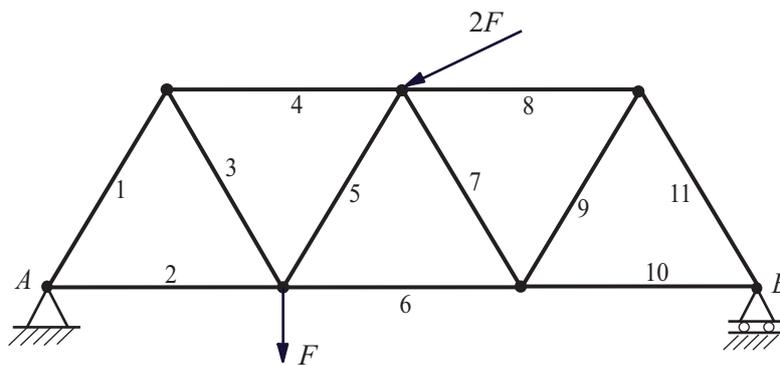


Abbildung 6.1: Ideales ebenes Fachwerk

6.2 Pendelstütze (vgl. Kap. 5)

Betrachtet wird ein aus einem idealen Fachwerk freigeschnittener Stab:

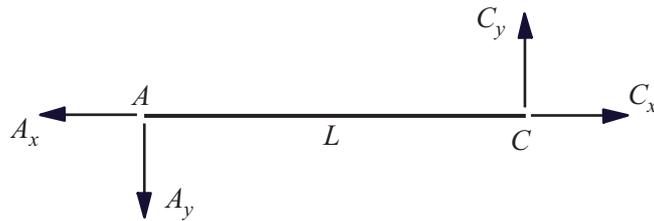


Abbildung 6.2: Pendelstütze

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\sum F_x : A_x = C_x \quad (1)$$

$$\sum F_y : A_y = C_y \quad (2)$$

$$\sum M_A : C_y \cdot L = 0 \quad (3)$$

$$\text{Aus (3) und (2): } A_y = C_y = 0$$

Der Stab wird somit nur auf Zug oder Druck belastet. Ein solcher Stab heisst Pendelstütze. Bei einer Zerlegung werden nur Stabkräfte in Stabrichtung eingeführt.

Bemerkung: Greift zum Beispiel eine äussere Kraft F in der Mitte des Stabes (nicht ideales Fachwerk) an, dann verschwinden die Querkräfte A_y und C_y nicht mehr.

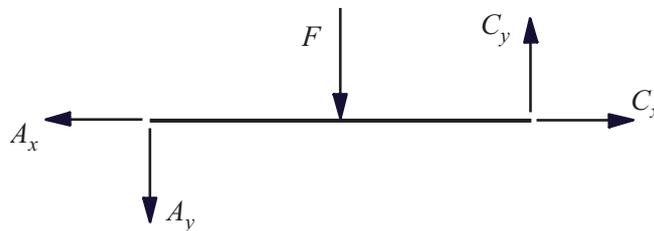


Abbildung 6.3: Stab belastet mit einer Einzelkraft in seiner Mitte

Dieser Stab ist keine Pendelstütze! Bei einer Zerlegung müssen Kräfte senkrecht zur Stabrichtung eingeführt werden!

6.3 Bestimmung der Stabkräfte bei einem idealen Fachwerk

6.3.1 Knotengleichgewicht

Beim Gleichgewicht am Knoten werden die Kräfte berücksichtigt, die von den Stäben auf den Knoten ausgeübt werden sowie die äusseren Kräfte an diesem Knoten.

Vorgehen:

- Lagerkräfte bestimmen
- Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten aufstellen. Stabkräfte als Zugkräfte einführen (Pendelstütze). Jeweils zwei (in 2D) bzw. drei (in 3D) Gleichungen

- Gleichgewichtssysteme auflösen \Rightarrow Stabkräfte S_i
- $S > 0$: Belastung auf Zug
- $S < 0$: Belastung auf Druck

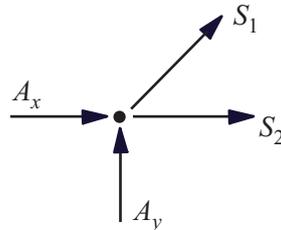


Abbildung 6.4: Knotengleichgewicht im Punkt A des Fachwerks von Abb. 6.1

6.3.2 Dreikräftechnitt (Rittersches Schnittverfahren)

Vorgehen:

- Lagerkräfte bestimmen
- an einer geeigneten Stelle, an der drei unbekannte Stabkräfte wirken, Stäbe durchschneiden und Stabkräfte S_i einführen
- Momentengleichgewicht am Schnittpunkt zweier unbekannter Stabkräfte \Rightarrow Berechnung der dritten Stabkraft
- Komponentenbedingungen \Rightarrow Bestimmung der beiden anderen unbekannt Stabkräfte

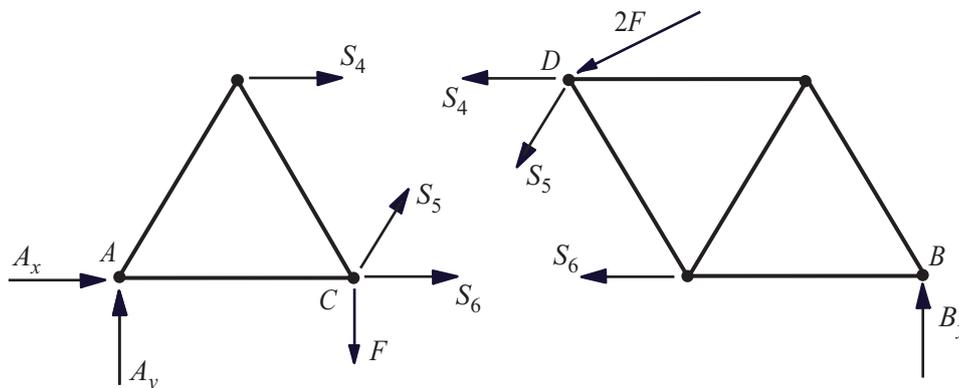


Abbildung 6.5: Dreikräftechnitt am Fachwerk von Abb. 6.1

6.3.3 Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistung (PdvL)

Vorgehen:

- Stab entfernen und Stabkraft S_i als Zugkraft einführen
- zulässige virtuelle Bewegung einführen, d.h. eine Bewegung einführen, die mit den kinematischen Bindungen (Lager) des Fachwerks verträglich ist
- Bestimmung der Geschwindigkeit in den Knoten, in denen Kräfte wirken
- Aus dem Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL) folgt: $P = 0 \Rightarrow$ Berechnung der unbekannten Stabkraft S_i

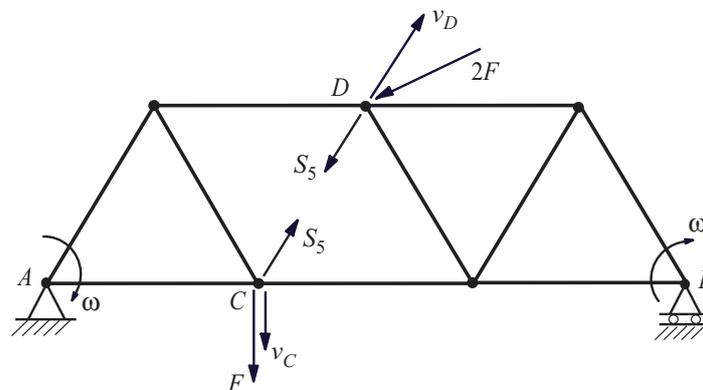


Abbildung 6.6: PdvL am Fachwerk von Abb. 6.1

Wichtig: Immer nur einen Stab entfernen!

6.4 Aufgaben

Aufgabe 1

Das abgebildete Fachwerk besteht aus starren, gewichtslosen Stäben der Länge a , $\frac{a}{2}$ und $\sqrt{5} \frac{a}{2}$. Die Stäbe sind reibungsfrei miteinander gelenkig verbunden. Das Fachwerk ist im Punkt A reibungsfrei gelenkig gelagert und in E reibungsfrei horizontal verschiebbar aufgelagert. Am Fachwerk greifen in C , G und L drei Kräfte vom Betrag F an (siehe Abb. 6.7). Man bestimme die Kräfte in den Stäben DK und FL .

Gegeben: Geometrie des Fachwerkes, Kraft F , Länge a

Gesucht: Stabkräfte S_{DK} und S_{FL}

Lösung:

Stab DK

Zwei Lösungswege: Dreikräftechnitt oder PdvL.

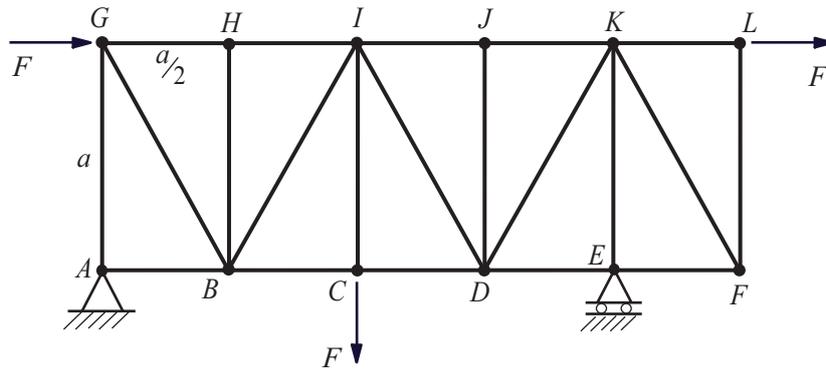


Abbildung 6.7: ideales ebenes Fachwerk

Dreikräfteschnitt

Für den Dreikräfteschnitt werden die Auflagerkräfte benötigt:

$$\sum F_x : F + F + A_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : A_y + E_y - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_a : Fa + Fa + Fa - E_y 2a = 0 \quad (3)$$

aus (1) folgt : $A_x = -2F$

aus (3) folgt : $E_y = \frac{3}{2}F$ (> 0 , wenn $F > 0$, Ok)

in (2) eingesetzt : $A_y = F - E_y = -\frac{1}{2}F$

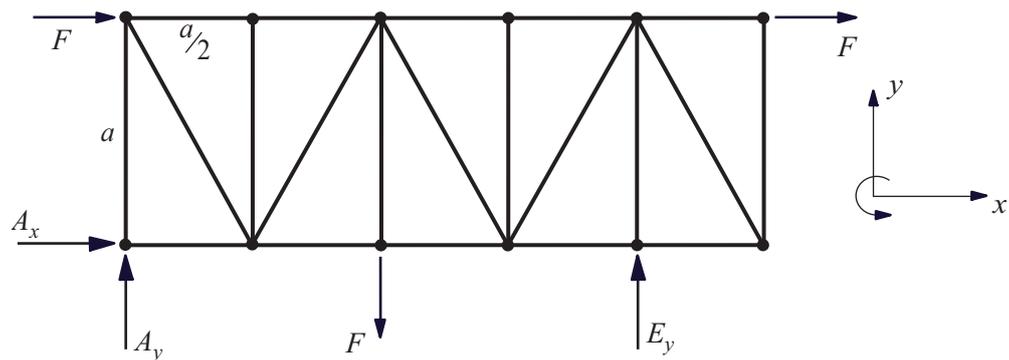


Abbildung 6.8: Freischneiden und Einführen der Lagerkräfte

Stäbe JK , DK , DE durchschneiden, rechten Teil betrachten. Komponentenbedingung in y -Richtung:

$$\begin{aligned} -S_{DK} \cdot \cos \alpha + E_y &= 0 \\ \Rightarrow S_{DK} &= \frac{3}{2} F \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

α ist unbekannt, aber $\cos \alpha$ kann geometrisch ermittelt werden:

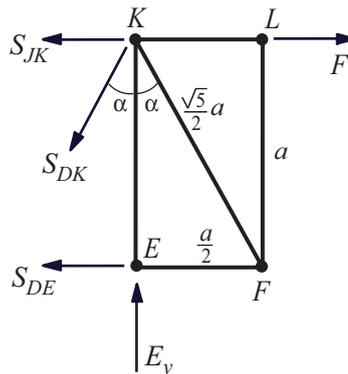


Abbildung 6.9: Dreikräftechnitt

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \Rightarrow S_{DK} &= \frac{3}{2} F \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4} F \end{aligned}$$

PdvL

Vorteil: Hier braucht man keine Auflagerkräfte, solange die eingeführte virtuelle Bewegung mit der Lagerung verträglich ist. Der Stab DK wird entfernt und eine Rotation mit Rotationsgeschwindigkeit ω um A wird eingeführt.

Geschwindigkeitsbestimmung an Knoten, an denen Kräfte wirken (Vorgehen in 2.6.3 beschrieben). Starre Körper: $ADJG$, $EFLK$, Stäbe DE und JK .

$$v_G = \omega \cdot a, \quad v_C = \omega \cdot a, \quad v_D = \frac{3}{2} \omega \cdot a$$

Im Punkt E ist nur eine horizontale Verschiebung v_E möglich, aber $v'_D = 0$ (v_D projiziert auf DE). Gemäss dem Satz der projizierten Geschwindigkeiten ist $v'_E = 0$ und $v_E = v'_E$. Daraus folgt $v_E = 0$. E ist das Momentanzentrum von $EFLK$, mit einer Rotationsgeschwindigkeit $\omega_2 = \omega$ (Parallelogrammregel). Es gilt dann:

$$v_K = \omega \cdot a, \quad v_L = \frac{\sqrt{5}}{2} \omega \cdot a$$

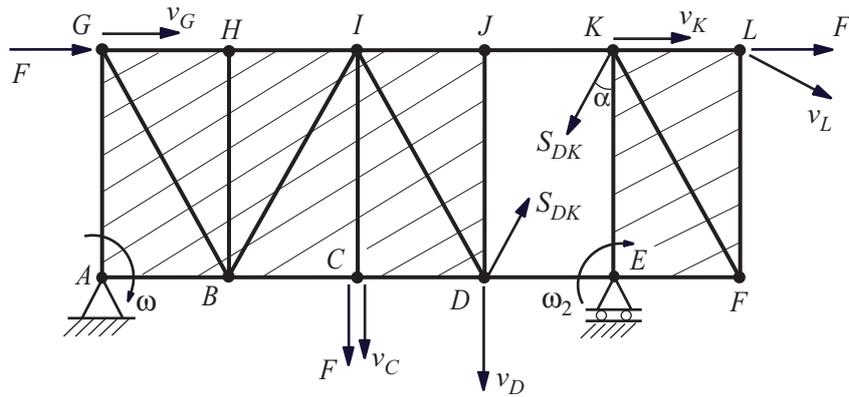


Abbildung 6.10: Virtueller Bewegungszustand nach Entfernung des Stabes DK

Nach dem PdvL muss $P = 0$ sein:

$$P = v_G \cdot F + v_C \cdot F - v_D \cdot S_{DK} \cos \alpha - v_K \cdot S_{DK} \sin \alpha + v_L \cdot F \cos \alpha$$

$$\text{wobei } \sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \omega a F + \omega a F - \omega a \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} S_{DK} - \omega a \frac{1}{\sqrt{5}} S_{DK} + \omega a \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} F = 0$$

$$\Rightarrow 3P - \frac{4}{\sqrt{5}} S_{DK} = 0$$

$$\Rightarrow S_{DK} = \frac{3\sqrt{5}}{4} F$$

Stab FL

Zwei Lösungswege: Knotengleichgewicht oder PdvL.

Knotengleichgewicht

Bei einem Knotengleichgewicht im Punkt L sieht man sofort, dass der Stab FL unbelastet sein muss: $\sum F_y : S_{FL} = 0$

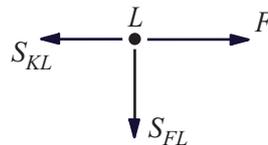


Abbildung 6.11: Knotengleichgewicht im Punkt L

PdvL

Stab FL entfernen. Rotation des Stabes KL um K einführen. Starre Körper $AFKG$ und Stab KL .

$$v_L = \omega \frac{a}{2}$$

Nach dem PdvL muss $P = 0$ sein:

$$\Rightarrow v_L \cdot S_{FL} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{FL} = 0$$

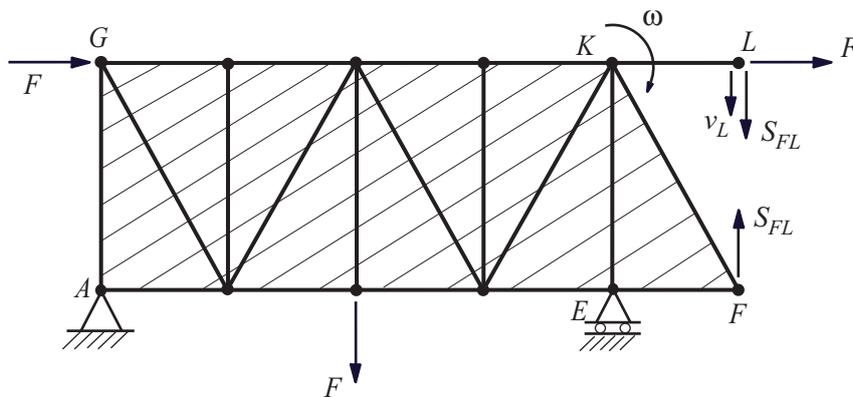


Abbildung 6.12: Virtueller Bewegungszustand nach Entfernung des Stabes FL

Aufgabe 2

Das abgebildete Fachwerk besteht aus starren gewichtslosen Stäben der Länge a , die reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Das Fachwerk ist im Punkt A reibungsfrei aufgelagert und im Punkt B reibungsfrei gelenkig gelagert. Am Stab BC wirkt im Punkt C ein Moment vom Betrag $M = 3Fa$. Im Knoten H und im Mittelpunkt des Stabes EG greifen zwei Kräfte vom Betrag F an.

- Man bestimme die Lagerkräfte in A und B .
- Man berechne die Stabkräfte S_1 und S_2 .

Gegeben: Geometrie, F , a , $M = 3Fa$

Gesucht: S_1 und S_2

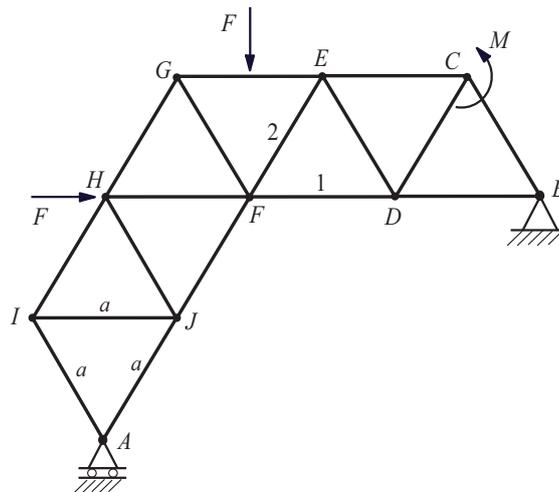


Abbildung 6.13: Ebenes Fachwerk

Lösung:

a) Lagerkräfte:

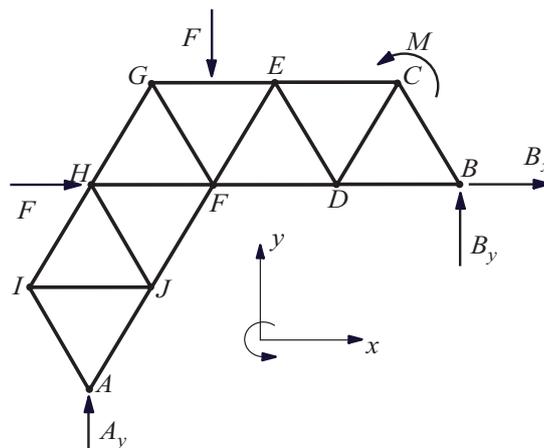


Abbildung 6.14: Freischnitten und Einführen der Lagerkräfte

$$\begin{aligned} \sum F_x : B_x + F &= 0 \quad \Rightarrow B_x = -F \\ \sum F_y : A_y + B_y - F &= 0 \\ \sum M_B : M + F \cdot 2a - A_y \cdot 3a &= 0 \\ &\Rightarrow 3A_y a = 2Fa + 3Fa = 5Fa \\ &\Rightarrow A_y = \frac{5}{3}F \quad \Rightarrow B_y = -\frac{2}{3}F \end{aligned}$$

Diskussion: $A_y = \frac{5}{3}F \Rightarrow$ kein Abheben, wenn $F > 0$.

b) **Stabkräfte S_1 und S_2 mit der Methode des Dreikräfteschnittes.**

Vorteil: sehr kurz, S_1, S_2 bestimmbar mit einem Schnitt.

Das Fachwerk ist nicht ideal (Einzelmoment M , Kraft F in der Mitte des Stabes GE). Die Kraft F in der Mitte von GE kann in den Knoten G und E reduziert werden, so dass die zu schneidenden Stäbe GE, EF, DF Pendelstützen sind.

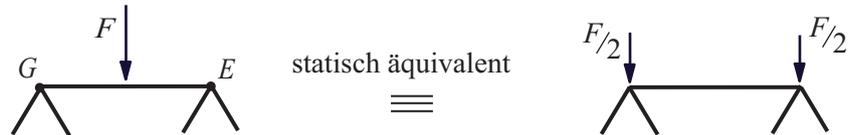


Abbildung 6.15: Reduktion der Einzelkraft F auf die Knoten G und E

Lagerkräfte bestimmen (siehe a))

Stäbe durchschneiden, betrachtet wird nur der rechte Teil:

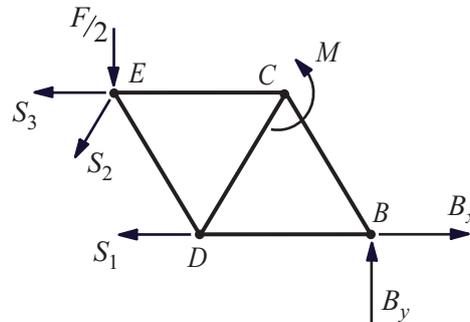


Abbildung 6.16: Dreikräfteschnitt

Momentengleichgewicht im Punkt E :

$$\begin{aligned} \sum M_E : -S_1 \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} + M + B_y \frac{3}{2} a + B_x a \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \\ \Rightarrow S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} &= 3F + \frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3} F \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (-F) = 3F - F - \frac{\sqrt{3}}{2} F \\ \Rightarrow S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} &= F \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow S_1 = F \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \end{aligned}$$

S_1 ist eine Zugkraft.

Komponentenbedingung in y -Richtung:

$$\begin{aligned} \sum F_y : -S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} F + B_y &= 0 \Rightarrow S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{3} F - \frac{1}{2} F \\ \Rightarrow S_2 &= -\frac{7\sqrt{3}}{9} F \end{aligned}$$

Der Stab EF ist auf Druck belastet.

Stabkräfte bei Anwendung des PdvL.

Vorteil: Lagerkräfte nicht nötig.

Mit dem PdvL müssen dagegen die beiden Stäbe separat betrachtet werden:

- Stab 1: Der Stab 1 wird entfernt (Pendelstütze) und eine Rotation ω um B eingeführt.

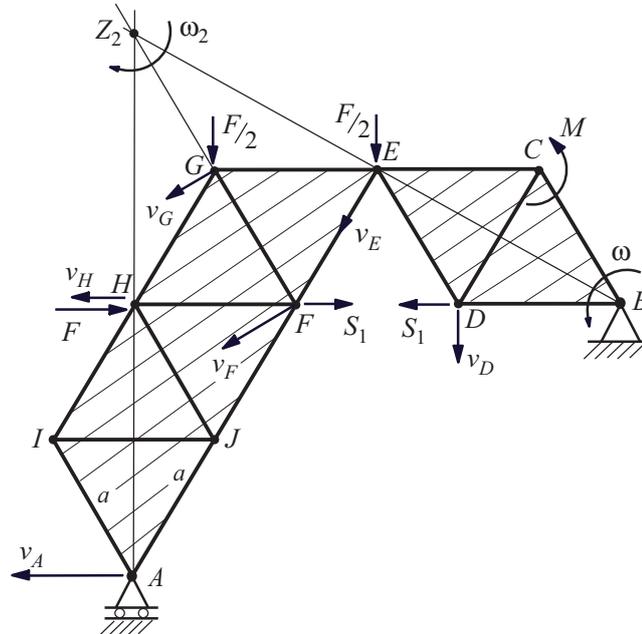


Abbildung 6.17: Virtueller Bewegungszustand nach Entfernung von Stab 1

A ist horizontal verschiebbar gelagert $\Rightarrow v_A$ horizontal. Das System besteht aus zwei starren Körpern. Der rechte Körper dreht sich mit ω um B . Die Geschwindigkeiten können in E und D berechnet werden:

$$v_E = \sqrt{3}a\omega, \quad v_D = a\omega$$

Der linke Körper dreht sich mit ω_2 um Z_2 . Z_2 , Momentanzentrum des linken Körpers, ist der Schnittpunkt der Senkrechten auf v_E und v_A .

$$v_E = \sqrt{3}a \cdot \omega = \sqrt{3}a \cdot \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega$$

$$v_G = a\omega, \quad v_F = 2a\omega, \quad v_H = \sqrt{3}a\omega$$

Aus dem PdvL, $P = 0$:

$$\begin{aligned} P &= -Fv_H - S_1v_F \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{F}{2}v_G \frac{1}{2} + \frac{F}{2}v_E \frac{\sqrt{3}}{2} + M\omega = 0 \\ &\Rightarrow -F\sqrt{3}a\omega - S_1\sqrt{3}a\omega + F\frac{1}{4}a\omega + F\frac{3}{4}a\omega + F3a\omega = 0 \\ &\Rightarrow S_1\sqrt{3} = 4F - \sqrt{3}F \quad \Rightarrow \quad S_1 = F \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \end{aligned}$$

- Stab 2: Der Stab 2 wird entfernt (Pendelstütze) und eine Rotation ω um B eingeführt. Die starren Körper sind: $AFGI$, $BMED$, Stäbe EG und DF . Die Geschwindigkeiten können in E und D berechnet werden:

$$v_E = \sqrt{3}a\omega, \quad v_D = a\omega$$

Mit dem SdpG weiss man, dass v_F senkrecht auf DF steht. Z_2 muss dann auf einer Geraden senkrecht auf v_F liegen, die durch den Punkt F geht. Dazu muss Z_2 auch auf einer Linie senkrecht auf v_A liegen. Daraus folgt: $Z_2 = H$.

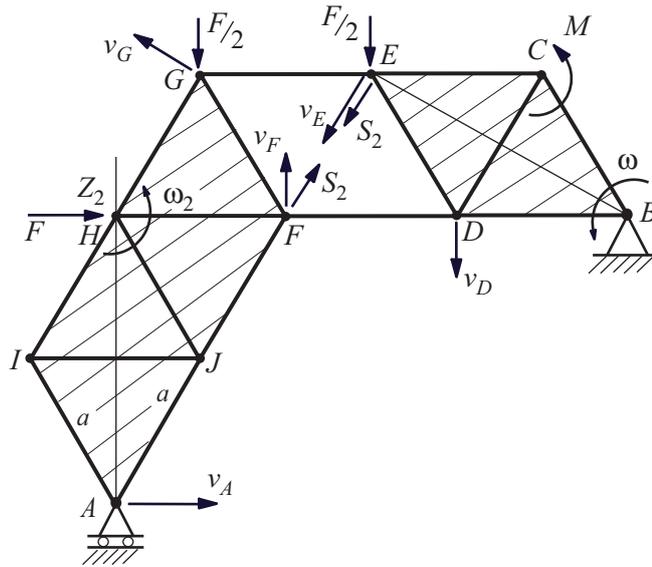


Abbildung 6.18: Virtueller Bewegungszustand nach Entfernung von Stab 2

Aus der Parallelogrammregel:

$$\begin{aligned} \omega_{DE} = \omega_{FG} &\Rightarrow \omega_2 = \omega \\ v_G = a\omega, \quad v_F = a\omega, \quad v_A = \sqrt{3}a\omega \end{aligned}$$

Aus dem PdvL, $P = 0$:

$$\begin{aligned} P &= -v_G \frac{F}{2} + v_F S_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + v_E S_2 + v_E \frac{F}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + M\omega = 0 \\ \Rightarrow -\frac{F}{4}a\omega + S_2 \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega + S_2 \sqrt{3}a\omega + F \frac{3}{4}a\omega + 3Fa\omega &= 0 \\ \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}S_2 &= \frac{F}{4} - \frac{3F}{4} - 3F = -\frac{14}{4}F \\ \Rightarrow S_2 &= -\frac{7\sqrt{3}}{9}F \end{aligned}$$

Bemerkung: Wird die Aufgabe mit Knotengleichgewicht gelöst, muss man auf alle Stäbe achten, die keine Pendelstütze sind. Beispiel: Knoten B

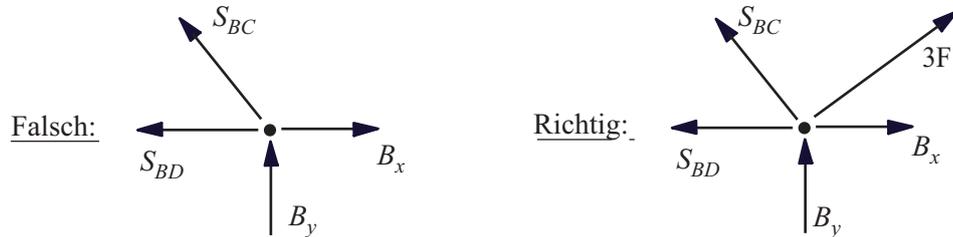


Abbildung 6.19: Knotengleichgewicht im Punkt B

In diesem Fall ist der Stab BC keine Pendelstütze. Die Querkraft $3F$ ist für das Gleichgewicht notwendig (Momentenbedingung).

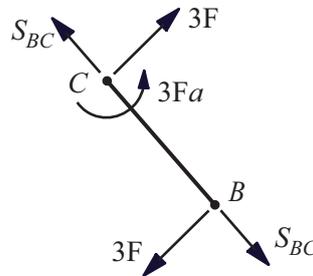


Abbildung 6.20: Freischneiden des Stabes BC

6.5 Verständnisfragen

1. Was sind die Bedingungen an ein ideales Fachwerk?
2. Was für Kräfte und Momente können auf die Stäbe des idealen Fachwerkes wirken? Wo dürfen sie angreifen?
3. Welche Bedingung besteht zwischen der Anzahl Knoten k und der Anzahl Stäbe s , damit das System statisch bestimmt ist?
4. Was ist ein virtueller Bewegungszustand eines Körpers?
5. Was ist der Unterschied zwischen zulässigen und unzulässigen virtuellen Bewegungszuständen?
6. Welche drei Verfahren werden benutzt, um Stabkräfte in Fachwerken zu bestimmen? Wie ist das Vorgehen bei diesen Verfahren?
7. Wie lautet das Prinzip der virtuellen Leistung?
8. Warum dürfen beim Dreikräftechnitt nicht 4 Stäbe durchschnitten werden?

Kapitel 7

Reibung

7.1 Grundlagen

Bisher wurde angenommen, dass Körper glatte Oberflächen haben und somit bei Berührung nur Normalkräfte übertragen werden. Aus der Realität wissen wir, dass es sich dabei nur um eine Idealisierung handeln kann, denn Körper haben raue Oberflächen. Dadurch werden zwischen den Körpern auch Tangentialkräfte übertragen. Aus Reibungsexperimenten (Coulomb) können folgende Aussagen getroffen werden:

- die Haftreibungskraft H ist der voraussichtlichen Bewegung entgegengesetzt.
- H kann bis zu einem Maximalwert $\mu_0 \cdot N$ erhöht werden, danach setzt sich der Körper beschleunigt in Bewegung. Anschließend bewegt er sich gleichförmig oder beschleunigt; die Reibungskraft $\mu_1 N$ ist konstant und der Bewegung entgegengesetzt.
- dieser Maximalwert ist proportional zu N , aber unabhängig von der Auflagefläche. Ein Körper haftet solange gilt:

$$|H| \leq \mu_0 \cdot N \quad (7.1)$$

$$\text{bzw. vektoriell: } |\underline{\mathbf{H}}| \leq \mu_0 \cdot |\underline{\mathbf{N}}| \quad (7.2)$$

mit μ_0 : Haftreibungszahl

- die Wirkungslinie von N geht nicht durch den Mittelpunkt des Körpers, sondern ist versetzt (zusätzliche Unbekannte, in Skizze mit a benannt). Damit wird deutlich, dass N die Resultierende der über die ganze Berührfläche verteilten Normalkräfte ist.
- nachdem sich der Körper in Bewegung gesetzt hat, ist die Reibungskraft wiederum proportional zu N :

$$|\underline{\mathbf{F}}_R| = \mu_1 |\underline{\mathbf{N}}| \quad (7.3)$$

mit μ_1 : Gleitreibungszahl

Wichtig: Der Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibung ist darin zu sehen, dass die Haftreibung wie ein Lager die Bewegungsmöglichkeit eines Körpers einschränkt und daher aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden muss. Die Grösse der Gleitreibung hingegen kann sofort mit $\mu_1 \cdot N$ angegeben werden!

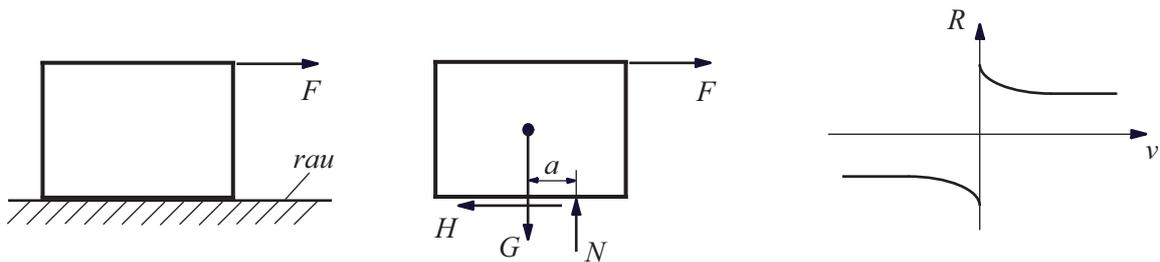


Abbildung 7.1: Körper auf rauher Unterlage (links), freigeschnitten (Mitte) und Verlauf der Reibungskraft R in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Flächenpaaren (rechts)

7.2 Lösungsweise von Aufgaben mit Reibung

Haftreibung

1. System abgrenzen
2. geeignetes Koordinatensystem einführen
3. Lagerreaktionen eintragen
4. Flächenpaare, die aufeinander gleiten können, identifizieren und Haftreibungskräfte als unbekannte Größe einführen
5. Gleichgewichtsbedingungen formulieren wie bei normalen Statikaufgaben
6. H in Haftungsbedingung $|H| \leq \mu_0 \cdot N$ einsetzen, Ungleichung auflösen und zulässigen Wertebereich für H angeben

Gleitreibung

Anmerkung: Im Gegensatz zu allen anderen Aufgabentypen der Statik sind bei Aufgaben mit Gleitreibung Körper in Bewegung. Man mag versucht sein, diese Aufgaben sofort als der Dynamik zugehörig zu betrachten, aber man sollte sich dann die in [Sayir] in Kap. 8.4 gegebene Bemerkung (2) ins Gedächtnis rufen: für die Sonderfälle gleichförmiger Translation und Rotation mit Massenmittelpunkt auf der Rotationsachse bleiben die Gleichgewichtsbedingungen gültig!

1. System abgrenzen
2. geeignetes Koordinatensystem einführen
3. Lagerreaktionen eintragen
4. Flächenpaare die aufeinander gleiten können, identifizieren und Gleitreibungskraft als bekannte Größe $F_r = \mu_1 N$ entgegen der Bewegungsrichtung einführen
5. Gleichgewichtsbedingungen formulieren

7.3 Seilstatik

Reibungsfreie Umlenkung. Die Seilkraft bleibt vom Betrag her gleich, wird aber in eine andere Richtung umgelenkt. Die Rolle ist reibungsfrei gelenkig gelagert, zudem greifen an ihr keine weitere äussere Kräfte oder Momente an. Gleichgewicht ist nur dann möglich, wenn gilt:

$$S_1 = S_2$$

Seilhaftung.

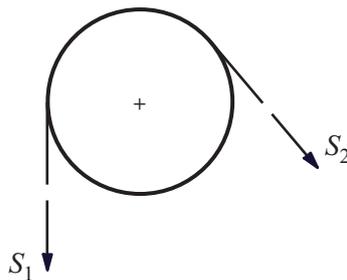


Abbildung 7.2: Reibungsfreie Umlenkung

a) Feststehender rauher Zylinder.

Schlingt man ein Seil um einen feststehenden rauhen Zylinder, so haftet das Seil bis zu einem Maximalbetrag, der Grenzhaftung. Allgemein gilt:

$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \alpha} \quad (7.4)$$

wobei $S_2 > S_1$

Beispiel:

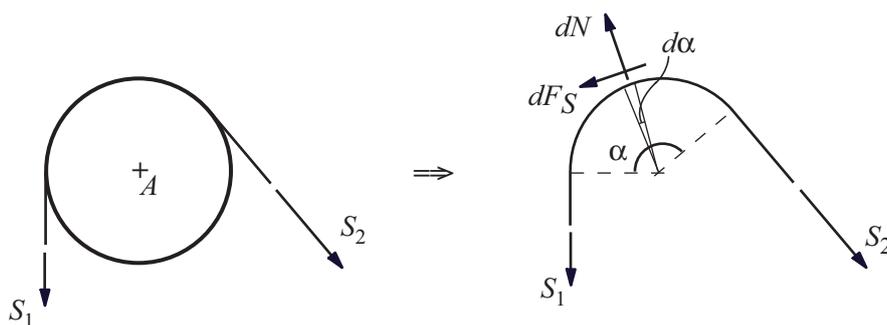


Abbildung 7.3: Auf das Seil wird entlang der Umschlingung auf jedes infinitesimale Seilstück eine Reibkraft dF_S ausgeübt. Da dF_S hier S_1 "unterstützt", wird deutlich, dass $S_2 > S_1$ sein muss. In anderen Worten: mit einer kleinen Kraft S_1 kann einer grösseren Kraft S_2 das Gleichgewicht gehalten werden.

b) Raue Scheibe, an der weitere äussere Kräfte und Momente angreifen.

Es gelten weiterhin die unter a) festgestellten grundlegenden Beziehungen. Für die Lösung der Aufgabe muss jedoch nun noch zusätzlich eine Gleichgewichtsbedingung für die Scheibe formuliert werden.

Beispiel:

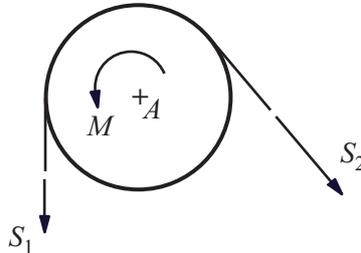


Abbildung 7.4: Raue Scheibe mit äusserem Moment M . Hier gilt: $S_2 > S_1$

Es müssen nun zwei Bedingungen für das Gleichgewicht formuliert werden:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M + S_1 R - S_2 R = 0 \quad (R: \text{Radius der Scheibe})$$

$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \alpha} \quad (\text{da } S_2 \text{ dem Moment } M \text{ entgegengerichtet ist})$$

Hinweis: Sobald an der Trommel eine Drehrichtung vorgegeben ist, ist definiert, ob $S_2 > S_1$ oder $S_2 < S_1$ ist.

7.4 Weitere Reibungsarten

Gelenk- und Lagerreibung.

- Systemtrennung im rauen Gelenk: Reibungsmoment $\underline{\mathbf{M}}_R$ und Zapfenkraft $\underline{\mathbf{Z}}$:

$$|\underline{\mathbf{Z}}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

- Haftreibungsgesetz für Gelenke:

$$|\underline{\mathbf{M}}_R| < \mu_0 r_L |\underline{\mathbf{Z}}| \quad (7.5)$$

wobei r_L : Lagerradius

- Gleitreibungsmoment in Gelenken, kurzen und langen Querlagern:

$$\underline{\mathbf{M}}_R < -\mu_1 r_L |\underline{\mathbf{Z}}| \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} \quad (7.6)$$

- Gleitreibungsmoment in Längslagern:

$$M_{RL} = \frac{2}{3} \mu_1 r_L N \quad (7.7)$$

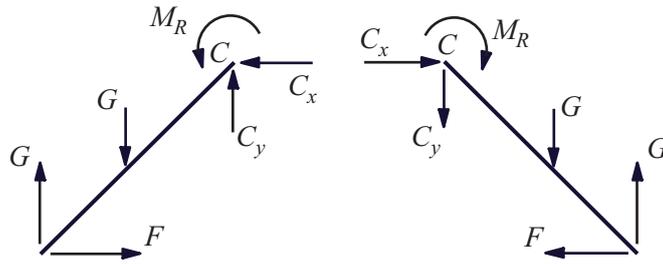


Abbildung 7.5: Systemtrennung mit Gelenkreibung

Rollreibung.

- Ungleichung der Rollreibung (Körper in Ruhe):

$$|\underline{M}_R| < \mu_2 |\underline{N}| \quad (7.8)$$

wobei μ_2 : Rollreibungslänge

- Gleichung der Rollreibung (Körper rollt):

$$|\underline{M}_R| = \mu_2 |\underline{N}| \quad (7.9)$$

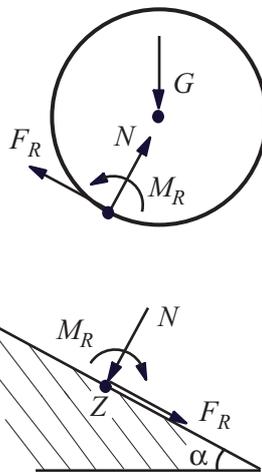


Abbildung 7.6: Rollreibung

7.5 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Stab der Länge L mit Masse m lehnt unter dem Winkel α an einer rauen Wand (μ_{01}). Am unteren Ende wird er durch ein Seil, das über einen rauen (μ_{02}), feststehenden Zapfen läuft, gehalten. Für welche Bereiche von F bleibt das System in Ruhe?

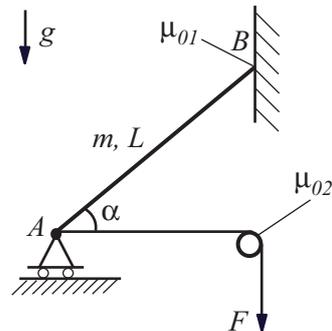


Abbildung 7.7: System der Aufgabe 1

Gegeben: $m, L, \mu_{01}, \mu_{02}, \alpha$

Gesucht: Wertebereich für F

Lösung:

Freischneiden des Stabes:

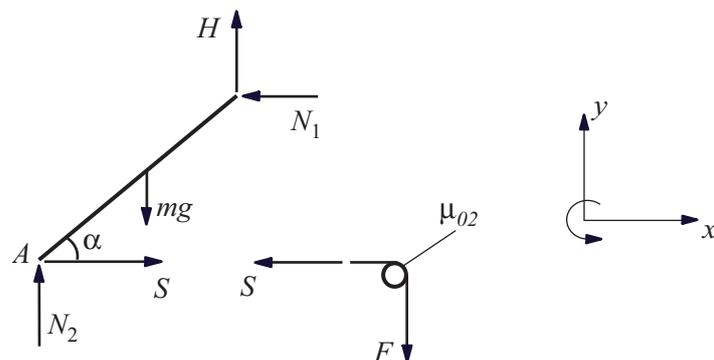


Abbildung 7.8: Freigeschnittener Stab

$$\sum F_x : S - N_1 = 0 \Rightarrow S = N_1 \quad (1)$$

$$\sum F_y : N_2 - mg + H = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A : H \cdot L \cos \alpha + N_1 \cdot L \sin \alpha - mg \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen ist darauf zu achten, dass das Reibungsgesetz in seiner allgemeinen Form angesetzt wird (d.h. $|H| \leq \mu_0 \cdot N$), da H je nach Bewegung des Stabes sowohl nach oben als auch nach unten zeigen kann.

$$\text{aus (2): } H = mg - N_2$$

$$\text{aus (3): } H \cdot L \cos \alpha = mg \cdot \frac{L}{2} \cos \alpha - N_1 \cdot L \sin \alpha$$

$$H = \frac{G}{2} - N_1 \tan \alpha$$

Einsetzen in das Haftreibungsgesetz liefert zusammen mit (1):

$$\left| \frac{G}{2} - S \tan \alpha \right| \leq \mu_{01} S$$

$$1. \text{ Fall: } \frac{G}{2} - S \tan \alpha \leq \mu_{01} S$$

$$\frac{G}{2} \leq S (\mu_{01} + \tan \alpha) \quad (4)$$

$$2. \text{ Fall: } - \left(\frac{G}{2} - S \tan \alpha \right) \leq \mu_{01} S$$

$$S (\tan \alpha - \mu_{01}) \leq \frac{G}{2} \quad (5)$$

Diese Werte müssen nur noch in die Gleichung für Seilreibung eingesetzt werden, wobei darauf zu achten ist, dass mit einer kleinen Kraft F einer grossen Kraft S das Gleichgewicht gehalten werden soll.

$$S \cdot e^{-\mu_{02} \frac{\pi}{2}} \leq F \leq S \cdot e^{\mu_{02} \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{G}{2 (\tan \alpha + \mu_{01})} e^{-\mu_{02} \frac{\pi}{2}} \leq F \leq \frac{G}{2 (\tan \alpha - \mu_{01})} e^{\mu_{02} \frac{\pi}{2}}$$

Hinweis zur Seilreibung: Die kleinere Kraft steht immer am $e^{\mu\alpha}$ -Term. Sie ist die Kraft, mit der eine Bewegung verhindert werden soll.

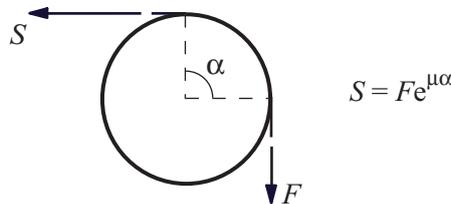


Abbildung 7.9: Seil über den feststehenden Zapfen unter der Annahme, dass $S > F$

ist S grösser als F , so gilt: $S \leq Fe^{\mu\alpha}$

wird F grösser als S , so gilt: $F \leq Se^{\mu\alpha}$

zusammengefasst: $Se^{-\mu\alpha} \leq F \leq Se^{\mu\alpha}$ (siehe Abb. 7.8)

Aufgabe 2

Auf einer um den Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigten rauhen Ebene (Haftreibungskoeffizient (μ_0)) ruht ein Würfel mit Seitenlänge a und Masse m . An ihm greift die Kraft F an. Welche Bedingungen müssen für F bei gegebenem μ_0 gelten, damit der Würfel weder nach unten noch nach oben rutscht und auch nicht kippt?

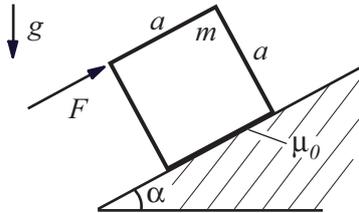


Abbildung 7.10: Würfel auf schiefer Ebene

Gegeben: M, α, a

Gesucht: μ_0, F

Lösung:

Hinweise: Bei dieser Aufgabe ist die voraussichtliche Bewegungsrichtung noch nicht bekannt.

- H wird daher willkürlich eingeführt.
- die zwei möglichen Bewegungen - nach oben bzw. nach unten - werden durch die Betragzeichen in der Haftbedingung erfasst: $|H| \leq \mu_0 \cdot N$

Freischneiden:

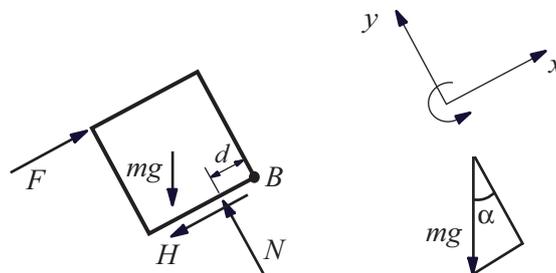


Abbildung 7.11: Freigeschnittener Würfel mit der Annahme, er setze sich voraussichtlich nach oben in Bewegung.

Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x : F - mg \sin \alpha - H = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : N - mg \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B : -F \cdot a - N \cdot d + mg \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha + mg \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Einsetzen von (1) in die Haftbedingung:

$$|H| \leq \mu_0 \cdot N \quad (4)$$

Fallunterscheidung:

1. $H > 0$ (entspricht einer Bewegung nach oben):

$$\begin{aligned} & F - mg \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot N \\ \text{mit (2)} \quad & F - mg \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot mg \cos \alpha \\ & F \leq mg (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha) \end{aligned}$$

2. $H < 0$ (entspricht einer Bewegung nach unten):

$$\begin{aligned} & mg \sin \alpha - F \leq \mu_0 \cdot N \\ & mg \sin \alpha - F \leq \mu_0 \cdot mg \cos \alpha \\ & mg (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \leq F \end{aligned}$$

Für $mg (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \leq F \leq mg (\mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha)$ findet somit kein Rutschen statt!

Damit kein Kippen auftreten kann, muss der Kraftangriffspunkt der Normalkraft immer innerhalb der Auflagefläche des Würfels liegen:

$$0 \leq d \leq a \quad (5)$$

Eine Bedingung für d erhält man aus der Gleichung (3):

$$d = \frac{mg \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)}{mg \cos \alpha} - Fa \cdot \frac{1}{mg \cos \alpha}$$

Durch Einsetzen in (5) lässt sich ein weiterer zulässiger Wertebereich für F ermitteln:

1. Bedingung:

$$\begin{aligned} & 0 \leq d \\ & F \leq mg \frac{1}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) \end{aligned}$$

2. Bedingung:

$$\begin{aligned} & d \leq a \\ & mg \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) \leq Fa + amg \cos \alpha \\ & \frac{1}{2} mg (\sin \alpha + \cos \alpha) - mg \cos \alpha \leq F \\ & \frac{1}{2} mg (\sin \alpha - \cos \alpha) \leq F \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Eine gewichtslose Scheibe mit Radius R ist im Punkt A reibungsfrei gelagert. Sie berührt im Punkt B einen Klotz (Seitenlängen a und b) K mit Masse m . Zwischen Wand und Klotz beträgt der Haftreibungskoeffizient μ_0 ; zwischen Klotz und Scheibe gibt es keine Reibung. Im Mittelpunkt der Scheibe greift eine Zugfeder mit Federkonstante k_F an. Wie gross muss die Federkraft mindestens sein, damit der Klotz in Ruhe bleibt?

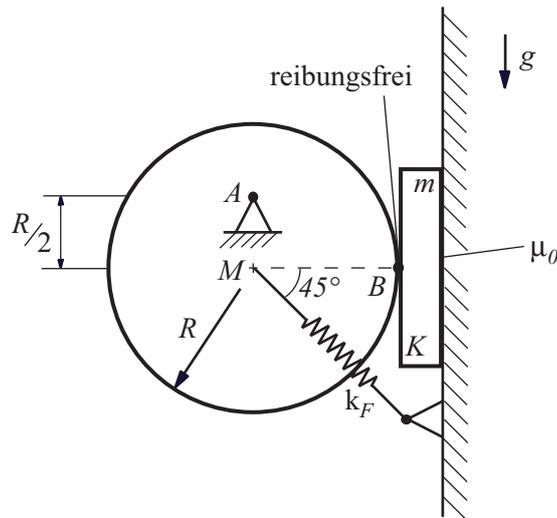


Abbildung 7.12: System aus Aufgabe 3

Gegeben: M, μ_0, R, k_F, a, b

Gesucht: F_F

Lösung:

Auch bei dieser Aufgabe sollte wieder gemäss dem Schema für Reibungsaufgaben vorgegangen werden: System trennen, Lager- und Verbindungsreaktionen einführen (dabei Flächenpaare, die nicht reibungsfrei aufeinander gleiten können, identifizieren und dort Haftreibungskräfte einführen) und am Schluss das Reibungsgesetz formulieren.

Hinweis: Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt: den sechs Gleichgewichtsbedingungen (je drei für Rolle und Klotz) stehen sieben Unbekannte ($A_x, A_y, F_F, N_1, N_2, H_1, e$) gegenüber. Für F_F lässt sich jedoch trotzdem ein Wertebereich angeben, indem das Haftreibungsgesetz formuliert wird.

Scheibe:

$$\sum F_x : A_x + F_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - N_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y : A_y - F_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow A_y = F_F \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\sum M_{M_R} : -A_x \cdot \frac{R}{2} = 0 \quad \Rightarrow A_x = 0 \quad (3)$$

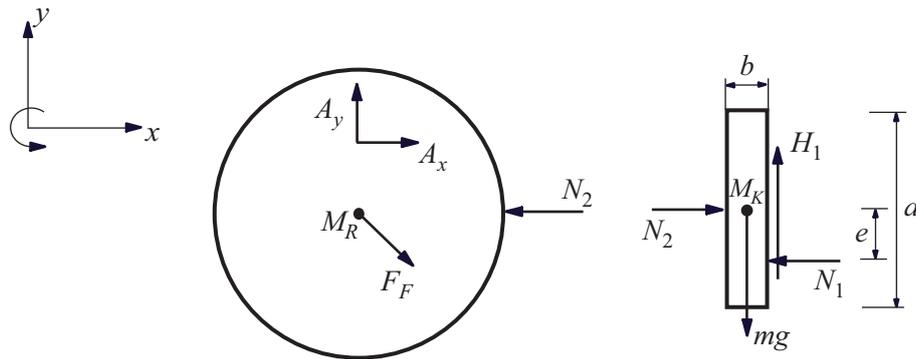


Abbildung 7.13: Freikörperbild

Klotz:

$$\sum F_x : N_1 = N_2 \quad (4)$$

$$\sum F_y : H_1 = mg \quad (5)$$

$$\sum M_{M_K} : -N_1 \cdot e + H_1 \cdot \frac{b}{2} = 0 \quad (6)$$

Weiteres Auflösen der Gleichungen ergibt:

$$(3) \text{ mit } (1) : N_2 = F_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (7)$$

$$(7) \text{ mit } (4) : N_1 = F_F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (8)$$

Wir haben nun genug Angaben, um das Haftreibungsgesetz für den Klotz zu formulieren:

$$| H | \leq \mu_0 \cdot N_1$$

$$| mg | \leq \mu_0 \cdot F_F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. Fall: $mg > 0$

$$mg \leq \mu_0 \cdot F_F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}mg}{\mu_0} \leq F_F$$

2. Fall: $mg < 0$

\Rightarrow physikalisch unsinnig, da immer gilt: $mg > 0$

7.6 Verständnisfragen

1. Beschreibe die Reibungsgesetze!
2. Liefert das Haftreibungsgesetz eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten?

3. Liefert das Gleitreibungsgesetz eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten?
4. Von welchen Parametern hängen die Haftreibung bzw. die Gleitreibung ab? Hat die Grösse der Kontaktfläche einen Einfluss?
5. Welche Beziehungen gelten für reibungsbehaftete Gelenke?
6. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den zwei Seilendkräften, die in einem Seil wirken, welches um einen reibungsbehafteten, drehenden Zylinder gelegt ist?
7. Wie entsteht die Rollreibung?
8. Weshalb kann man in einer Einspannung keine Reibungsreaktion einführen?
9. Kann man in einem Gelenk Reibungsreaktionen einführen? Falls ja: welche?

Kapitel 8

Beanspruchung

Schnittgrößen wie Normal-, Querkräfte und Momente können durch einen Schnitt S'_n senkrecht zur Balkenachse sichtbar gemacht werden. Am geschnittenen Körper werden die äusseren Kräfte eingetragen. Damit der Körper im Gleichgewicht bleibt, müssen die Schnittkräfte $\{d\mathbf{F}_i\}$ eingeführt werden.

Definition: Die Dynam $\{\mathbf{R}, \mathbf{M}_C\}$ der Schnittkräfte $\{d\mathbf{F}_i\}$ im Flächenmittelpunkt C des Querschnitts S'_n heisst Beanspruchung des Stabes im Querschnitt S'_n .

8.1 Allgemeiner Fall von Schnittgrößen

Die beiden Vektoren \mathbf{R} und \mathbf{M}_C der Beanspruchung werden bezüglich einer passenden gewählten Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (Rechtssystem!) mit \mathbf{e}_1 in Richtung der äusseren Normalen zur Schnittfläche S'_n zerlegt:

$$\mathbf{R} = N\mathbf{e}_1 + Q_2\mathbf{e}_2 + Q_3\mathbf{e}_3 \quad (8.1)$$

$$\mathbf{M}_C = T\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3 \quad (8.2)$$

- Normalkraft N : Beanspruchung auf Zug ($N > 0$) oder Druck ($N < 0$)
- Querkräfte Q_2, Q_3 : Beanspruchung auf Schub
- Torsionsmoment T : Beanspruchung auf Torsion
- Biegemomente M_2, M_3 : Beanspruchung auf Biegung

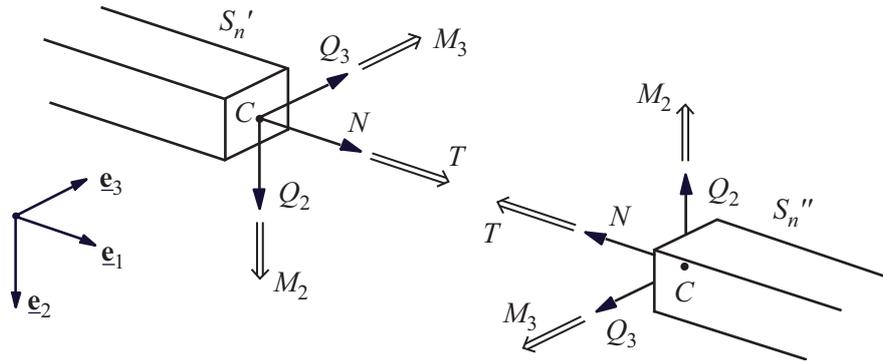


Abbildung 8.1: Zerlegung der Beanspruchung an der Schnittflächen S'_n und S''_n

8.2 Beanspruchung in geraden Balken

8.2.1 Vorgehen

- i) Lagerkräfte gemäss Abschnitt 4.5 am Gesamtsystem bestimmen.
- ii) Körper schneiden, Laufvariable und Schnittgrössen einführen.
- iii) Gleichgewichtsbedingungen für das abgegrenzte System aufstellen, Schnittgrössen berechnen, Momentenbedingung bezüglich Schnittpunkt!
- iv) Je nach Aufgabenstellung, Beanspruchungsdiagramme zeichnen.

Bemerkung: Wenn eine Einzelkraft vom Betrag F am Balken angreift, ist der Normal- oder Querkraftverlauf unstetig (Sprung vom Betrag F). Wenn ein Einzelmoment vom Betrag M am Balken angreift, ist der Momentenverlauf unstetig (Sprung vom Betrag M).

8.2.2 Differentielle Beziehungen

Differentielle Beziehungen stellen Beziehungen zwischen Querkraft bzw. Moment und Belastung zwischen zwei Unstetigkeiten dar.

$$\begin{aligned}
 Q'_y &= -q_y, & Q'_z &= -q_z \\
 M'_z &= -Q_y, & M'_y &= Q_z \\
 M''_z &= q_y, & M''_y &= -q_z
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Berechnung der Querkräfte und Biegemomente:

$$Q_y = - \int q_y dx + C_1 \tag{8.4}$$

$$M_z = - \int Q_y dx + C_2 \tag{8.5}$$

Bemerkung: Niemals über unstetige Belastungen (Einzelkräfte, Einzelmomente) integrieren! Bestimmung der Integrationskonstanten aus Rand- und Übergangsbedingungen:

Lagerart	Symbol	Q	M	N
-Auflager		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Festlager		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N \neq 0$
-Einspannung		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
-Freies Ende		$Q = 0$	$M = 0$	$N = 0$
-Gelenk		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N \neq 0$

8.3 Beanspruchung in gekrümmten Balken

Berechnung durch geeignetes Schneiden und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen für das abgegrenzte Teilsystem in Abhängigkeit von φ (ähnliches Vorgehen wie unter 8.2.1 beschrieben)

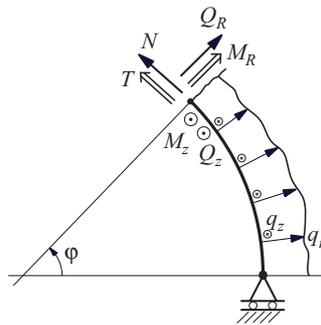


Abbildung 8.2: Schnittgrößen in einem gekrümmten Balken

Differentielle Beziehungen:

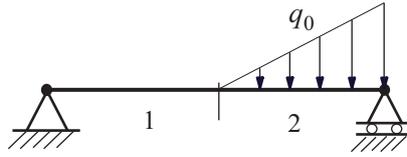
$$\begin{aligned}
 Q_r' - N + R \cdot q_r &= 0 \\
 Q_z' + R \cdot q_z &= 0 \\
 M_r' - T + R \cdot Q_z &= 0 \\
 M_z' - R \cdot Q_r &= 0
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Bemerkung: Die Vorzeichen bei den differentiellen Beziehungen stehen in direkter Verbindung mit der Richtung der eingeführten Schnittgrößen.

8.4 Anmerkung zu differentiellen Beziehungen

Differentielle Beziehungen dürfen nur in Bereichen angewandt werden, in denen die Belastung integrierbar ist. Beispiele: keine Lasten, konstante Streckenlast, Dreiecklast.

Bei unstetigen Übergängen müssen die Lastfälle abgetrennt werden:



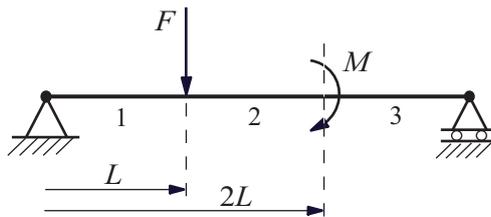
Es wird unbestimmt integriert, das heisst:

$$Q = - \int q_0 dx + C_1$$

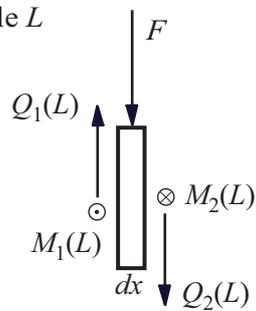
$$M = - \int Q dx + C_2$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen und aus den Übergangsbedingungen bestimmt.

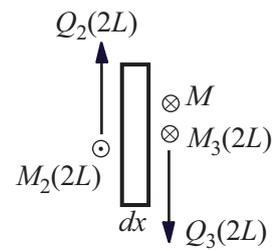
Beispiel:



Stelle L



Stelle $2L$



$$\begin{aligned} Q_1(x=L) - F - Q_2(x=L) &= 0 & Q_2(x=2L) - Q_3(x=2L) &= 0 \\ M_1(x=L) - M_2(x=L) &= 0 & M_2(x=2L) - M_3(x=2L) - M &= 0 \end{aligned}$$

Falls Lasten in der Längsrichtung vorkommen, dann muss auch N berechnet werden.

8.5 Aufgaben

Aufgabe 1

Der dargestellte Balken AE der Länge $11a$ ist in A reibungsfrei gelenkig gelagert und in D reibungsfrei horizontal verschiebbar aufgelagert. Auf dem Balken wirken in B ein äusseres Moment vom Betrag $2aP$, in C eine vertikale Last vom Betrag $3P$, auf DE eine konstante verteilte Last vom Betrag $\frac{P}{2a}$ pro Längeneinheit und in E eine horizontale Kraft $2P$.

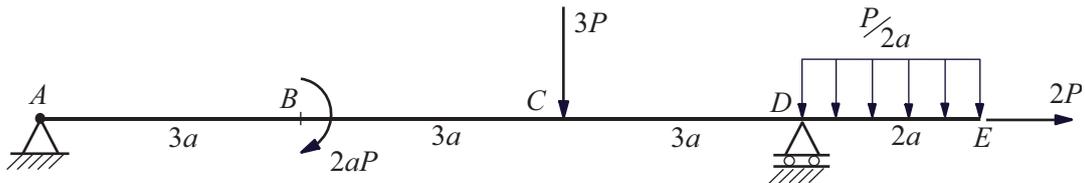


Abbildung 8.3: Gesamtsystem

- Berechne die Schnittgrößen im Balken.
- Stelle die Ergebnisse graphisch dar.

Gegeben: a, P , Geometrie

Gesucht: a) $N(x), Q(x), M_b(x)$ (2D-Aufgabe)

b) Beanspruchungsdiagramme

Lösung:

- Berechnung der Lagerkräfte:

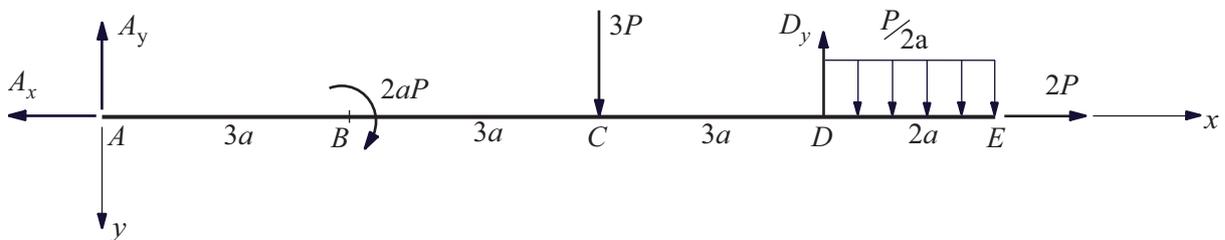


Abbildung 8.4: Freischneiden und Einführen der Lagerkräfte

$$\begin{aligned} \sum F_x : -A_x + 2P &= 0 \Rightarrow A_x = 2P \\ \sum F_y : 3P + \frac{P}{2a} \cdot 2a - A_y - D_y &= 0 \Rightarrow A_y + D_y = 4P \\ \sum M_A : 2aP + 3P \cdot 6a - D_y \cdot 9a + \frac{P}{2a} \cdot 2a \cdot 10a &= 0 \\ \Rightarrow 9D_y = 2P + 18P + 10P = 30P &\Rightarrow D_y = \frac{10}{3}P \\ \Rightarrow A_y = 4P - D_y = \frac{2}{3}P & \end{aligned}$$

Für die Beanspruchung müssen vier Bereiche betrachtet werden:

Teil 1: $0 \leq x \leq 3a$

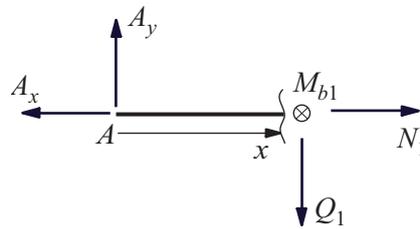


Abbildung 8.5: Schnittgrößen im Stab AB

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_1 = A_x &= 2P \\ \sum F_y : Q_1 - A_y &= 0 \Rightarrow Q_1 = A_y = \frac{2}{3}P \\ \sum M : M_{b1} + xA_y &= 0 \Rightarrow M_{b1}(x) = -\frac{2}{3}Px \end{aligned}$$

wie erwartet gilt (nach 8.3):

$$\frac{dM_{b1}(x)}{dx} = -\frac{2}{3}P = -Q_1(x)$$

Teil 2: $3a \leq x \leq 6a$

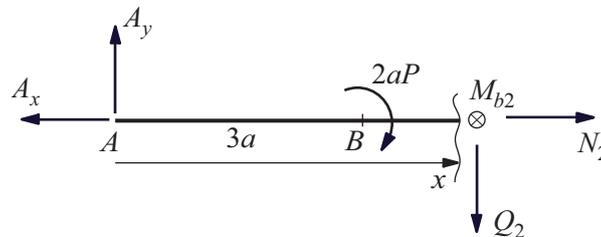


Abbildung 8.6: Schnittgrößen im Stab BC

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_2 &= A_x = 2P \\ \sum F_y : Q_2 - A_y &= 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{2}{3}P \\ \sum M : M_{b2} + 2aP + xA_y &= 0 \Rightarrow M_{b2}(x) = -2aP - \frac{2}{3}Px \end{aligned}$$

In diesem Bereich hat man ein zusätzliches äusseres Moment \Rightarrow keine Änderung bei N_2 , Q_2 , Sprung bei M_b an der Stelle $x = 3a$ (siehe Aufgabenteil b).

$$M_{b2}(3a) + 2aP = M_{b1}(3a)$$

wie erwartet:

$$\frac{dM_{b2}(x)}{dx} = -\frac{2}{3}P = -Q_2(x)$$

Teil 3: $6a \leq x \leq 9a$

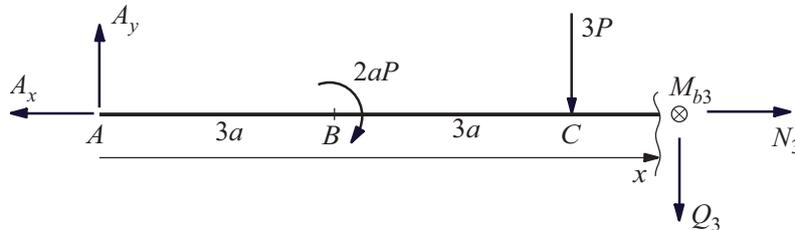


Abbildung 8.7: Schnittgrößen im Stab CD

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_3 &= 2P \\ \sum F_y : Q_3 + 3P - A_y &= 0 \Rightarrow Q_3 = \frac{2}{3}P - 3P = -\frac{7}{3}P \\ \sum M : M_{b3} - 3P(x - 6a) + 2aP + A_yx &= 0 \\ M_{b3} &= -\frac{2}{3}Px - 2aP + 3Px - 18aP \Rightarrow M_{b3}(x) = -20aP + \frac{7}{3}Px \end{aligned}$$

Kontrolle der differentiellen Beziehung:

$$\frac{dM_{b3}(x)}{dx} = \frac{7}{3}P = -Q_3(x)$$

Teil 4: $9a \leq x \leq 11a$

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_4 &= 2P \\ \sum F_y : -Q_4 + \frac{P}{2a}(11a - x) &= 0 \Rightarrow Q_4 = \frac{P}{2a}(11a - x) \\ \sum M : -M_{b4} + \frac{P}{2a}(11a - x) \cdot \frac{(11a - x)}{2} &= 0 \Rightarrow M_{b4}(x) = \frac{P}{4a}(11a - x)^2 \end{aligned}$$

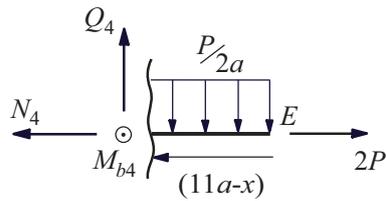


Abbildung 8.8: Schnittgrößen im Stab DE

Kontrolle der differentiellen Beziehungen:

$$\frac{dM_{b4}(x)}{dx} = \frac{2P}{4a} (11a - x) \cdot (-1) = \frac{-P}{2a} (11a - x) = -Q_4(x)$$

$$\frac{dQ_4(x)}{dx} = \frac{P}{2a} \cdot (-1) = -\frac{P}{2a} = -q_y(x)$$

b) Beanspruchungsdiagramme:

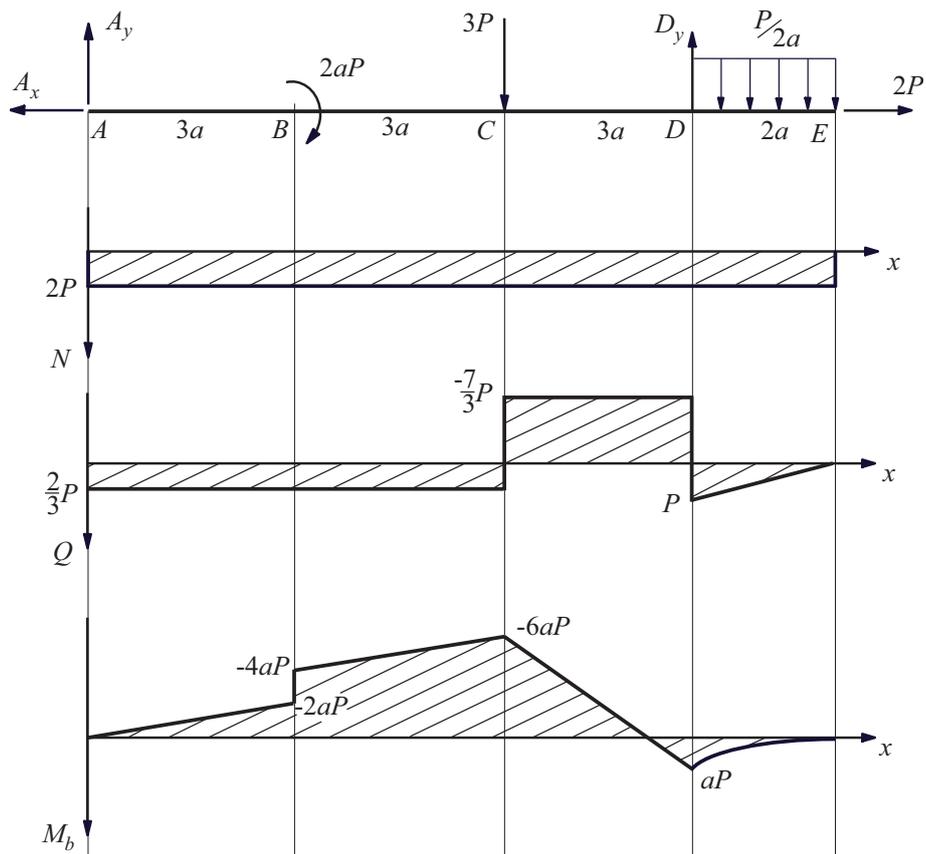


Abbildung 8.9: Verlauf der Beanspruchungskomponenten in Funktion der Laufvariable x

Bemerkungen:

- Teil 1 und 2: gleiche Querkraft \Rightarrow gleiche Steigung des Biegemomentes mit einem Sprung von $2aP$
- Teil 2 bis 3: Sprung bei Querkraftverlauf von $3P$ (äussere Last). Querkraft wird negativ \Rightarrow Steigung des Biegemomentes positiv
- Punkt E : Querkraft und Biegemoment verschwinden (freies Ende)

Aufgabe 2

Der gewichtslose Dreigelenkbogen AB ist in A und B gelenkig gelagert. Alle drei Gelenke sind reibungsfrei. Ferner ist er durch eine vertikale Kraft F im Punkt C und eine Streckenlast $q_0L = 2F$ auf AC belastet.

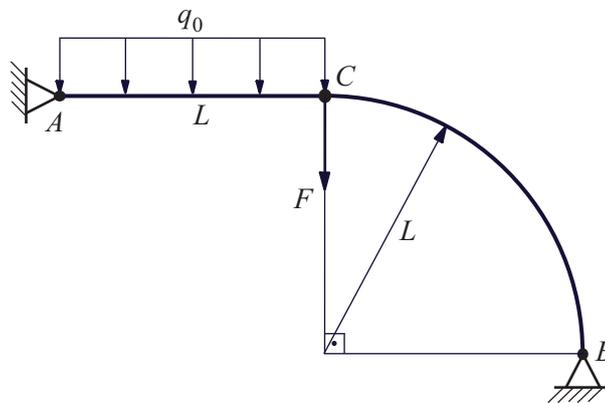


Abbildung 8.10: Gesamtsystem

- Bestimme die Verläufe von Normalkraft, Querkraft und Moment.
- Stelle das Ergebnis graphisch dar.

Gegeben: Geometrie, Länge L , Kraft F , verteilte Kraft $q_0 = \frac{2F}{L}$

Gesucht: a) N , Q , M_b

b) Beanspruchungsdiagramme

Lösung:

a) Berechnung der Lagerkräfte.

Das System wird freigeschnitten und die Lagerkräfte werden eingeführt. Man erhält vier Lagerkräfte und drei Gleichungen: ist das System statisch unbestimmt? Nein, aber es muss in C getrennt werden. Damit erhält man sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten (siehe Abb. 8.12).

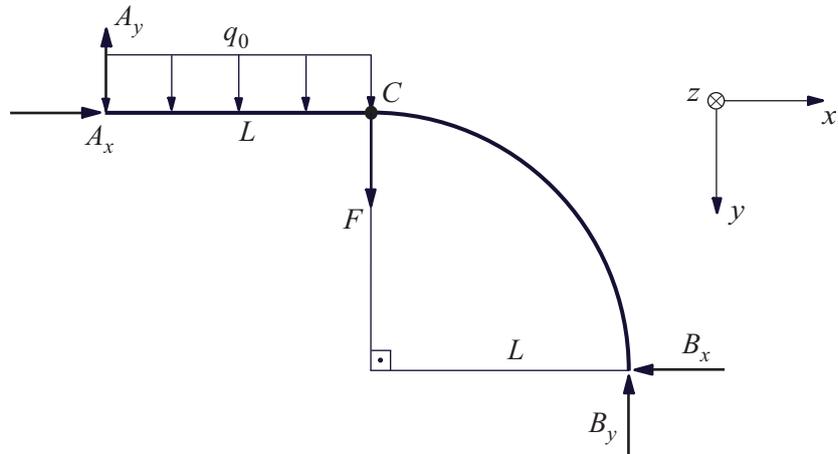
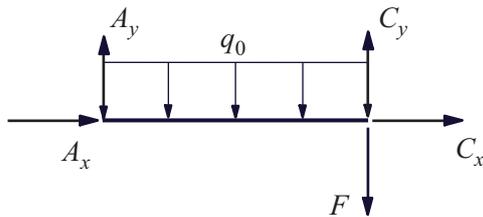


Abbildung 8.11: System wird freigeschnitten und die Lagerkräfte eingeführt

Die Kraft F wurde im ersten Teil betrachtet, dürfte aber auch im zweiten Teil oder getrennt betrachtet werden.

Teil I



Teil II

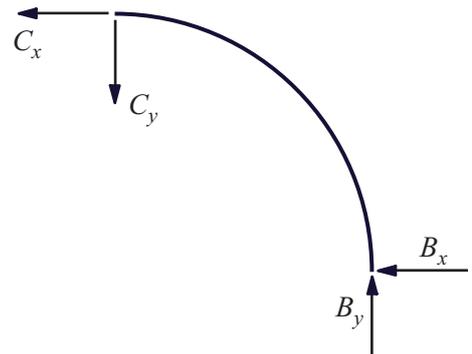


Abbildung 8.12: Systemtrennung im Punkt C

Die Komponentenbedingungen werden am Gesamtsystem aufgestellt:

$$\sum F_x: A_x - B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = B_x \quad (1)$$

$$\sum F_y: A_y + B_y - F - q_0 L = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y = F + \frac{2F}{L} L = 3F \quad (2)$$

Da die Kräfte in C , die aus der Zerlegung entstehen, nicht gesucht sind, werden die Momentenbedingungen in Teilsysteme I und II im Punkt C aufgestellt. Auf dieser Weise kann man die Berechnung der Kräfte C_x und C_y umgehen.

$$\text{Teil I: } \sum M_C: A_y L - q_0 L \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = q_0 \frac{L}{2} \quad (3)$$

$$\text{Teil II: } \sum M_C: B_x L - B_y L = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = B_y \quad (4)$$

Jetzt haben wir vier Gleichungen mit vier Unbekannten \Rightarrow Gleichungssystem lösbar.
Aus (3) folgt:

$$A_y = q_0 \frac{L}{2} = F$$

Aus (2) folgt:

$$B_y = 3F - A_y = 2F$$

Aus (4) und dann (1):

$$B_x = 2F$$

$$A_x = 2F$$

Beanspruchung im Teil I.

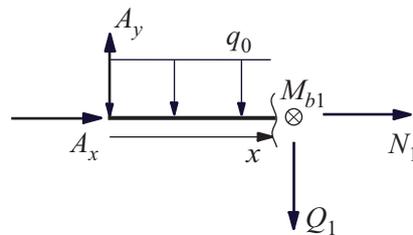


Abbildung 8.13: Schnittgrößen im Stab AC

$$\sum F_x : N_I + A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_I = -2F$$

$$\sum F_y : Q_I + q_0 x - A_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_I = F - \frac{2F}{L} x = F \left(1 - \frac{2x}{L} \right)$$

$$\sum M : M_{bI} + A_y x - q_0 x \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{bI} = \frac{F}{L} x^2 - Fx = Fx \left(\frac{x}{L} - 1 \right)$$

Oder mit den differentiellen Beziehungen:

$$M_{bI} = - \int Q_I dx = - \int \left(F - \frac{2F}{L} x \right) dx$$

$$M_{bI} = -Fx + \frac{F}{L} x^2 + C$$

Randbedingung: $M_{bI}(0) = 0$ (reibungsfreies Gelenk) $\Rightarrow C = 0$

$$M_{bI} = \frac{F}{L} x^2 - Fx$$

Wie erwartet verschwindet das Biegemoment bei dem reibungsfreien Gelenk im Punkt C :

$$M_{bI}(L) = \frac{F}{L}L^2 - FL = 0$$

Beanspruchung im Teil II.

Da die Kräfte in C nicht berechnet sind, muss die Laufvariable φ von B aus eingeführt werden. Ferner muss darauf geachtet werden, dass die Schnittgrößen in umgekehrter Richtung (bezüglich Teil I) eingeführt sind (die Laufvariable wurde da von links eingeführt).

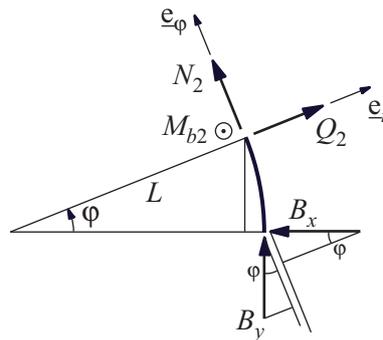


Abbildung 8.14: Schnittgrößen im Stab BC

$$\begin{aligned} \sum F_\varphi : N_{II} + B_x \sin \varphi + B_y \cos \varphi &= 0 & \Rightarrow N_{II} &= -2F (\sin \varphi + \cos \varphi) \\ \sum F_r : Q_{II} + B_y \sin \varphi - B_x \cos \varphi &= 0 & \Rightarrow Q_{II} &= 2F (\cos \varphi - \sin \varphi) \\ \sum M : -M_{bII} + B_x \cdot L \sin \varphi - B_y (L - L \cos \varphi) &= 0 & \Rightarrow M_{bII} &= 2FL (\cos \varphi + \sin \varphi - 1) \end{aligned}$$

Kontrolle der differentiellen Beziehungen für gekrümmte Balken (siehe Gl. 8.6):

$$\begin{aligned} \frac{dM_{bII}}{d\varphi} - LQ_{II} &= 2FL (-\sin \varphi + \cos \varphi) - L \cdot 2F (\cos \varphi - \sin \varphi) \\ &= 2FL (-\sin \varphi + \cos \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{OK} \end{aligned}$$

b) Beanspruchungsdiagramme:

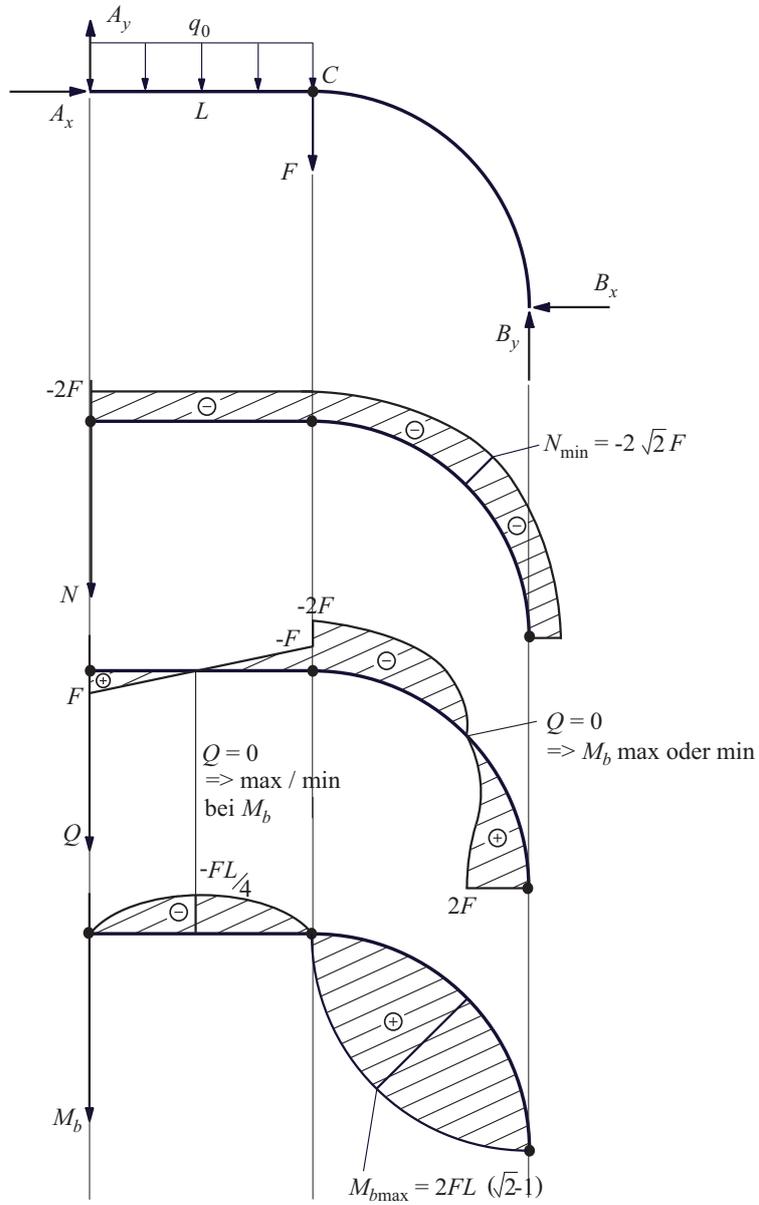


Abbildung 8.15: Verlauf der Schnittgrößen

Aufgabe 3

Das dargestellte Tragwerk besteht aus zwei starren, gewichtslosen Stäben AD (Länge $2L$) und CB (Länge L), die gemäss Skizze im Punkt C rechtwinklig zusammengeschweisst sind. Der Stab AD ist in A eingespannt und durch eine vertikale Streckenlast q_0 belastet. An diesem Tragwerk hängt das Gewicht G an einem Seil. Das Seil ist im Punkt B befestigt und wird in D über eine reibungslose Rolle geführt. Der Radius R der Rolle ist vernachlässigbar klein.

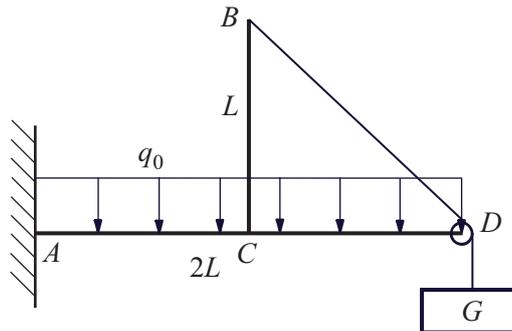


Abbildung 8.16: Skizze des gesamten Systems

- Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in A .
- Bestimmen Sie die Schnittgrössen für den waagrechten Balken AD .
- Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Gegeben: Länge L , Gewicht G , Streckenlast q_0 , Geometrie

Gesucht: a) A_x , A_y , M_A (2D-Aufgabe)

b) $N(x)$, $Q(x)$, $M_z(x)$

c) Beanspruchungsdiagramme

Lösung:

- Für die Lagerkräfte kann das ganze System betrachtet werden (im Punkt A freigeschnitten):

$$\sum F_x : A_x = 0$$

$$\sum F_y : A_y - 2Lq_0 - G = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = G + 2q_0L$$

$$\sum M_A : M_A - 2GL - 2q_0L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 2LG + 2q_0L^2$$

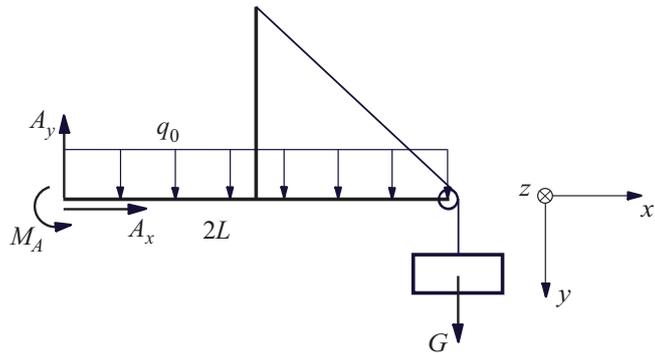


Abbildung 8.17: Freischnitten und Einführen der Lagerkräfte im Punkt A

b) **1. Variante:** Für die Berechnung der Beanspruchung werden alle Kräfte auf dem Stab AD reduziert.

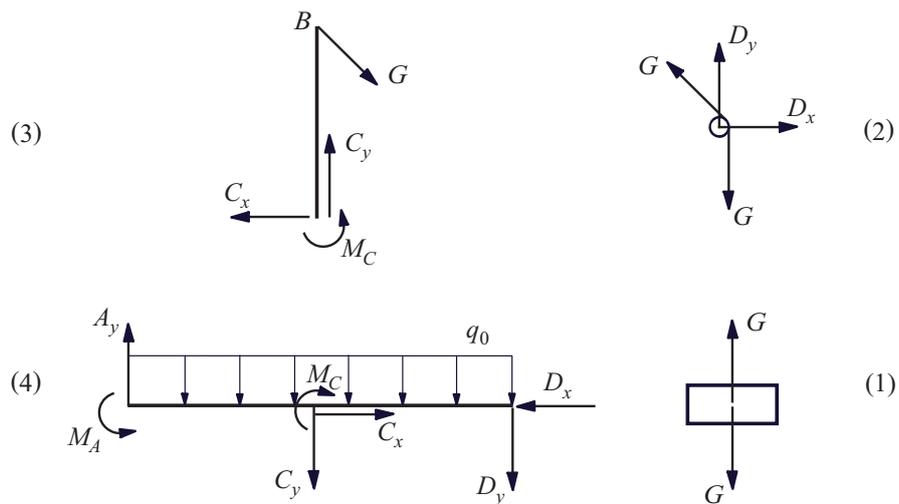


Abbildung 8.18: Systemtrennung

Rolle (2):

$$D_x = G \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D_y = G - G \frac{\sqrt{2}}{2} = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Stab BC (3):

$$C_x = G \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_y = G \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_C = G \frac{\sqrt{2}}{2} L$$

Der Stab AB ist selbstverständlich mit den unter a) berechneten Kräften im Gleichgewicht.

Differentielle Beziehungen. Querkräfte und Biegemomente können mit den differentiellen Beziehungen berechnet werden.

Bereich 1 ($0 < x < L$):

$$\text{gemäss (8.4) : } Q_{y1} = - \int q_0 dx = -q_0 x + C_1$$

$$\text{gemäss (8.5) : } M_{z1} = - \int Q_{y1} dx = q_0 \frac{x^2}{2} - C_1 x + C_2$$

Randbedingungen an der Einspannung in A :

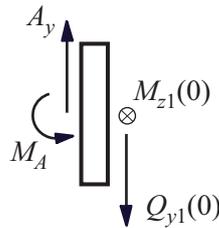


Abbildung 8.19: Randbedingungen im Punkt A

$$Q_{y1} = A_y = G + 2q_0 L$$

$$M_{z1} = M_A = 2GL + 2q_0 L^2$$

$$Q_{y1}(0) = C_1 = G + 2q_0 L$$

$$\Rightarrow Q_{y1}(x) = -q_0 x + G + 2q_0 L$$

$$M_{z1}(0) = C_2 = 2GL + 2q_0 L^2$$

$$\Rightarrow M_{z1}(x) = q_0 \frac{x^2}{2} - Gx - 2q_0 Lx + 2GL + 2q_0 L^2$$

Bereich 2 ($L < x < 2L$):

$$Q_{y2} = - \int q_0 dx = -q_0 x + C_3$$

$$M_{z2} = - \int Q_{y2} dx = q_0 \frac{x^2}{2} - C_3 x + C_4$$

Randbedingungen im Punkt D :

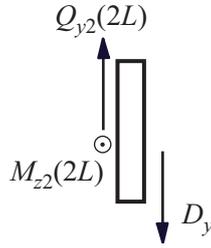


Abbildung 8.20: Randbedingungen im Punkt D

$$Q_{y2}(2L) = D_y = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$M_{z2}(2L) = 0$$

$$Q_{y2}(2L) = -2q_0L + C_3 = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow C_3 = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2q_0L$$

$$\Rightarrow Q_{y2}(x) = -q_0x + G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2q_0L$$

$$M_{z2}(2L) = 2q_0L^2 - 2GL \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 4q_0L^2 + C_4 = 0$$

$$\Rightarrow C_4 = 2q_0L^2 + 2GL \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M_{z2}(x) = q_0 \frac{x^2}{2} - Gx \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2q_0Lx + 2q_0L^2 + 2GL \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$Q_{y1}(x) = G + q_0(2L - x) \quad (0 < x < L)$$

$$Q_{y2}(x) = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + q_0(2L - x) \quad (L < x < 2L)$$

$$M_{z1}(x) = G(2L - x) + \frac{q_0}{2}(2L - x)^2 \quad (0 < x < L)$$

$$M_{z2}(x) = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (2L - x) + \frac{q_0}{2}(2L - x)^2 \quad (L < x < 2L)$$

Überprüfung der Übergangsbedingungen:

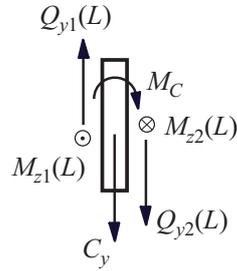


Abbildung 8.21: Übergangsbedingungen im Punkt C

$$Q_{y2}(L) - Q_{y1}(L) + C_y = G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + q_0L - G - q_0L + G \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$-M_{z2}(L) + M_{z1}(L) - M_C = -GL \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{q_0}{2}L^2 + GL + \frac{q_0}{2}L^2 - G \frac{\sqrt{2}}{2}L = 0$$

2. Variante

Bereich 1 ($0 < x < L$):

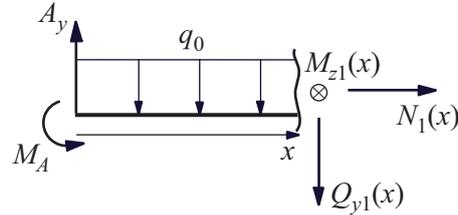


Abbildung 8.22: Schnittgrößen im Stab AC

$$\sum F_x : N_1(x) = 0$$

$$\sum F_y : Q_{y1}(x) + q_0x - A_y = 0$$

$$\Rightarrow Q_{y1}(x) = G + 2q_0L - q_0x$$

$$\sum M_{S_n} : M_{z1}(x) - q_0 \frac{x^2}{2} + A_yx - M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_{z1}(x) = 2GL + 2q_0L^2 - Gx - 2q_0Lx + q_0 \frac{x^2}{2}$$

Bereich 2 ($L < x < 2L$):

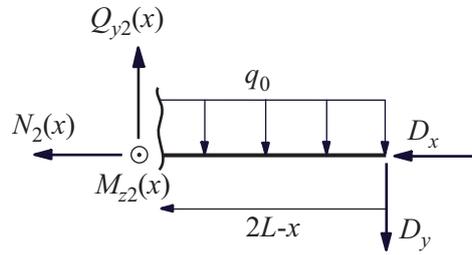


Abbildung 8.23: Schnittgrößen im Stab CD

$$\begin{aligned} \sum F_x : N_2(x) &= -D_x = -G \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sum F_y : D_y - Q_{y2}(x) + q_0(2L - x) &= 0 \\ \Rightarrow Q_{y2}(x) &= G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + q_0(2L - x) \\ \sum M_{S'_n} : -M_{z2}(x) + D_y(2L - x) + \frac{q_0}{2}(2L - x)^2 &= 0 \\ \Rightarrow M_{z2}(x) &= G \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (2L - x) + \frac{q_0}{2} (2L - x)^2 \end{aligned}$$

c) Graphische Darstellung:

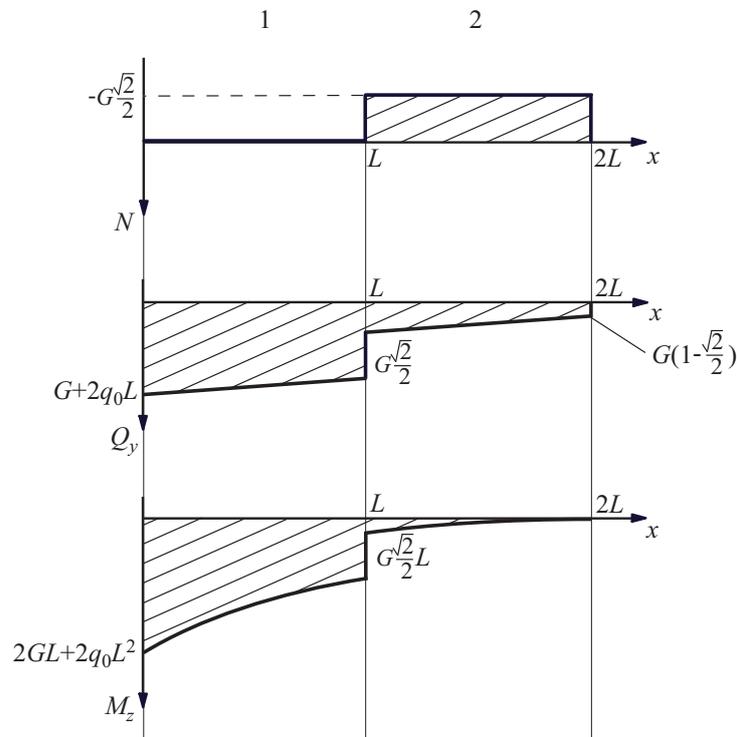


Abbildung 8.24: Verlauf der Beanspruchungskomponenten

Zu Q_y : Steigung von $-q_0$ (konstant)

Sprung von $C_y = G \frac{\sqrt{2}}{2}$ bei $x = L$

Zu M_z : Steigung negativ (Q_y positiv), wird kleiner mit grösserem x

Sprung von $M_C = G \frac{\sqrt{2}}{2} L$ bei $x = L$

$M_z(2L) = 0$

8.6 Verständnisfragen

1. Bei welchen Lagerarten ist die Normalkraft bzw. sind die Querkräfte gleich null?
2. Nenne alle möglichen Schnittgrößen! Wie ist deren Richtung in den Schnitten definiert?
3. Wie ist das Vorgehen zur Bestimmung der Beanspruchung in geraden Balken?
4. Können die differentiellen Beziehungen auch auf die Stellen eines Balkens angewandt werden, die mit Einzelkräften belastet werden? Wie?
5. Ein Balken ist mit einer gleichförmigen Linienkraft belastet. Ist der Momentenverlauf linear und der Querkraftverlauf quadratisch oder umgekehrt?
6. Bleibt der Querkraftverlauf über ein Auflager stetig?
7. Das Ende eines Balkenträgers ist mit einem langen Querlager gelagert. Welche Komponenten der Beanspruchung(en) ist(sind) hier ungleich Null?

Kapitel 9

Spannungen

9.1 Definition

In Kapitel 8 wurde gezeigt, wie äussere Belastungen innere Kräfte im Bauteil hervorrufen. Diese inneren Kräfte sind über die ganze Querschnittsfläche A verteilt und in der Regel auch veränderlich, das heisst nicht konstant über den Querschnitt.

Daher wird die Spannung für beliebige Punkte P des Querschnitts folgendermassen definiert:

im Punkt P wirke die Schnittkraft $\Delta \underline{\mathbf{F}}$ auf eine Fläche ΔA ($P \in \Delta A$).

Dann gilt für den Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}$:

$$\underline{\mathbf{s}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{\mathbf{F}}}{\Delta A}$$

Obwohl $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta \underline{\mathbf{F}} = 0$, strebt der Spannungsvektor gegen einen endlichen Wert. Gemäss Abbildung 9.1 kann der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}$ in eine Komponente σ senkrecht zur Schnittfläche und in eine Komponente τ tangential zur Schnittfläche zerlegt werden. σ wird dann Normalspannung und τ Schubspannung genannt. Aus der Abbildung 9.1 ist ebenfalls ersichtlich, dass die Grösse von σ und τ von der Orientierung der Schnittfläche, das heisst $\underline{\mathbf{n}}$, abhängt. Die Menge aller Spannungsvektoren $\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}})$ in P wird Spannungszustand im Punkt P genannt.

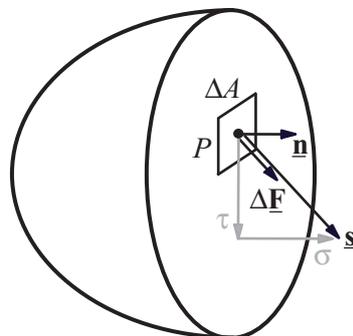


Abbildung 9.1: Spannungsvektor

9.2 Spannungstensor

Es lässt sich zeigen, dass der Spannungszustand in einem Punkt P durch die Spannungsvektoren von drei senkrecht aufeinander stehenden Schnitten definiert ist (siehe Sayir et al. Band 2, Fig. 15.8).

Diese drei Spannungsvektoren werden in jeweils drei Komponenten zerlegt: eine Normalspannung und zwei Tangentialspannungen. Für die Beschriftung der Indizes der Schubspannungen gilt dabei folgende Vereinbarung:

τ_{ab} wobei a : Richtung der Schubspannung
 und b : Richtung der Flächennormale der Schnittfläche in der die Schubspannung auftritt

Die Komponenten der Spannungsvektoren werden in einer Spannungsmatrix angeordnet, dem Spannungstensor $\underline{\mathbf{T}}$:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{e}}_x) & \underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{e}}_y) & \underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{e}}_z) \end{array}$$

Es lässt sich zeigen, dass für die Schubspannungen folgende Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}, \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz}, \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dies bedeutet:

Zugeordnete Schubspannungen sind gleich gross.

Durch Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Tetraederelement lässt sich folgender wichtiger Zusammenhang herleiten:

$$\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}}) = \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \tag{9.2}$$

Damit kann bei bekanntem Spannungstensor $\underline{\mathbf{T}}$ der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}$ auf beliebig gerichteten Schnittflächen durch den Punkt P berechnet werden. Die Komponenten von $\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}})$ werden dabei weiterhin bezüglich des ursprünglichen xyz -Koordinatensystems angegeben.

Beachtet werden muss des Weiteren, dass der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}$ *nicht* die Normal- und Schubspannungen angibt. Diese erhält man erst durch Projektion von $\underline{\mathbf{s}}$ auf den Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}$ (Abb. 9.2).

Die Beträge von Normal- und Schubspannung ergeben sich anschliessend durch Bilden des Skalarproduktes bzw. durch Subtraktion von $\sigma_n \underline{\mathbf{n}}$ von $\underline{\mathbf{s}}$ und anschliessender Betragsbildung:

$$\sigma_n = \underline{\mathbf{s}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \tag{9.3}$$

$$\tau_n = |\underline{\mathbf{s}} - \sigma_n \underline{\mathbf{n}}| \tag{9.4}$$

Zum Schluss noch eine **wichtige Bemerkung**: Alle hier getroffenen Aussagen gelten immer nur für einen bestimmten Punkt $P \in K$. In der Regel wird der Spannungszustand in anderen Punkten des Körpers anders sein.

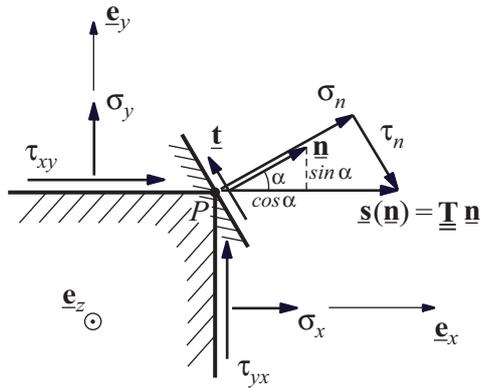


Abbildung 9.2: σ_n erhält man durch Projektion auf \underline{n} . σ_n und τ_n sind Spannungen bezüglich des \underline{n} - \underline{t} -Koordinatensystems

9.3 Anwendungen des Mohrschen Kreises

Ebene Spannungszustände

Der Mohrsche Kreis kann direkt angewendet werden (für schiefe Flächenelemente siehe Sayir et al. Band 2, S.38 ff.); gedreht wird dabei um die Flächennormale der spannungsfreien Ebene.

Räumliche Spannungszustände

- Eine Hauptspannung ($\neq 0$, sonst siehe ebener Spannungszustand) ist bekannt.

Die Spannungsmatrix nimmt dann die folgende Form an:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

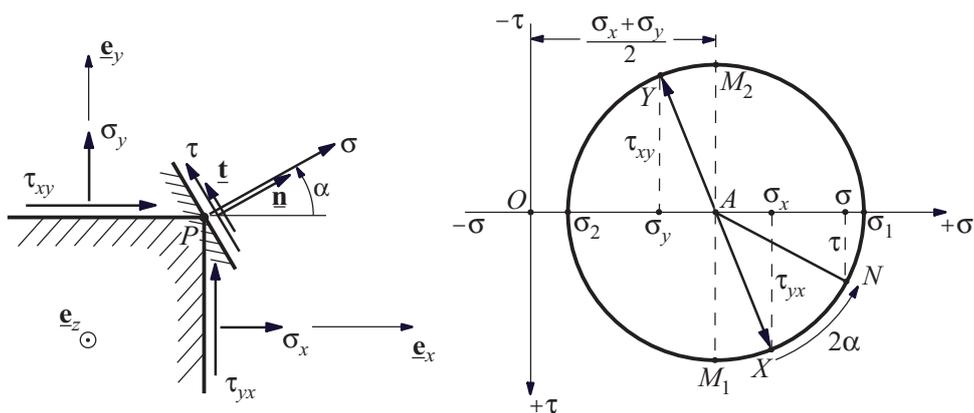


Abbildung 9.3: Für den ebenen Spannungszustand sowie für den Fall mit einer bekannten Hauptspannung können folgende wichtige Größen abgelesen werden: zwei Hauptspannungen und die maximale Schubspannung in der $x - y$ -Ebene

Ist eine Hauptspannung bekannt, so kann der Mohrsche Kreis für die zur zugehörigen Hauptrichtung senkrechte Ebene gezeichnet werden!

Hinweis: ein detailliertes Beispiel für diesen Fall findet sich in den Aufgaben.

- Keine Hauptspannung bekannt.

Der Mohrsche Kreis ist nicht direkt anwendbar; es handelt sich um das aus der linearen Algebra bekannte Eigenwertproblem $\underline{s}(\underline{e}_K) = \underline{T}\underline{e}_K = \sigma_K\underline{e}_K$.

9.4 Aufgaben

Aufgabe 1

In einem Punkt P eines Körpers sei der folgende Spannungszustand gegeben:

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot k$$

wobei k eine Konstante ist ($[k] = [\frac{N}{mm^2}]$)

Mit Hilfe der drei Mohrschen Spannungskreise bestimme man die grösste Normal- als auch die grösste Schubspannung im Punkt P .

Gegeben: $[T]$

Gesucht: σ_{max}, τ_{max}

Lösung:

Wenn man sich die Spannungsmatrix näher betrachtet, so stellt man fest, dass ein räumlicher Spannungszustand vorliegt, aber eine Hauptspannung direkt ablesbar ist. Diese Hauptspannung ist $\sigma_y = -k$. Dies wiederum bedeutet, dass die Mohrschen Kreise gezeichnet werden können.

Jedoch hat $[T]$ noch nicht die entsprechende Form. Um die Mohrschen Kreise zeichnen zu können, muss zuerst die einzige bekannte Hauptspannung "rechts unten" in der Matrix stehen. Dies erreicht man durch zyklisches Vertauschen. Dabei werden die Komponenten gemäss folgendem Schema umgestellt:

$$xyz \rightarrow zxy \rightarrow yzx \rightarrow xyz$$

Das Rechtssystem bleibt somit immer erhalten. In unserem Fall gilt:

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} 4k & 0 & \sqrt{3}k \\ 0 & -k & 0 \\ \sqrt{3}k & 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Rightarrow (xyz \rightarrow zxy) \quad [T]_{zxy} = \begin{bmatrix} 2k & \sqrt{3}k & 0 \\ \sqrt{3}k & 4k & 0 \\ 0 & 0 & -1k \end{bmatrix} \begin{matrix} z \\ x \\ y \end{matrix}$$

$x \quad y \quad z$
 $z \quad x \quad y$
Punkt
 $Z \quad X \quad Y$

Die drei Mohrschen Spannungskreise können nun gezeichnet werden. Generell muss dabei betrachtet werden, dass bei den drei Spannungskreisen immer nur um eine Hauptachse gedreht wird; anderenfalls befindet man sich in dem in (Sayir et al. Band 2, Fig. 15.22) beschriebenen schattierten Bereich. Betrachten wir Abb. 9.4. Als erstes werden die schon bekannten Punkte Z , X und Y eingetragen:

1. \underline{n} zeigt in Richtung von \underline{e}_z ; \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden ein Rechtssystem. τ zeigt in positive \underline{t} -Richtung \Rightarrow positive Schubspannungsordinate. Der Punkt Z liegt somit in der positiven Hälfte der Mohrschen Ebene. Weitere Werte:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_X + \sigma_Z}{2} = 3k \quad (9.5)$$

$$\tan 2\beta = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_M - \sigma_Z} \quad (9.6)$$

$$= \frac{\sqrt{3}k}{3k - 2k} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\beta = 60^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ \quad (9.7)$$

$$R = \sqrt{(\sigma_X - \sigma_M)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{k^2 + 3k^2} = 2k \quad (9.8)$$

$$\sigma_1 = \sigma_M + R = 5k = \sigma_{max} \quad (9.9)$$

$$\sigma_3 = \sigma_M - R = k$$

2. \underline{n} um \underline{e}_y um 15° bezüglich \underline{e}_z , gedreht. \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden Rechtssystem. τ zeigt in positive \underline{t} -Richtung \Rightarrow positive Schubspannungsordinate.

3. \underline{n} um \underline{e}_y um -30° bezüglich \underline{e}_x gedreht. \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden Rechtssystem. $\tau = 0 \Rightarrow \underline{n}$ zeigt in Richtung einer Hauptachse. σ ist die grösste Hauptspannung und wird als σ_1 definiert.

4. \underline{n} zeigt in Richtung von \underline{e}_x . \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden Rechtssystem. τ zeigt in negative \underline{t} -Richtung (aber in positive \underline{e}_z -Richtung deshalb ist $\tau_{zx} > 0$) \Rightarrow negative Schubspannungsordinate. Der Punkt X liegt somit in der negativen Hälfte der Mohrschen Ebene.

5. \underline{n} um \underline{e}_y um 15° bezüglich \underline{e}_x gedreht. \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden Rechtssystem. τ zeigt in negative \underline{t} -Richtung \Rightarrow negative Schubspannungsordinate.

6. \underline{n} um \underline{e}_y um -30° bezüglich \underline{e}_z gedreht. \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_y bilden Rechtssystem. $\tau = 0 \Rightarrow \underline{n}$ zeigt in Richtung einer Hauptachse. Diese Hauptrichtung wird als \underline{e}_3 definiert, damit sie zusammen mit $\underline{e}_y = \underline{e}_2$ und der oben definierten Hauptachse \underline{e}_1 ein Rechtssystem bildet.

7. \underline{n} um \underline{e}_1 um -45° bezüglich \underline{e}_2 gedreht, liegt in der Ebene senkrecht zu \underline{e}_1 . \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_1 bilden Rechtssystem. τ zeigt in negative \underline{t} -Richtung; der zugehörige Punkt liegt somit in der negativen Hälfte der Mohrschen Ebene \Rightarrow negative Schubspannungsordinate.

8. \underline{n} zeigt in Richtung von $\underline{e}_2 = \underline{e}_y$, liegt in der Ebene senkrecht zu \underline{e}_3 . \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_3 bilden Rechtssystem. σ ist Hauptspannung σ_2 .

9. \underline{n} um \underline{e}_3 um 45° bezüglich \underline{e}_2 gedreht, liegt in der Ebene senkrecht zu \underline{e}_3 . \underline{n} , \underline{t} und \underline{e}_3 bilden Rechtssystem. τ zeigt in positive \underline{t} -Richtung; der zugehörige Punkt liegt somit in der positiven Hälfte der Mohrschen Ebene \Rightarrow positive Schubspannungsordinate. τ ist die absolut grösste Schubspannung.

Berechnung von τ_{max} :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{5k + k}{2} = 3k$$

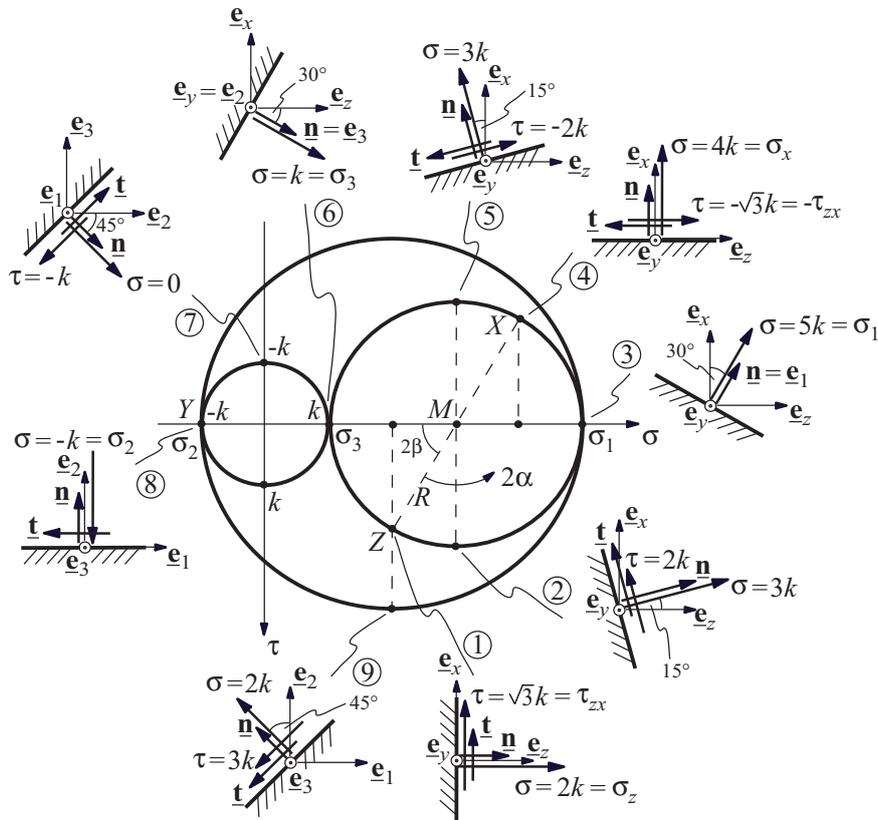


Abbildung 9.4: Mohrsche Spannungskreise. Der Winkel 2α soll andeuten, dass bei einer Drehung des Flächenelementes um α im Mohrschen Kreis um 2α gedreht werden muss.

Zum Schluss noch eine allgemeine Anmerkung: man dreht immer um die Haupttrichtung, deren Hauptspannung nicht auf dem betreffenden Kreis liegt, das heisst:

- $e_2 \rightarrow \sigma_1$ und σ_3 liegen auf Kreis
- $e_1 \rightarrow \sigma_2$ und σ_3 liegen auf Kreis
- $e_3 \rightarrow \sigma_1$ und σ_2 liegen auf Kreis

Aufgabe 2

Auf gegenüberliegenden Seiten eines Quaders wirken Kräfte vom Betrag $F_1 = 18000 \text{ N}$ und $F_2 = 20000 \text{ N}$. Sie stehen senkrecht auf der Fläche und sollen auf die ganze jeweilige Fläche wirken (Geometrie siehe Abb. 9.5).

Für einen Punkt P im Inneren des Körpers (weit entfernt von den Kräfteeinleitungsstellen) bestimme man die in den gezeichneten Schnittflächen S_1 und S_2 auftretenden Normal- und Schubspannungen:

- a) rechnerisch,
- b) mit Hilfe des Mohrschen Kreises.

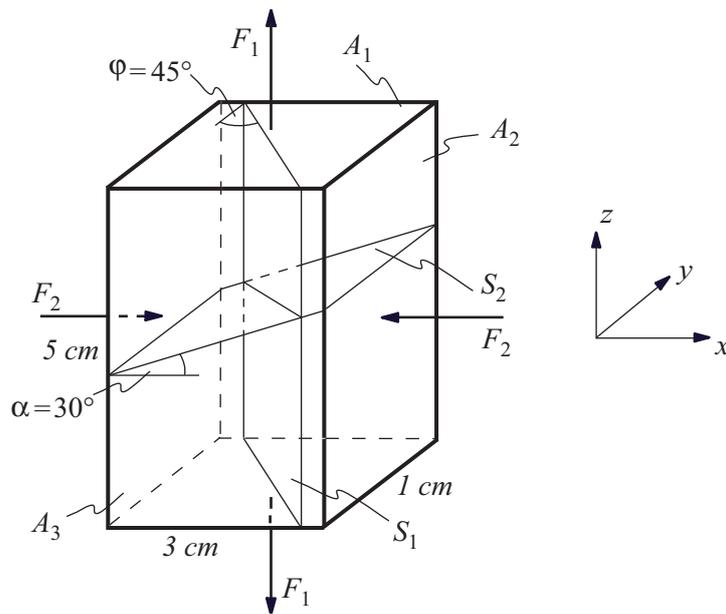


Abbildung 9.5: Quader (nicht massstäblich) mit Schnittflächen S_1 und S_2 .

Gegeben: F_1 , F_2 , Geometrie.

Gesucht: σ und τ in Schnittflächen

- a) rechnerisch,
- b) mit dem Mohrschen Kreis.

Lösung:

Wir betrachten im Folgenden nur Punkte im Inneren des Körpers, die genügend weit von den Seitenflächen entfernt sind. Gemäss dem Prinzip von St. Venant klingen Spannungsspitzen an Kräfteinleitungsstellen mit zunehmendem Abstand sehr schnell ab, so dass wir annehmen können, dass diese Spannungsspitzen keinen Einfluss mehr in Punkten im Inneren des Körpers haben.

Da die Kräfte auf gegenüberliegenden Seiten gleich gross sind und Volumenkräfte vernachlässigbar sein sollen, bildet sich im ganzen Inneren des Quaders ein homogener Spannungszustand aus. Zudem wirken die Kräfte senkrecht auf die Seitenfläche, so dass alle drei Hauptspannungen unmittelbar bestimmt werden können (im Weiteren verwenden wir wie im Maschinenbau üblich $[N/mm^2]$):

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{F_1}{A_1} = \frac{18\,000\text{ N}}{30\text{ mm} \cdot 10\text{ mm}} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} && \text{(Zug)} \\ \sigma_x &= \frac{F_2}{A_2} = \frac{-20\,000\text{ N}}{10\text{ mm} \cdot 50\text{ mm}} = -40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} && \text{(Druck)} \\ \sigma_y &= 0\end{aligned}$$

Anmerkung: An dieser Stelle sollten schon die ersten Plausibilitätsüberlegungen stattfinden:

beispielsweise hat der allgemeine Baustahl St33 eine Zugfestigkeit von $R_m \approx 300 \frac{N}{mm^2}$, das heisst die hier berechneten Werte liegen in einer realistischen Grössenordnung.

a) Da die drei Hauptspannungen bekannt sind, kann die Spannungsmatrix für einen Punkt im Inneren des Quaders unmittelbar angegeben werden:

$$[\mathbf{T}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \frac{N}{mm^2}$$

Anmerkung: Da in Schnitten senkrecht zur y -Achse keine Spannungen auftreten, handelt es sich um einen ebenen Spannungszustand (ESZ).

Um die Spannungsvektoren in beliebigen Schnitten bestimmen zu können, müssen nun noch die entsprechenden Normaleneinheitsvektoren bestimmt werden. Zuerst betrachten wir die Fläche S_1 :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_{S_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \underline{\mathbf{s}}(S_1) &= \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{n}}_{S_1} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \end{aligned}$$

Um σ und τ zu erhalten, muss nun noch $\underline{\mathbf{s}}$ in Richtung von $\underline{\mathbf{n}}_{S_1}$ bzw. $\underline{\mathbf{t}}_{S_1}$ projiziert werden:

$$\sigma = \underline{\mathbf{s}}(S_1) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{S_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-40) \frac{N}{mm^2} = -20 \frac{N}{mm^2}$$

τ kann nun auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt werden (Projektion von $\underline{\mathbf{s}}$ auf $\underline{\mathbf{t}}_{S_1}$ auf Grund des ESZ möglich):

$$\tau = \underline{\mathbf{s}}(S_1) \cdot \underline{\mathbf{t}}_{S_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 20 \frac{N}{mm^2}$$

oder

$$|\tau| = \sqrt{|\underline{\mathbf{s}}(S_1)|^2 - \sigma^2} = \sqrt{800 \frac{N}{mm^2} - 400 \frac{N}{mm^2}} = 20 \frac{N}{mm^2}$$

Bei der zweiten Variante muss immer noch überlegt werden, ob τ in Richtung von $\underline{\mathbf{t}}$ ($\Rightarrow \tau > 0$) zeigt oder nicht.

Für die Schnittfläche S_2 können die Spannungen analog berechnet werden:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{n}}_{S_2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \underline{\mathbf{s}}(S_2) &= \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{n}}_{S_2} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \\ \Rightarrow \sigma &= \underline{\mathbf{s}}(S_2) \cdot \underline{\mathbf{n}}_{S_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = 35 \frac{N}{mm^2}\end{aligned}$$

Hier muss beachtet werden, dass $\underline{\mathbf{n}}$, $\underline{\mathbf{t}}$ und $\underline{\mathbf{e}}_y$ ein Rechtssystem bilden, also gilt:

$$\underline{\mathbf{t}}_{S_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

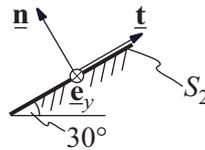


Abbildung 9.6: Verhältnisse bei S_2 . $\underline{\mathbf{n}}$, $\underline{\mathbf{t}}$ und $\underline{\mathbf{e}}_y$ bilden ein Rechtssystem.

Somit kann τ berechnet werden:

$$\tau = \underline{\mathbf{s}}(S_2) \cdot \underline{\mathbf{t}}_{S_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 30\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{N}{mm^2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 25\sqrt{3} \frac{N}{mm^2} \approx 43.3 \frac{N}{mm^2}$$

b) Schon zu Beginn wurden die drei Hauptspannungen bestimmt. Somit lassen sich sofort die drei Mohrschen Kreise zeichnen.

Zunächst werden wieder die Spannungen im Schnitt S_1 bestimmt. Wenn wir Abbildung 9.5 betrachten, so sehen wir, dass der Schnitt um die $\underline{\mathbf{e}}_z$ -Achse gedreht wurde.

Dies wiederum bedeutet, dass wir uns auf dem Mohrschen Kreis bewegen, der *nicht* durch $\sigma_1 = \sigma_z$ geht (s. Abb. 9.7).

Die Drehung erfolgt in positivem Drehsinn, das heißt im Gegenuhrzeigersinn um $\underline{\mathbf{e}}_z$ (rechte-Faust-Regel); sie beträgt 45° gegenüber der Fläche, auf der $\underline{\mathbf{e}}_x$ senkrecht steht. Im Mohrschen Kreis bedeutet dies eine Drehung um 2φ , das heißt um 90° und wir erreichen den Punkt A . Dort lässt sich ablesen:

$$\sigma = -20 \frac{N}{mm^2} \quad \tau = 20 \frac{N}{mm^2}$$

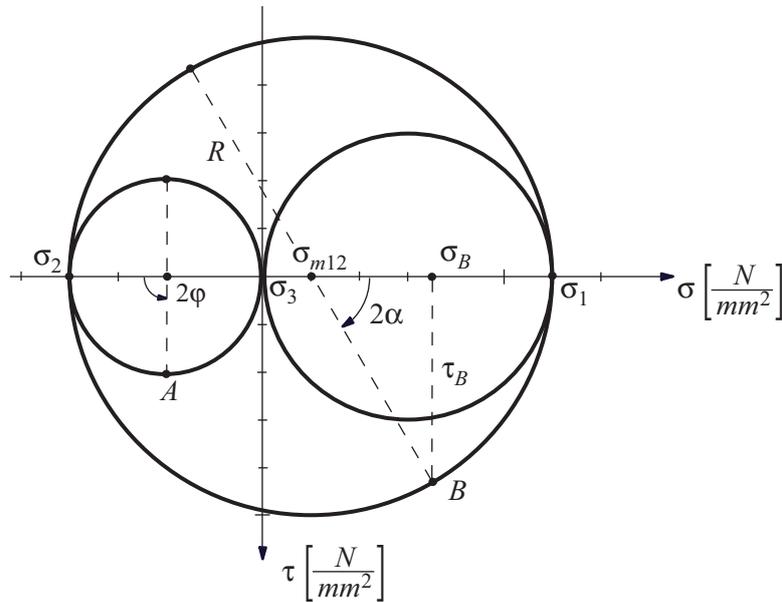


Abbildung 9.7: Die Mohrschen Kreise. Die grösste Hauptspannung wird mit σ_1 bezeichnet, die weiteren Hauptspannungen so, dass sich ein Rechtssystem $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ergibt. Hier wird daher σ_z zu σ_1 ; σ_2 und σ_3 ergeben sich anschliessend.

Die Spannungen im Schnitt S_2 ergeben sich durch Drehung um \underline{e}_y , das heisst wir bewegen uns auf dem Kreis, der durch σ_1 und σ_2 geht.

Es gilt allgemein, dass eine Drehung in positiver Drehrichtung um \underline{e}_y eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn im Mohrschen Kreis bedeutet. Analog gilt der Umkehrschluss:

im Raum:	\Rightarrow	im Mohrschen Kreis:
α mit negativem Drehsinn		Drehung um 2α im Uhrzeigersinn

Im Falle von S_2 gilt:

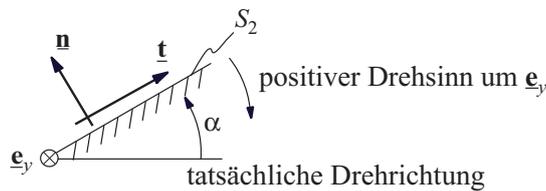


Abbildung 9.8: Tatsächliche Drehung erfolgt mit negativem Drehsinn

$\alpha = 30^\circ$ mit negativem Drehsinn \Rightarrow Drehung im Uhrzeigersinn um $2\alpha = 60^\circ$ im Mohrschen Kreis. Wir erreichen den Punkt B und lesen dort ab:

$$\sigma = 35 \frac{N}{mm^2} \quad \tau \approx 43 \frac{N}{mm^2}$$

Die genaue Werte können mit Hilfe des Mohrschen Kreises evaluiert werden (vergleiche Aufgabe 1):

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{60 - (-40)}{2} \frac{N}{mm^2} = 50 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{m12} = \sigma_1 - R = 10 \frac{N}{mm^2}$$

Damit sind die gesuchten Spannungen bestimmbar:

$$\frac{\tau_B}{R} = \sin 2\alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tau_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 \frac{N}{mm^2} \approx 43.3 \frac{N}{mm^2}$$

$$\frac{\sigma_B - \sigma_{m12}}{R} = \cos 2\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_B = 35 \frac{N}{mm^2}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Spannungsmatrix in einem Punkt P :

$$[T]_{xyz} = k \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- Man bestimme die Beträge der drei Hauptspannungen.
- Man ermittle mit Hilfe des Mohrschen Kreises die Richtung der grössten Hauptspannung und skizziere deren Lage.

Gegeben: $[T]_{xyz}$

Gesucht: a) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

b) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Lösung:

- Eine Hauptspannung kann direkt abgelesen werden:

$$\sigma_1 = 3k$$

Die beiden anderen Hauptspannungen können mit Hilfe des aus der linearen Algebra bekannt-

ten Eigenwertproblems bestimmt werden (siehe Sayir et al. Band 2, Gl. (15.56)):

$$\begin{aligned}
 -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\
 -6k^2 + 12k^2 + 8k^2 + 0 + 0 + 16k^2 &= -(3k\sigma_2 + \sigma_2(-2k - \sigma_2) + 3k(-2k - \sigma_2)) \\
 30k^2 &= -(3k\sigma_2 - 2k\sigma_2 - \sigma_2^2 - 6k^2 - 3k\sigma_2) \\
 24k^2 &= 2k\sigma_2 + \sigma_2^2 \\
 \sigma_2^2 + 2k\sigma_2 - 24k^2 &= 0 \\
 \sigma_{2,1,2} &= \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 + 96k^2}}{2} = \frac{-2k \pm 10k}{2} = -k \pm 5k \\
 &\Rightarrow \sigma_{2,1} = 4k \quad \text{und} \quad \sigma_{2,2} = -6k
 \end{aligned}$$

Die drei Hauptspannungen lauten somit $\sigma_1 = 3k$, $\sigma_2 = 4k$, $\sigma_3 = -6k$. An dieser Stelle bilden sie noch kein Rechtssystem, sondern sind nur der Grösse nach bestimmt.

b) Die Spannungsmatrix $[\mathbf{T}]$ hat noch nicht die Form, die zum Zeichnen der Mohrschen Kreise notwendig ist, das heisst wir müssen die Komponenten noch zyklisch vertauschen:

$$[\mathbf{T}]_{xyz} = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 4k \\ 0 & 3k & 0 \\ 4k & 0 & -4k \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \Rightarrow (xyz \rightarrow zxy) \quad [\mathbf{T}]_{zxy} = \begin{bmatrix} -4k & 4k & 0 \\ 4k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{matrix} z \\ x \\ y \end{matrix}$$

Bevor die Mohrschen Spannungskreise gezeichnet werden, betrachten wir noch die Flächenelemente in der xz -Ebene:

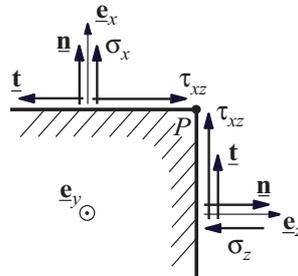


Abbildung 9.9: Flächenelemente in der $x - z$ -Ebene

τ_{xz} zeigt am Flächenelement mit Flächennormale in Richtung von \underline{e}_z in Richtung von \underline{t} ; der Punkt Z liegt daher in der positiven τ -Hälfte der Mohrschen Ebene (siehe Abb. 9.10).

Auf dem grössten Kreis befinden sich X und Z . Des Weiteren wurde die grösste Hauptspannung nun mit σ_1 bezeichnet. Um die weiteren Hauptspannungen bestimmen zu können, betrachten wir wieder die obigen Flächenelemente (Abb. 9.11):

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ und \underline{e}_3 wurden so gewählt, dass sich ein Rechtssystem ergibt. Damit sind die Hauptspannungen festgelegt:

$$\sigma_1 = 4k \quad \sigma_2 = -6k \quad \sigma_3 = 3k$$

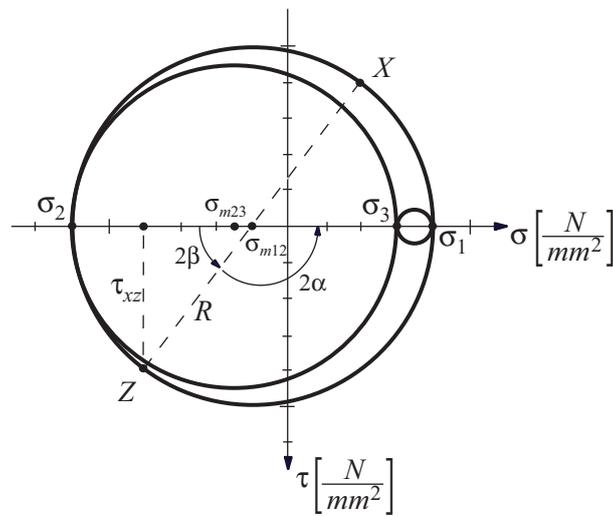


Abbildung 9.10: Mohrscher Kreis

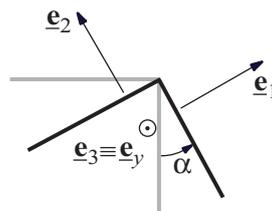


Abbildung 9.11: Hauptachsen

Zum Schluss soll nun der Winkel α bestimmt werden. Zuerst muss der Radius R des betreffenden Kreises bestimmt werden:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{6k + 4k}{2} = 5k$$

Da die Schubspannung $\tau_{xz} = 4k$ bekannt ist, gilt:

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{\tau_{xz}}{R} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5} \\ \Rightarrow 2\beta &\approx 53.1^\circ \Rightarrow \beta \approx 26.6^\circ \\ \Rightarrow \alpha &= 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 26.6^\circ = 63.4^\circ \end{aligned}$$

9.5 Verständnisfragen

1. Erläutere den Begriff Spannung!
2. Erkläre den Begriff Normalspannung und Schubspannung!
3. Was versteht man unter einer zulässigen Spannung?
4. Was bedeuten die einzelnen Elemente im Spannungstensor?

5. Welche Grössen können mit Hilfe des Mohrschen Kreises bestimmt werden?
6. Wo liegen die Hauptspannungen im Mohrschen Kreis?
7. Kann der Mohrsche Kreis angewandt werden, wenn keine der Hauptspannungen bekannt ist?
8. Mit welchen Methoden lassen sich die Hauptspannungen aus dem Spannungstensor berechnen?
9. Wie kann man die Schubspannung berechnen, falls der Spannungsvektor \underline{s} an einem Flächenelement mit Normalenvektor \underline{n} gegeben ist?
10. Welche Grösse gibt der Radius des Mohrschen Kreises an?
11. Wodurch ist der ebene Spannungszustand gekennzeichnet?

Kapitel 10

Verzerrungen

10.1 Herleitung

Wird ein deformierbarer Körper belastet, so geht er aus einer ursprünglichen Gleichgewichtslage in eine neue Gleichgewichtslage über. Dabei können für kleine Verformungen die in Abbildung 10.1 gezeigten Effekte auftreten.

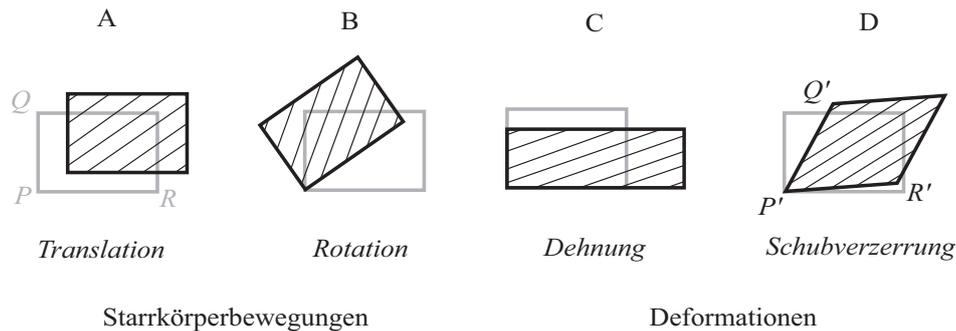


Abbildung 10.1: Unter äusserer Belastung eines Körpers auftretende Starrkörperbewegungen und Deformationen eines infinitesimalen Elements

Wird nur der Punkt P betrachtet, so wird die neue Lage von P' durch den Vektor $\underline{PP'}$ charakterisiert. Dieser Vektor ist bei Deformationen abhängig von der Lage des Punktes P im Körper; es handelt sich also um eine vektorielle Ortsfunktion, das Verschiebungsfeld der Deformation, im ebenen Fall gegeben durch:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Hieraus können die Dehnungen abgeleitet werden:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y} \quad (10.1)$$

Für die Winkel bei der Deformation gilt (vgl. Sayir et al. Band 2, S.57 f.):

$$\gamma_y = \frac{\partial u_x}{\partial y} = u_{x,y} \quad \gamma_x = \frac{\partial u_y}{\partial x} = u_{y,x} \quad (10.2)$$

Die Winkel γ_x und γ_y setzen sich aus einer Starrkörperdrehung sowie aus Schubverzerrungen zusammen:

$$\gamma_x = \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_y) + \frac{1}{2}(\gamma_x - \gamma_y) \quad (10.3)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_y) - \frac{1}{2}(\gamma_x - \gamma_y) \quad (10.4)$$

wobei $\frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_y)$ die Schubverzerrung beschreibt und $\frac{1}{2}(\gamma_x - \gamma_y)$ der Starrkörperdrehung um P entspricht.

Die Schubverzerrungen werden im Weiteren wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}(\gamma_x + \gamma_y) = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) \quad (10.5)$$

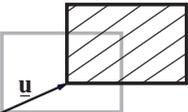
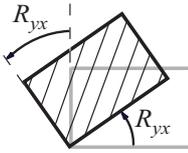
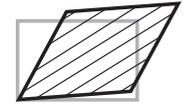
Für die Winkeländerung des rechten Winkels zwischen PR und PQ gilt dabei die Vorzeichenkonvention:

$$\varepsilon_{xy} \begin{cases} > 0 & : \text{Winkelverkleinerung} \\ < 0 & : \text{Winkelvergrößerung} \end{cases}$$

Die totale Winkelverkleinerung, das heisst der Schubwinkel, beträgt (im Bogenmass):

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = u_{y,x} + u_{x,y} = 2 \cdot \varepsilon_{xy} \quad (10.6)$$

Zum Abschluss kommen wir nochmals auf die anfangs vorgestellten Vorgänge zurück und stellen sie hier nochmals in einer Tabelle dar:

Beschreibung		Starrkörperbewegung	Deformationen (allg.)
Translation		$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$	$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$
Rotation		$R_{yx} = \frac{1}{2}(\gamma_x - \gamma_y)$ $= \frac{1}{2}(u_{y,x} - u_{x,y})$	$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$
Dehnung		keine	$\varepsilon_x = u_{x,x}$ $\varepsilon_y = u_{y,y}$ $\varepsilon_{xy} = 0$
Schubverzerrung		keine	$\varepsilon_x = 0$ $\varepsilon_y = 0$ $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{y,x} + u_{x,y})$

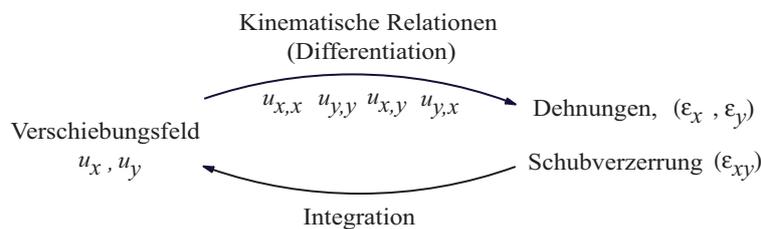
10.2 Zusammenhang zwischen Verschiebungsfeld und Deformationen für den ebenen Fall

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse ist es nun entweder möglich bei:

- gegebenem Verschiebungsfeld die Dehnungen und Schubverzerrungen durch die kinematischen Relationen $\varepsilon_x = u_{x,x}$, $\varepsilon_y = u_{y,y}$ und $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x})$, oder
- bei gegebenen Dehnungen und Schubverzerrungen das Verschiebungsfeld

zu berechnen.

Die folgende Skizze soll das verdeutlichen:



Beispiel: eindimensionale Deformation

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} &\Rightarrow \int du_x = \int \varepsilon_x dx \\ &\Rightarrow u_x(x) - u_x(0) = \int_0^x \varepsilon_x dx \end{aligned}$$

10.3 Verzerrungstensor

Alle bisherigen Überlegungen in diesem Kapitel haben sich auf ebene Probleme bezogen. Diese Erkenntnisse können problemlos auf dreidimensionale Fragestellungen erweitert werden, so dass für die weiteren Dehnungen und Schubverzerrungen gilt:

$$\varepsilon_z = u_{z,z} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y})$$

Damit sind nun alle Komponenten der sogenannten Verzerrungsmatrix $[E]$ bekannt:

$$[E]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

Wie bei der Spannungsmatrix handelt es sich hierbei um die Komponentendarstellung eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe, so dass alle Eigenschaften eines solchen Tensors (vergleiche Kapitel 9 für den Spannungstensor) auch für $\underline{\underline{E}}$ gelten:

- es gibt drei senkrecht aufeinander stehende Hauptrichtungen, bei denen die Schubverzerrungen verschwinden. Ein infinitesimales Rechteck wird somit wieder auf ein Rechteck abgebildet.

- bei Drehung des Koordinatensystems gelten für die Dehnungen und Schubverzerrungen $\{\varepsilon_n, \varepsilon_{nt}\}$ folgende Beziehungen:

$$\varepsilon_n = \{n\}^T [E] \{n\} \quad (10.8a)$$

$$\varepsilon_{nt} = \{t\}^T [E] \{n\} \quad (10.8b)$$

- es gibt einen Mohrschen Verzerrungskreis (vgl. Kapitel 9.3).

10.4 Aufgaben

Aufgabe 1

In einem Körper ist ein homogenes, ebenes Verschiebungsfeld gegeben:

$$u_x = \frac{x \cdot y}{a}$$

$$u_y = 2x + y$$

- a) Man bestimme die Verzerrungsmatrix im gegebenen xy -Koordinatensystem.
 b) Man bestimme analytisch Dehnung und Schubverzerrung an einer um 45° im Gegenuhrzeigersinn geneigten Richtung.

Gegeben: u_x, u_y

Gesucht: a) $\underline{\mathbf{E}}$
 b) $\varepsilon_\xi, \varepsilon_{\xi\eta}$

Lösung:

- a) Der Verzerrungstensor lässt sich mit Hilfe der kinematischen Relationen bestimmen:

$$\varepsilon_x = u_{x,x} = \frac{y}{a}$$

$$\varepsilon_y = u_{y,y} = 1$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + 2 \right)$$

Damit gilt für $[\mathbf{E}]$:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{y}{a} & \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + 2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + 2 \right) & 1 \end{bmatrix}$$

- b) Für eine um 45° gedrehte Richtung gilt:

$$\underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{t}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich nun mit Hilfe von 10.8a und 10.8b die Dehnung und Schubverzerrung bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\xi &= \{n\}^T [E] \{n\} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) \begin{bmatrix} \frac{y}{a} & \frac{1}{2}(\frac{x}{a} + 2) \\ \frac{1}{2}(\frac{x}{a} + 2) & 1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (1, 1) \begin{pmatrix} \frac{y}{a} + \frac{x}{2a} + 1 \\ \frac{x}{2a} + 1 + 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{y}{a} + 1 + \frac{x}{a} + 2 \right] = \frac{y}{2a} + \frac{3}{2} + \frac{x}{2a} \\
 \varepsilon_{\xi\eta} &= \{t\}^T [E] \{n\} = \frac{1}{2} (-1, 1) \begin{bmatrix} \frac{y}{a} + \frac{x}{2a} + 1 \\ \frac{x}{2a} + 2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y}{a} - \frac{x}{2a} - 1 + \frac{x}{2a} + 2 \right] = -\frac{y}{2a} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Allgemeine Einführung zur Messung von Dehnungen:

Dehnungen werden in der Praxis mit Hilfe von sogenannten Dehnmessstreifen (DMS) gemessen. Dabei handelt es sich um Drahtwindungen, die durch Dehnung eine Längenänderung in Messrichtung und somit auch eine Widerstandserhöhung erfahren. Hierauf beruht das Messprinzip.

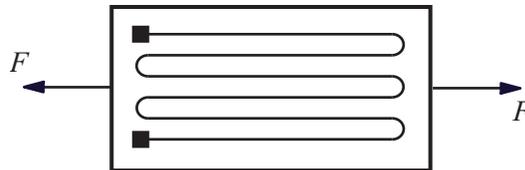


Abbildung 10.2: Dehnmessstreifen

Bei der tatsächlichen Messung wird der DMS so auf eine Oberfläche geklebt, dass er die gleichen Dehnungen erfährt wie der darunter liegende Körper. Die Vorgehensweise macht deutlich, dass nur Dehnungen an der Oberfläche des Körpers gemessen werden können. Da die höchstbeanspruchten Stellen eines Bauteils oft ebenfalls an der Oberfläche liegen, stellt eine Beschränkung auf die Oberfläche keinen wesentlichen Nachteil dar.

Der Verformungszustand selbst ist durch die Größen ε_x , ε_y und ε_{xy} gekennzeichnet. Da Schubverzerrungen mittels DMS nicht gemessen werden können, werden drei Dehnungen gemessen.

Aufgabe:

Auf der unbelasteten Oberfläche eines Bauteiles aus Stahl ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) werden in drei sich um 45° unterscheidenden Richtungen die Dehnungen $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 0.8 \cdot 10^{-3}$ und $\varepsilon_{45} = 2 \cdot 10^{-3}$ gemessen (siehe Abb. 10.3).

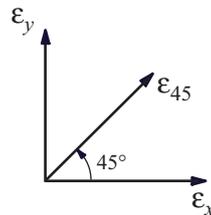


Abbildung 10.3: Messrichtungen

Für die unbelastete Oberfläche bestimme man mit Hilfe des Mohrschen Kreises:

- E**
- die Hauptdehnungen
- die Hauptdehnungsrichtung der grössten Hauptdehnung
- die Richtung und den Betrag der maximalen Schubverzerrung für Schnitte senkrecht zur unbelasteten Oberfläche.

Gegeben: $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 0.8 \cdot 10^{-3}$ und $\varepsilon_{45} = 2 \cdot 10^{-3}$.

Gesucht: siehe Aufgabenstellung.

Lösung:

- Mohrscher Kreis, allgemein:

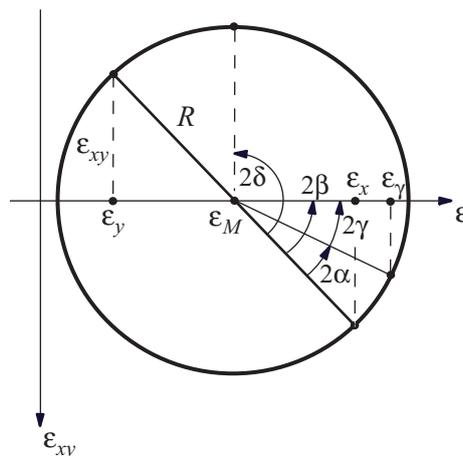


Abbildung 10.4: Mohrscher Dehnungskreis

Es gilt *allgemein*:

$$\varepsilon_M = \varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (1)$$

$$\cos 2\beta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_M}{R} \quad (2)$$

$$\cos 2\gamma = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_M}{R} = \cos(2\beta - 2\alpha) \quad (3)$$

$$\gamma = \beta - \alpha$$

Man erhält so drei Gleichungen für drei Unbekannte (ε_M , R und β).

Hier *konkret*:

$$\text{aus (1): } \varepsilon_M = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{1}{2}(2 + 0.8) \cdot 10^{-3} = 1.4 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{aus (3): } \cos 2\gamma = \cos(2\beta - 2\alpha) = \cos(2\beta - 90^\circ) = \sin 2\beta = \frac{\varepsilon_{45} - \varepsilon_M}{R} = \frac{1}{R} 0.6 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{0.6 \cdot 10^{-3}}{\sin 2\beta} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in (2): } \cos 2\beta = \frac{0.6 \cdot 10^{-3}}{0.6 \cdot 10^{-3}} \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow 2\beta = 45^\circ \Rightarrow \beta = 22.5^\circ \quad (5)$$

$$(5) \text{ in (4): } R = \frac{0.6 \cdot 10^{-3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}$$

Damit gilt:

$$\tan 2\beta = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_M} = 1 \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \varepsilon_x - \varepsilon_M = 0.6 \cdot 10^{-3}$$

Für die Verzerrungsmatrix ergibt sich somit:

$$[E]_{xy} = \begin{bmatrix} 2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Verformungen senkrecht zur Oberfläche können mit Hilfe des Stoffgesetzes bestimmt werden (siehe Kapitel 11, Aufgabe 1).

b) Die Beziehungen für die Hauptdehnungen ergeben sich aus Aufgabe a):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_M + R = 1.4 \cdot 10^{-3} + \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \approx 2.25 \cdot 10^{-3} = 0.225\%$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_M - R = 1.4 \cdot 10^{-3} - \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \approx 0.55 \cdot 10^{-3} = 0.055\%$$

c) Die Hauptdehnungsrichtung wurde schon in a) bestimmt:

$$\beta = 22.5^\circ$$

d) Ebenfalls aus a) können diese Werte bestimmt werden:

$$\varepsilon_{xy,max} = R = \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \approx 0.85 \cdot 10^{-3} = 0.085\%$$

Die Richtung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}2\delta &= 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \\ \delta &= 67.5^\circ\end{aligned}$$

Für den maximalen Schubwinkel, das heisst die maximale totale Winkelverkleinerung, gilt:

$$\gamma_{xy,max} = 2\varepsilon_{xy,max} \approx 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ (im Bogenmass!)}$$

In Gradmass umgerechnet ist dies:

$$\gamma_{xy,max} \approx 0.097^\circ$$

10.5 Verständnisfragen

1. Aus welchen Anteilen besteht der Verformungszustand allgemein?
2. Wie kommt man vom Verschiebungsfeld auf die Dehnung bzw. die Schubverzerrung und wie werden diese dann in der Verzerrungsmatrix [E] angeordnet?
3. Wie sind die Dehnung und Schubverzerrung allgemein definiert?
4. Wie lässt sich der Mohrsche Kreis bei den Verzerrungen verwenden? Zeige die Analogie zu Spannungen!
5. Zeichne den Mohrschen Kreis für die Spezialfälle (ebener Verformungszustand!): $\gamma_{xy} = k$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ und $\gamma_{xy} = \varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_x = k$
6. Stimmen die Hauptrichtungen für den Mohrschen Spannungs- und Verzerrungskreis überein?

Kapitel 11

Stoffgesetze für isotrope Materialien

11.1 Zugversuch

In den vorhergehenden Abschnitten wurden bisher Aussagen über Spannungen (aus Gleichgewichtsbedingungen) und Verformungen (aus geometrischen Betrachtungen) gemacht. Nun werden diese Abschnitte miteinander verknüpft. Diese Verknüpfungen sind Eigenschaften von Werkstoffen und werden auf experimentellem Wege bestimmt.

Das wichtigste Experiment hierfür ist der Zugversuch. Dabei wird eine Zugprobe an beiden Enden eingespannt, belastet und die hieraus resultierende Dehnung gemessen. Anschliessend wird die Spannung über der Dehnung aufgetragen. Man erhält so das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (siehe Abb. 11.1).

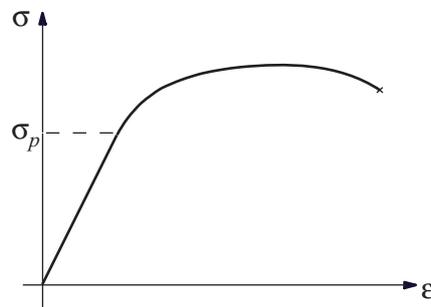


Abbildung 11.1: σ - ϵ -Diagramm für duktiler (verformbares) Material

Bis zu einer bestimmten Spannung, hier als σ_p bezeichnet, gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen σ und ϵ ; man befindet sich im linear-elastischen Bereich.

In diesem Bereich gilt folgende Beziehung (Hookesches Gesetz):

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (11.1)$$

mit E : Elastizitätsmodul

Der Elastizitätsmodul E ist somit der Proportionalitätsfaktor zwischen σ und ϵ .

Es lassen sich aber noch weitere Beobachtungen im Zugversuch machen: zeigt die Längsachse der Probe in x -Richtung und wird auch in dieser Richtung belastet, so stellt man neben der Dehnung in Längsrichtung auch Dehnungen in y - und z -Richtung fest, das heisst Dehnungen

quer zur Belastung. Diese Querdehnungen sind über folgende Beziehung mit der Dehnung in Zugrichtung verknüpft:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

mit ν : Querdehnungszahl

Daraus lassen sich zwei Dinge ablesen:

- verlängert sich ein Stab unter einer Kraft in Längsrichtung, so werden die Abmessungen quer dazu kleiner.
- ein einachsiger Spannungszustand führt zu einem dreiachsigen Verformungszustand.

11.2 Torsionsversuch

Beim Zugversuch wurden die Zusammenhänge zwischen Normalspannung und Dehnung untersucht. Dabei sind die Schubspannungen und Schubverzerrungen in Ebenen senkrecht zur Zugrichtung gleich Null. In einem zweiten grundlegenden Versuch, dem Torsionsversuch, ist es genau umgekehrt. Durch das äussere Torsionsmoment geht das infinitesimale Element dx in eine deformierte Lage über, gekennzeichnet durch den Winkel γ .

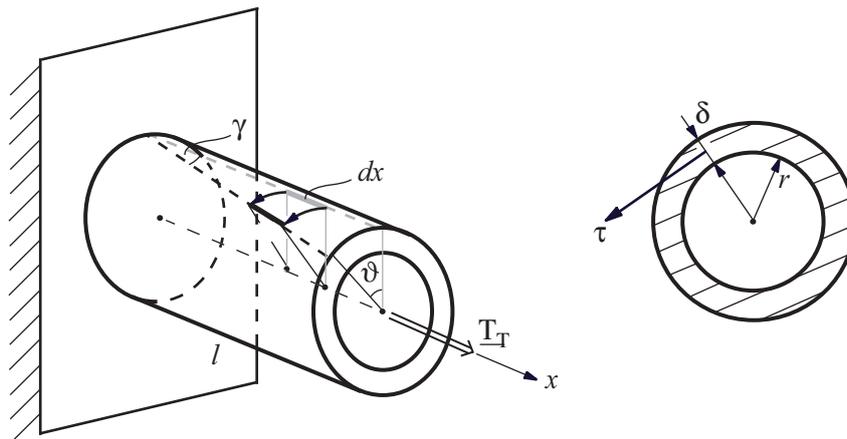


Abbildung 11.2: Torsionsversuch an einem dünnwandigen Rohr ($\delta \ll r$)

Für den Schubwinkel γ gilt dabei folgende geometrische Beziehung:

$$\gamma = \vartheta \cdot \frac{r}{l} \quad (11.2)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen an einem beliebigen Querschnitt erhält man das dort wirkende Moment M_t . Dieses muss gleich gross sein wie die an dieser Stelle wirkenden Schubspannungen multipliziert mit Rohrradius und Querschnittsfläche, also:

$$\begin{aligned} T_t &= \tau \cdot 2\pi r \cdot \delta \cdot r \\ \Rightarrow \tau &= \frac{M_t}{2\pi r^2 \delta} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Wenn nun analog zum Zugversuch τ über γ aufgetragen wird, so erhält man eine ähnliche Kurve wie in Abbildung 11.1 und wieder einen ähnlichen linearen Zusammenhang (hier bspw. für τ_{xy} und γ_{xy}):

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot 2\varepsilon_{xy} \quad (11.4)$$

mit G : Schubmodul

Es lässt sich ausserdem zeigen, dass zwischen E , ν und G für isotrope Materialien folgender wichtiger Zusammenhang besteht:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (11.5)$$

Hinweis 1: Mit zwei aus den drei Materialkennwerten aus Gl. (11.5) lässt sich das mechanische Verhalten isotroper Materialien komplett beschreiben.

Hinweis 2: Der Fall $\nu = \frac{1}{2}$ beschreibt inkompressibles Material (beispielsweise gummielastische Materialien).

11.3 Veranschaulichung der durch Normal- und Schubspannungen hervorgerufenen Deformationen

In Kapitel 10.1 wurden schon die möglichen Deformationen - Dehnung und Schubverzerrung - skizziert. An dieser Stelle sollen nun noch einmal kurz die Zusammenhänge zwischen Spannungen und Deformationen veranschaulicht werden:

1. Zugversuch:

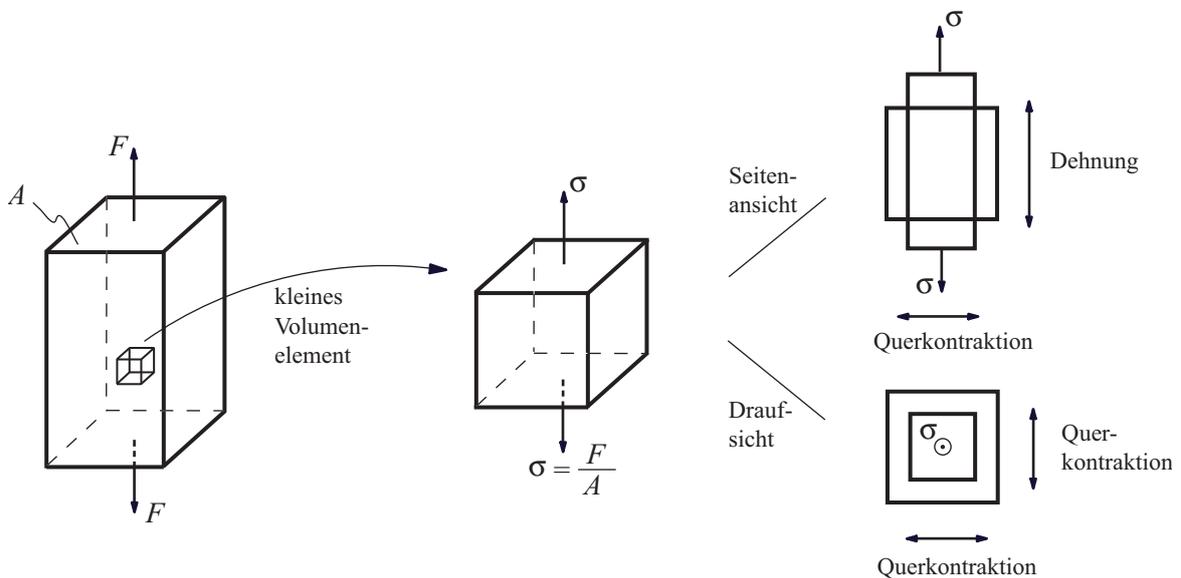


Abbildung 11.3: Durch Normalspannung verursachte Deformationen

In jedem Punkt im Inneren des Körpers bildet sich ein einachsiger, homogener Spannungszustand mit Normalspannung σ aus, der zu den skizzierten Deformationen führt.

2. Torsionsversuch:

Die dem Volumenelement zugeordneten Schubspannungen und Winkel sind:

$$\tau = \frac{T_t}{I_P} \cdot R$$

mit I_P : polares Flächenmoment (s. Kapitel 18)

$$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = \frac{\tau}{G}$$

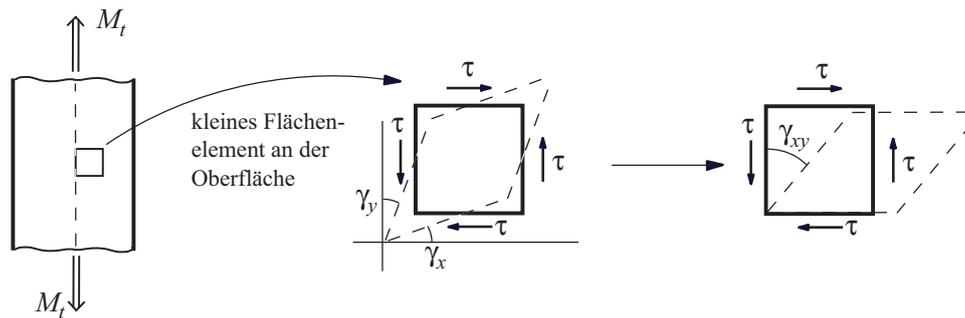


Abbildung 11.4: Durch Torsionsmoment hervorgerufene Deformationen

11.4 Temperaturdehnungen

Neben Kräften können auch Temperaturänderungen die Ursache von Verformungen sein. Bei homogenen und isotropen Werkstoffen sind die Dehnungen in alle Richtungen gleich gross. Schubverzerrungen treten dabei nicht auf. Die Temperaturdehnung wird wieder an einem Probestab gemessen. Experimentell lässt sich bei einer Temperaturänderung von T_0 auf T_1 folgendes Ergebnis feststellen:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot (T_1 - T_0) \quad (11.6)$$

mit α : Ausdehnungskoeffizient (materialabhängig) [1/K]

Aus Gl. (11.6) ist auch ersichtlich, dass die Temperaturdehnung bei Abkühlung auf die Ausgangstemperatur T_0 wieder verschwindet.

11.5 Mehrachsige Spannungszustände

In Abschnitt 11.1 wurde das sogenannte Hookesche Gesetz

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

nachgewiesen. Diese Beziehung gilt aber nur für den einachsigen Spannungszustand (beispielsweise beim Zugversuch). Die Erweiterung auf den dreiachsigen Spannungszustand erfolgt nun.

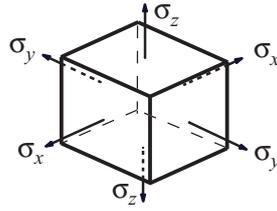


Abbildung 11.5: Beim homogen-isotropen Körper sind Spannungshauptachsen auch Dehnungshauptachsen

Hierzu soll ein Quader (siehe Abb. 11.5) betrachtet werden, an dessen Flächen die Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z wirken, aber keine Schubspannungen (x , y und z sind also Spannungshauptrichtungen).

Man stellt experimentell fest, dass nur Dehnungen ε_x , ε_y und ε_z auftreten, jedoch keine Schubverzerrungen ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{yz} . Dies bedeutet, dass die rechten Winkel des Quaders erhalten bleiben und somit x , y , z auch Dehnungshauptachsen sind. Da die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen linear sind, können sie überlagert werden. Es ergeben sich somit die Dehnungen im dreiachsigen Spannungszustand mit Berücksichtigung der Temperaturdehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T \quad (11.7a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T \quad (11.7b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \cdot \Delta T \quad (11.7c)$$

Greifen am Quader in den Flächen zusätzlich auch noch Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} an, so ändern sich die Dehnungen ε_x , ε_y , ε_z nicht mehr, jedoch kommt es zu einer Änderung der ursprünglich rechten Winkel durch Schubverzerrungen:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad (11.8a)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \quad (11.8b)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \quad (11.8c)$$

Bei vielen Problemen sind die Dehnungen oder Temperaturänderungen bekannt und gesucht werden die Spannungen. Es kann gezeigt werden, dass dies durch folgendes Gleichungssystem möglich ist:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad (11.9a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad (11.9b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \Delta T \quad (11.9c)$$

11.6 Aufgaben

Aufgabe 1

Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung der Aufgabe 2 des Kapitels 10. Man bestimme noch zusätzlich:

- den Spannungstensor für das xyz -Koordinatensystem
- die Hauptspannungen
- die Hauptspannungsrichtung für die grösste Hauptspannung
- den Betrag und die Richtung der grössten Schubspannung für Schnitte senkrecht zur Oberfläche

Gegeben: $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 0.8 \cdot 10^{-3}$ und $\varepsilon_{45} = 2 \cdot 10^{-3}$ (siehe Abb. 10.4)

Gesucht: $[T]$, σ_k , α , τ_{max}

Lösung:

a) Da es sich gemäss Aufgabe um eine unbelastete Oberfläche handelt, können wir sofort angeben:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Des Weiteren gilt mit den Gleichungen (11.7) für den ESZ:

$$\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad (1),$$

$$\varepsilon_y = 0.8 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad (2),$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y]. \quad (3)$$

Man erhält so drei Gleichungen mit drei Unbekannten. Damit ergibt sich:

$$\text{aus (1): } \sigma_y = \frac{\sigma_x - E\varepsilon_x}{\nu}$$

$$\text{in (2): } \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_x - E\varepsilon_x}{\nu} - \nu \sigma_x \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\nu E \varepsilon_y + E \varepsilon_x}{1 - \nu^2} = \frac{0.3 \cdot 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 0.8 \cdot 10^{-3} + 210000 \frac{N}{mm^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1 - 0.09} \approx 517 \frac{N}{mm^2}$$

Damit gilt:

$$\sigma_y \approx 323 \frac{N}{mm^2}$$

Zuletzt kann noch ε_z berechnet werden:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \approx -0.0012 = -1.2 \cdot 10^{-3}$$

Die restlichen Spannungskomponenten lassen sich mit Hilfe von Gleichung (11.8a) berechnen:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad \text{mit } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \varepsilon_{xy} \cdot \frac{E}{1+\nu} \approx 97 \frac{N}{mm^2}$$

Damit gilt für [T]:

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} 517 & 97 & 0 \\ 97 & 323 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{N}{mm^2}$$

b) Wir verwenden Beziehungen ähnlich wie in Aufgabe 2 a) des Kapitels 10 (hier ebener Spannungszustand):

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 420 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tan 2\beta = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_M} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\beta = 45^\circ$$

Berechnung von R :

$$\sin 2\beta = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{2}} \approx 137 \frac{N}{mm^2}$$

Damit gilt für die Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = \sigma_M + R \approx 420 \frac{N}{mm^2} + 137 \frac{N}{mm^2} = 557 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_M - R \approx 283 \frac{N}{mm^2}$$

c) Für die Hauptspannungsrichtung gilt:

$$2\beta = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 22.5^\circ$$

d) Aus dem Mohrschen Kreis ergibt sich (Abb. 10.4):

$$|\tau_{xy}|_{max} = R \approx 137 \frac{N}{mm^2}$$

Für den Winkel gilt:

$$2\gamma = 2\beta + 90^\circ = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \gamma = 67.5^\circ$$

Dies muss so sein, da Hauptrichtungen im Spannungs- und Dehnungskreis übereinstimmen.

Aufgabe 2

Ein quaderförmiger, deformierbarer Körper ist in x -Richtung auf Druck beansprucht und in y -Richtung frei deformierbar. Die Querdehnung ist in z -Richtung durch eine geeignete Führung behindert.

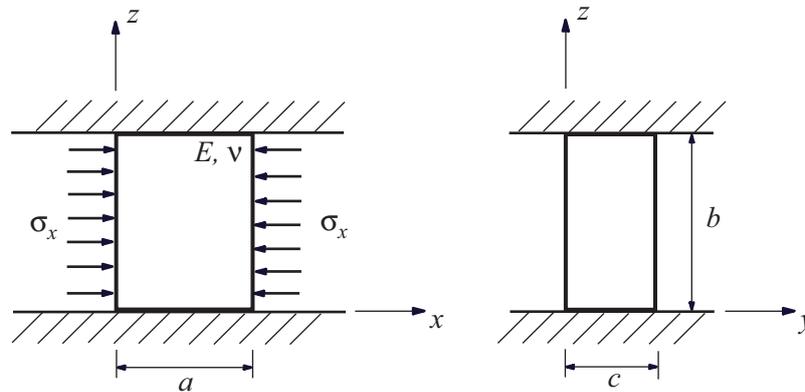


Abbildung 11.6: Quader auf Druck beansprucht

Man bestimme ε_x , ε_y , ε_z sowie σ_y und σ_z .

Gegeben: a , b , c , E , ν , σ_x

Gesucht: ε_x , ε_y , ε_z , σ_y und σ_z

Lösung:

Aufgrund der Verformungsbehinderung in der z -Richtung kann ε_z sofort bestimmt werden:

$$\varepsilon_z = 0 \quad (1)$$

Da in y -Richtung keine Kräfte angreifen (freie Oberfläche), gilt dort:

$$\sigma_y = 0 \quad (2)$$

Unbekannt sind nun noch folgende Größen: ε_x , ε_y , σ_z . Die zur Bestimmung notwendigen Gleichungen erhält man aus dem Stoffgesetz:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (5)$$

(1) und (2) in (5):

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu \sigma_x] \Rightarrow \sigma_z = \nu \sigma_x \text{ (Druck)} \quad (6)$$

(6) und (2) in (3):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \cdot \nu \sigma_x] = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2) \quad (7)$$

(6) und (2) in (4):

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\nu \sigma_x - \nu \cdot \nu \sigma_x] = -\frac{\nu \sigma_x}{E} (1 + \nu) \quad (8)$$

Anmerkung: Man könnte auf die Idee kommen, zu Beginn $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ zu formulieren! Da aber auch Spannungen in z -Richtung auftreten, rufen diese Spannungen Querdehnungen in x -Richtung hervor. Diese Dehnungen werden den Dehnungen aufgrund σ_x überlagert und führen auf Gleichung (7). Daher sollte man bei solchen Aufgaben immer zuerst Verformungseinschränkungen und freie Oberflächen identifizieren.

Aufgabe 3

Gegeben sei die folgende Spannungsmatrix in einem Punkt P eines Körpers K mit E-Modul E und $\nu = \frac{1}{3}$:

$$[T]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma & -2\sigma & 0 \\ -2\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man bestimme den Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$.

Gegeben: $\underline{\underline{T}}$, E , ν

Gesucht: $\underline{\underline{E}}$

Lösung:

Man formuliert das Stoffgesetz in skalarer Schreibweise und setzt ein:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma - \frac{1}{3} \sigma \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma - \frac{1}{3} \sigma \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[-\frac{1}{3} \sigma - \frac{1}{3} \sigma \right] = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} = -2\sigma \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{E} = -\frac{16}{3} \frac{\sigma}{E} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Somit gilt für $\underline{\underline{E}}$:

$$[E]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{2} & -2\sigma & 0 \\ -2\sigma & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{4}{3E}$$

Alternative (vgl. Sayir et al. Band 2, Seite 85).

Mit Hilfe der Spannungs- und Verzerrungsdeviatoren können folgende Beziehungen formuliert werden (ε_I und σ_I sind die jeweils erste Grundinvariante des Verzerrungs- bzw. Spannungstensors):

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}^D + \frac{\varepsilon_I}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^D + \frac{\sigma_I}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (2)$$

$$\varepsilon_I = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_I \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D = 2G \underline{\underline{\mathbf{E}}}^D = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^D \quad (4)$$

(1), (2) und (3) in (4):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\sigma_I}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_I \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\sigma_I}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \sigma_I \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} &= \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \underline{\underline{\mathbf{1}}} &= \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}} &= \frac{1+\nu}{E} \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}} &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{E} \sigma_I \underline{\underline{\mathbf{1}}} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist allgemein gültig!

Hier gilt (erste Invariante: $\sigma_I = \sigma + \sigma = 2\sigma$):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{E}}} &= \frac{4}{3E} \underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{2}{3E} \sigma \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ [\mathbf{E}] &= \frac{4}{3E} \begin{bmatrix} \sigma & -2\sigma & 0 \\ -2\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3E} \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{2} & -2\sigma & 0 \\ -2\sigma & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{4}{3E} \end{aligned}$$

11.7 Verständnisfragen

1. Wie lautet das HOOKEsche Gesetz für den einachsigen Spannungszustand und was drückt es aus?
2. Wie viele Materialkonstanten gibt es im Fall isotroper linear elastischer Materialien und welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Konstanten?
3. Was passiert, wenn ein fest eingespannter Stab, von der Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2 abgekühlt wird?
4. Nach welchen Grössen werden Bauteile aus duktilen und spröden Materialien jeweils dimensioniert?
5. Nenne die Spannungs- Verzerrungs- Beziehungen sowie die Verzerrungs- Spannungs- Beziehungen!

Kapitel 12

Zug und Druck

12.1 Herleitung

Ein prismatischer Balken (siehe Abb. 12.1) ist an seinem linken Ende eingespannt. Am freien rechten Ende greift eine Normalkraft N an.

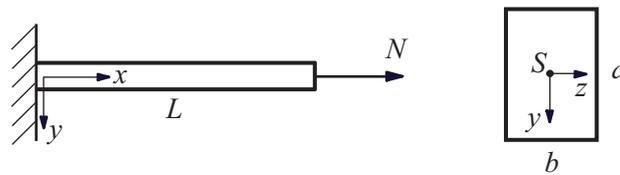


Abbildung 12.1: Prismatischer Balken

Die Kraft N greift im Schwerpunkt S an. Demzufolge ist die Beanspruchung des Balkens Zug (oder Druck). Die Spannungsverteilung in einem beliebigen Querschnitt ist konstant und die Normalspannung beträgt:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (12.1)$$

wobei A die Querschnittsfläche ist ($A = ab$).

Falls die Normalkraft und/oder die Querschnittsfläche entlang der Längsachse x variiert, lässt sich Gleichung 12.1 folgendermassen verallgemeinern:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (12.2)$$

Der Stab ist im einachsigen Spannungszustand, also lautet das Stoffgesetz:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (12.3)$$

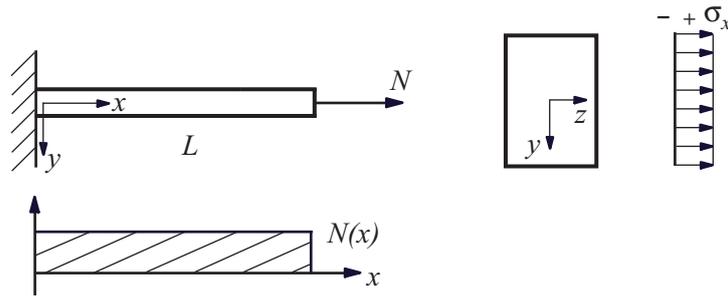


Abbildung 12.2: Spannungsverteilung unter Zug mit konstanter Normalkraft und Querschnittsfläche.

Die Ränder des Balkens sind spannungsfrei, sie können sich frei verformen, weshalb sich der Balken in einem dreiaxigen Dehnungszustand befindet:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x) &= \frac{\sigma_x(x)}{E} \\ \varepsilon_y(x) &= \varepsilon_z(x) = -\nu \frac{\sigma_x(x)}{E}\end{aligned}\quad (12.4)$$

mit Gleichung 12.2:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} \quad (12.5)$$

Die Veränderung der Länge des Balkens ist:

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_x(x) dx = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{A(x)} dx \quad (12.6)$$

Mit konstanter Normalkraft und Querschnittsfläche ($N(x) = N$ und $A(x) = A$) lässt sich Gleichung 12.6 vereinfachen zu:

$$\Delta L = L \frac{N}{EA} \quad (12.7)$$

12.2 Aufgaben

Aufgabe 1

Eine Betonsäule (E-Modul E , Eigengewicht γ) wird mit der Kraft P belastet (siehe Abb. 12.3).

Bestimme die Normalspannungen und die Dehnungen entlang der x -Achse!

Gegeben: Geometrie, Belastung, E-Modul (E)

Gesucht: $\sigma_x(x)$ und $\varepsilon_x(x)$

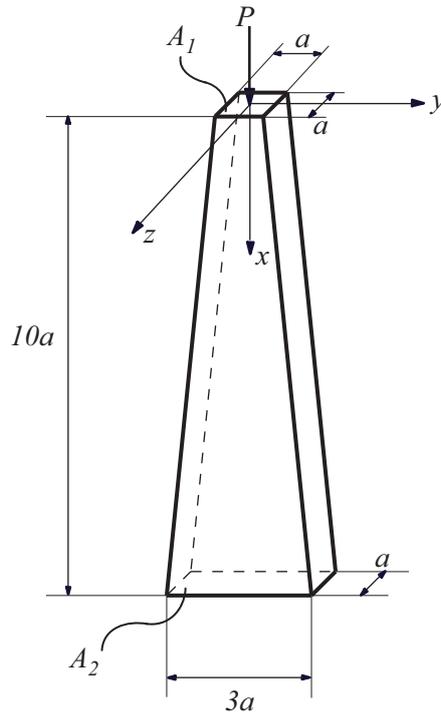


Abbildung 12.3: Skizze zur Aufgabe 1

Lösung:

Die Querschnittsfläche der Säule ist von x abhängig:

$$A(x) = a \cdot \left(a + \frac{3a - a}{10a} \cdot x \right) = a^2 + \frac{ax}{5}$$

Das Gewicht der Säule oberhalb eines beliebigen Querschnitts ist:

$$G(x) = V(x) \cdot \gamma = \underbrace{a}_{\text{Breite}} \underbrace{\frac{a + a + \frac{x}{5}}{2} x}_{\text{Trapezfläche}} \gamma = \frac{\gamma x}{2} \left(2a^2 + \frac{ax}{5} \right) = a^2 x \gamma + \frac{ax^2 \gamma}{10}$$

Die Normalkraft ist die Summe der Kraft P und des Gewichts $G(x)$:

$$N(x) = -(P + G(x)) = -P - a^2 x \gamma - \frac{ax^2 \gamma}{10}$$

Die Kraft $N(x)$ ist negativ, weil sie eine Druckkraft ist!

Die Normalspannungen können mit Gl.12.2 berechnet werden:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = -\frac{P + a^2 x \gamma + \frac{ax^2 \gamma}{10}}{a^2 + \frac{ax}{5}}$$

und mit Hilfe von Gleichung 12.4 sind die Dehnungen:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E} = -\frac{P + a^2 x \gamma + \frac{ax^2 \gamma}{10}}{E \left(a^2 + \frac{ax}{5} \right)}$$

Bemerkung: Der Rand der Säule ist spannungsfrei, d.h. dass am Rand die Spannungen senkrecht zur Oberfläche verschwinden müssen. Die Spannungen müssen somit parallel zur Oberfläche geneigt sein. Die nach Gl.12.2 berechneten Normalspannungen sind aber zur Achse der Säule parallel. Der Rand der Säule ist deshalb eine Zone, wo die Spannungen zur Achse der Säule nicht parallel sind. Wegen der geringfügigen Neigung der Oberfläche kann dieser Effekt jedoch vernachlässigt werden.

Aufgabe 2

Ein Stahlstab (siehe Abb. 12.4) wurde aus zwei Teilen mit unterschiedlichen Querschnittsflächen (A_1, A_2) gefertigt. Der Stab ist an beiden Enden eingespannt, wobei die Herstellungstemperatur $T_1 = 25^\circ\text{C}$ beträgt (der Stab ist spannungsfrei). Die Temperatur nimmt auf $T_2 = -50^\circ\text{C}$ ab. E-Modul: $E = 200 \text{ GPa}$, Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$, $L_1 = L_2 = 300 \text{ mm}$, $A_1 = 400 \text{ mm}^2$ und $A_2 = 800 \text{ mm}^2$.

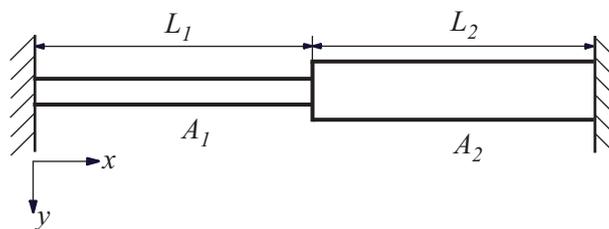


Abbildung 12.4: Skizze zur Aufgabe 2

Bestimme die Normalspannungen.

Gegeben: Geometrie, T_1 , T_2 , E , α .

Gesucht: $\sigma_x(x)$

Lösung:

Der Temperaturunterschied ist:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -50 - 25 = -75^\circ\text{C}$$

Die Verkürzung des Stabes wegen dem Temperaturunterschied wäre:

$$\Delta L_T = \Delta T \cdot \alpha \cdot L = -75 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 600 = -0.54 \text{ mm}$$

Die Verkürzung ist von der Fläche unabhängig, sie hängt nur von der Länge und von ΔT ab! Es kann keine Längenänderung auftreten, da der Stab eingespannt ist. Die Verkürzung infolge des Temperaturrückgangs muss deshalb durch eine Verlängerung infolge mechanischer Spannung kompensiert werden. Es treten daher Normalkräfte im Stab auf. Es gibt keine äussere Belastung auf den Stab, deswegen bleiben die Normalkräfte in der ganzen Struktur konstant. Wegen den verschiedenen Querschnittsflächen des Stabes sind aber die Normalspannungen unterschiedlich.

Eine konstante Normalkraft N_c verursacht die folgende Verlängerung der Struktur:

$$\Delta L_N = \frac{N_c L_1}{EA_1} + \frac{N_c L_2}{EA_2} = 5.625 \cdot 10^{-9} \cdot N_c$$

Diese Verlängerung muss die Verkürzung der negativen Temperaturdehnung kompensieren:

$$\begin{aligned}\Delta L_N + \Delta L_T &= 0 \\ 5.625 \cdot 10^{-9} \cdot N_c &= 5.4 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Somit beträgt die Normalkraft:

$$N_c = 96 \text{ kN}$$

Die Spannungen sind dann in den beiden Teilen des Stabes:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N_c}{A_1} = 240 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{N_c}{A_2} = 120 \text{ MPa}\end{aligned}$$

12.3 Verständnisfragen

1. Durch welche Schnittgrösse wird eine im Querschnitt konstante Zug- oder Druckspannung in stabförmigen Bauteilen hervorgerufen?
2. Wodurch ist die zulässige Belastung eines auf Zug beanspruchten Stabes begrenzt?
3. Wie ist der Zusammenhang zwischen Normalkraft, Querschnittsfläche und Zug- oder Druckspannung?

Kapitel 13

Flächenmoment zweiten Grades

13.1 Herleitung

Die Flächenintegrale:

$$\begin{aligned} I_z &= \iint y^2 dA \\ I_y &= \iint z^2 dA \end{aligned} \tag{13.1}$$

heissen Flächenmomente zweites Grades oder Flächenträgheitsmomente. Das Integral mit gemischten Termen:

$$C_{yz} = - \iint yz dA \tag{13.2}$$

heisst gemischtes Flächenmoment oder Deviationsmoment.

Beispiel: Rechteck

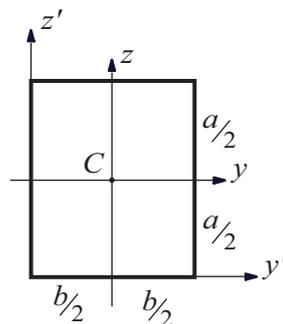


Abbildung 13.1: Rechteck für das Beispiel

Die Flächenträgheitsmomente eines Rechtecks bezüglich y - und z -Achse durch den Schwer-

punkt C sind:

$$I_y = \iint z^2 dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz = \int_{-a/2}^{a/2} [y]_{-b/2}^{b/2} z^2 dz = \int_{-a/2}^{a/2} b \cdot z^2 dz$$

$$= b \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = b \cdot 2 \frac{a^3}{24} = \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_z = \iint y^2 dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz = \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dz = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{b^3}{12} dz = \frac{ab^3}{12}$$

Das Deviationsmoment des Rechtecks ist:

$$C_{yz} = - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} yz dy dz = - \int_{-a/2}^{a/2} z \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-b/2}^{b/2} dz = - \int_{-a/2}^{a/2} z \left[\frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{8} \right] dz = 0$$

Das Deviationsmoment bezüglich einer Symmetrieachse ist immer null.

Die Flächenträgheitsmomente bezüglich Achsen, die nicht durch den Schwerpunkt C gehen (z.B. y' , z' in Abb. 13.1), lassen sich mit dem Verschiebungssatz berechnen:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= I_y + (\Delta z)^2 \cdot A \\ I_{z'} &= I_z + (\Delta y)^2 \cdot A \\ C_{y'z'} &= C_{yz} - \Delta y \Delta z \cdot A \end{aligned} \quad (13.3)$$

wobei $\Delta y = \frac{b}{2}$ und $\Delta z = \frac{a}{2}$ die Abstände der Achsen sind (siehe Abb. 13.1) und A die Fläche ist. Falls die Flächenträgheitsmomente bezüglich y' und z' bekannt sind, lassen sich selbstverständlich auch I_y und I_z aus 13.3 berechnen. Hier ist Vorsicht geboten! Der Verschiebungssatz darf nur zwischen einer Schwerpunktsachse und einer nicht Schwerpunktsachse verwendet werden, nicht aber zwischen zwei beliebigen Achsen!

Die Flächenträgheitsmomente hängen nicht nur von der Position der Bezugsachse ab, sondern auch von der Richtung der Achse. Diese Eigenschaft lässt sich mit dem Mohrschen Kreis darstellen (siehe Abb. 13.2 für einen Dreieckquerschnitt). Die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z werden auf der horizontalen, das Deviationsmoment C_{yz} auf der vertikalen Achse aufgetragen. Aus diesen zwei Punkten - analog wie aus Spannungen und Dehnungen (siehe Kapitel 9) - kann der Kreis gezeichnet werden und die Hauptrichtungen, für welche das gemischte Flächenmoment C_{yz} verschwindet (siehe Abb. 13.2 und Aufgabe), bestimmt werden.

Bemerkungen:

- Die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sind definitionsgemäss positiv.
- Demzufolge kann der Kreis nur in der positiven Hälfte von I_n liegen.
- Eine Symmetrieachse ist immer eine Hauptachse.
- Das Deviationsmoment bezüglich einer Symmetrieachse ist immer null.
- Die zweite Hauptachse liegt senkrecht zu dieser Richtung.

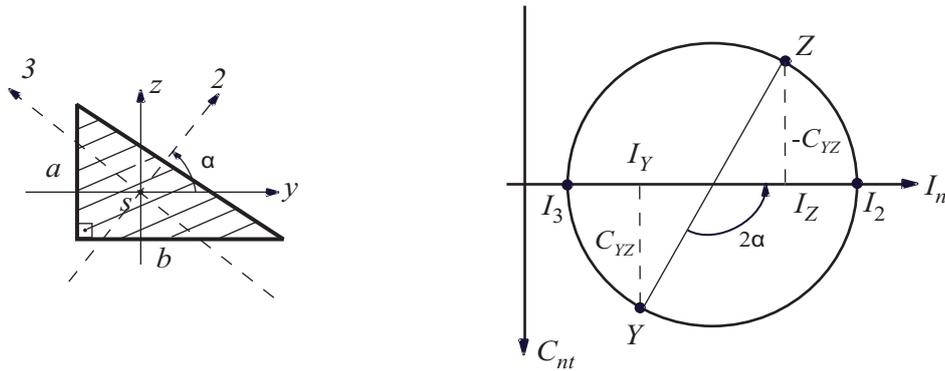
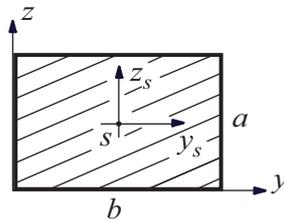


Abbildung 13.2: Mohrscher Kreis für Flächenmomente

13.2 Tabelle für Flächenträgheitsmomente

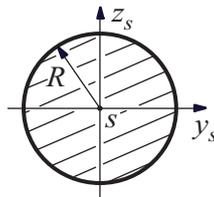
Viereck-Profil:

$$\begin{aligned}
 I_{y_s} &= \frac{a^3 b}{12}, & I_y &= \frac{a^3 b}{3}, & C_{y_s z_s} &= 0, \\
 I_{z_s} &= \frac{a b^3}{12}, & I_z &= \frac{a b^3}{3}, & C_{yz} &= -\frac{a^2 b^2}{4}
 \end{aligned}$$



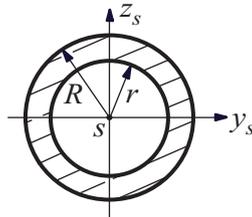
Kreis-Profil:

$$I_{y_s} = I_{z_s} = \frac{\pi R^4}{4}, \quad C_{y_s z_s} = 0$$



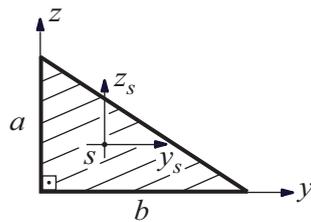
Rohr-Profil:

$$I_{y_s} = I_{z_s} = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}, \quad C_{y_s z_s} = 0$$



Dreieck-Profil:

$$\begin{aligned} I_{y_s} &= \frac{a^3 b}{36}, & I_y &= \frac{a^3 b}{12}, & C_{y_s z_s} &= \frac{a^2 b^2}{72}, \\ I_{z_s} &= \frac{a b^3}{36}, & I_z &= \frac{a b^3}{12}, & C_{yz} &= -\frac{a^2 b^2}{24} \end{aligned}$$



13.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Der Querschnitt in Abbildung 13.3 besteht aus zwei Kreisprofilen (Radius R), die mit einem Rechteckprofil (Abmessungen $R \times 2R$) verbunden sind.

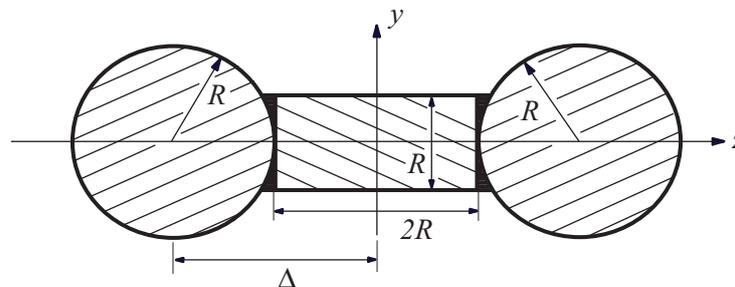


Abbildung 13.3: Skizze zur Aufgabe 1

Bestimme die Flächenträgheitsmomente bezüglich y - und z -Achse.

Gegeben: Geometrie

Gesucht: I_y und I_z

Lösung:

Die Flächenträgheitsmomente der Einzelteile (Kreis und Rechteck) bezüglich ihrer eigenen Schwerpunktsachsen sind:

$$I_y^{\text{Rechteck}} = \frac{8R^4}{12}, \quad I_z^{\text{Rechteck}} = \frac{2R^4}{12}, \quad I^{\text{Kreis}} = \frac{\pi R^4}{4}$$

wobei die oberen Indizes auf den Körper, die unteren Indizes auf die Achse bezogen sind. Die Flächenträgheitsmomente des ganzen Querschnitts können mit Hilfe des Verschiebungssatzes 13.3 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \cdot [I^{\text{Kreis}} + \Delta^2 \cdot A^{\text{Kreis}}] + I_y^{\text{Rechteck}} \\ &= 2 \left[\frac{\pi R^4}{4} + 4R^2 \cdot R^2 \pi \right] + \frac{8R^4}{12} \\ &= R^4 \left[\frac{17}{2} \pi + \frac{2}{3} \right] \approx 27.37R^4 \end{aligned}$$

Und:

$$I_z = 2 \cdot I^{\text{Kreis}} + I_z^{\text{Rechteck}} = \frac{\pi R^4}{2} + \frac{1}{6} R^4 = R^4 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \right] \approx 1.74R^4$$

sind:

$$I_y^1 = \frac{(2a)^3 b}{12}, \quad I_z^1 = \frac{b^3 \cdot 2a}{12},$$

$$I_{y_2}^2 = I_{y_3}^3 = \frac{b^3 a}{12}, \quad I_{z_2}^2 = I_{z_3}^3 = \frac{a^3 b}{12}$$

Der Gesamtschwerpunkt ist in S . Die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sind aus den Einzelteilen durch den Verschiebungssatz zu bestimmen:

$$I_y = I_y^1 + I_{y_2}^2 + \Delta z_2^2 \cdot A_2 + I_{y_3}^3 + \Delta z_3^2 \cdot A_3,$$

$$I_z = I_z^1 + I_{z_2}^2 + \Delta y_2^2 \cdot A_2 + I_{z_3}^3 + \Delta y_3^2 \cdot A_3$$

wobei:

$$\Delta y_2 = \frac{1}{2}(a+b), \quad \Delta z_2 = a - \frac{b}{2}, \quad A_2 = ab,$$

$$\Delta y_3 = \frac{1}{2}(a+b), \quad \Delta z_3 = a - \frac{b}{2}, \quad A_3 = ab$$

und damit:

$$I_y = \frac{8}{12}a^3b + 2 \cdot \left[\frac{ab^3}{12} + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \cdot ab \right] = \frac{8a^3b}{3} - 2a^2b^2 + \frac{2ab^3}{3}$$

$$I_z = \frac{1}{6}ab^3 + 2 \cdot \left[\frac{a^3b}{12} + \frac{1}{4}(a+b)^2 \cdot ab \right] = \frac{2a^3b}{3} + a^2b^2 + \frac{2ab^3}{3}$$

Die Deviationsmomente bezüglich der eigenen Schwerpunktsachsen sind null, das Deviationsmoment bezüglich S ist dann:

$$C_{yz} = 0 + 0 - \Delta y_2 \Delta z_2 \cdot A_2 + 0 - \Delta y_3 \Delta z_3 \cdot A_3$$

$$= -(-1) \left(a - \frac{b}{2}\right) \frac{1}{2}(a+b) \cdot ab - (-1) \left(a - \frac{b}{2}\right) \frac{1}{2}(a+b) \cdot ab$$

$$= a^3b + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{ab^3}{2}$$

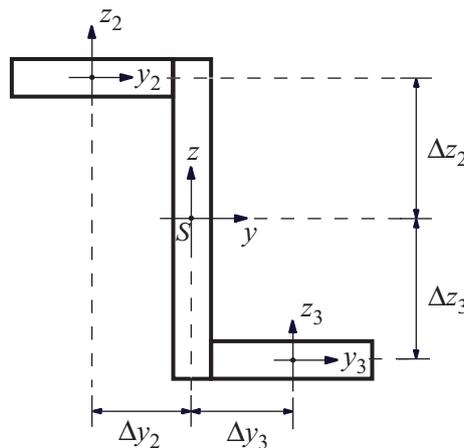


Abbildung 13.5: Skizze zur Lösung i)

Lösung ii) Flächenträgheitsmomente der Rechtecke:

$$I_y^{gross} = \frac{8a^3 \cdot (2a + b)}{12}, \quad I_z^{gross} = \frac{2a \cdot (2a + b)^3}{12},$$

$$I_{yr}^{klein} = \frac{a \cdot (2a - b)^3}{12}, \quad I_{zr}^{klein} = \frac{a^3 \cdot (2a - b)}{12}$$

Die Flächenträgheitsmomente des Z-Profiles sind dann:

$$I_y = I_y^{gross} - 2 \cdot [I_{yr}^{klein} + \Delta z^2 \cdot A], \quad I_z = I_z^{gross} - 2 \cdot [I_{zr}^{klein} + \Delta y^2 \cdot A]$$

wobei:

$$\Delta y = \frac{1}{2}(a + b), \quad \Delta z = \frac{b}{2}, \quad A = (2a - b)a$$

Und damit:

$$I_y = \frac{2}{3}a^3(2a + b) - 2 \cdot \left[\frac{(2a - b)^3 a}{12} + \frac{b^2}{4} \cdot a(2a - b) \right] = \frac{8}{3}a^3b - 2a^2b^2 + \frac{2}{3}ab^3,$$

$$I_z = \frac{1}{6}a(2a + b)^3 - 2 \cdot \left[\frac{(2a - b)a^3}{12} + \frac{1}{4} \cdot (a + b)^2 a(2a - b) \right] = \frac{2}{3}a^3b + a^2b^2 + \frac{2}{3}ab^3$$

Das Deviationsmoment ist:

$$C_{yz} = 0 - \left[0 - \left(-\frac{b}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (a + b) \cdot (2a - b) \cdot a + 0 - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} (a + b) (2a - b) \cdot a \right]$$

$$= a^3b + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{ab^3}{2}$$

b) Der Fall $a \gg b$ bedeutet, dass b mit höheren Exponenten verschwindet: $b^\alpha \approx 0$ für $\alpha \geq 2$. Die Flächenträgheitsmomente lassen sich dann folgendermassen vereinfachen:

$$I_y = \frac{8}{3}a^3b, \quad I_z = \frac{2}{3}a^3b, \quad C_{yz} = a^3b$$

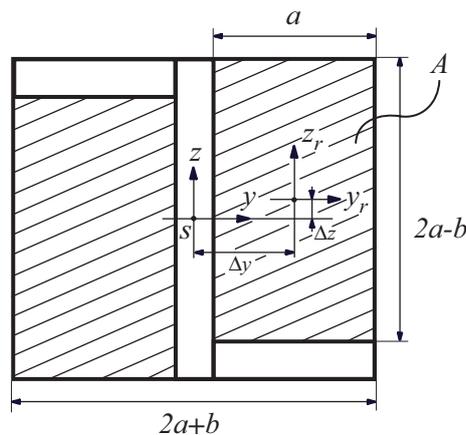


Abbildung 13.6: Skizze zur Lösung ii)

c) Um die Hauptflächenträgheitsmomente zu bestimmen muss der Mohrsche Kreis gezeichnet werden (siehe Abb. 13.7).

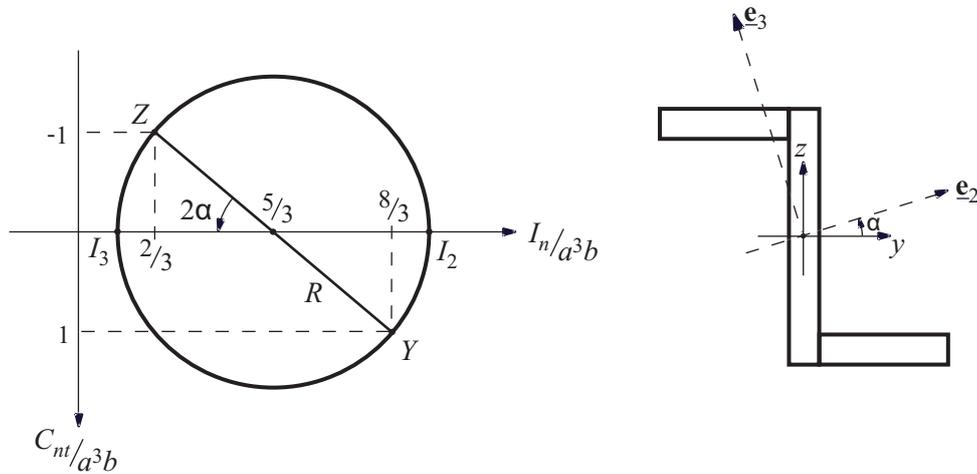


Abbildung 13.7: Mohrscher Kreis zur Aufgabe und Hauptachsen des Querschnitts

Der Radius des Kreises ist:

$$R^2 = \left(\left(\frac{3}{3} \right)^2 + 1^2 \right) a^6 b^2 = 2a^6 b^2 \Rightarrow R = \sqrt{2} a^3 b$$

und daraus ergeben sich die Hauptflächenträgheitsmomente zu:

$$I_2 = \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2} \right) a^3 b, \quad I_3 = \left(\frac{5}{3} + \sqrt{2} \right) a^3 b$$

13.4 Verständnisfragen

1. Was versteht man unter einem Flächenträgheitsmoment?
2. Wie lautet der Satz von Steiner?
3. Wie ist das gemischte Flächenmoment definiert?
4. Was sind Hauptachsen und welche besonderen Kennzeichen haben sie? Was sind Hauptträgheitsmomente?
5. Welche Aussage folgt für Querschnittsflächen mit mindestens einer Symmetrieachse bezüglich des Deviationsmomentes I_{yz} und der Hauptachse?
6. Welche Aussage folgt für Querschnittsflächen, bei denen $I_{yz}=0$ und $I_y=I_z$ ist? Gib beispielhafte Querschnitte an!
7. Was versteht man unter dem Begriff Widerstandsmoment und wie ermitteln man das Widerstandsmoment bei zusammengesetzten Querschnitten?
8. Wie ist das Verhältnis der beiden Hauptflächenmomente eines Rechteckes zueinander: linear, quadratisch oder kubisch?
9. Wie bestimmt man den Gesamtflächenschwerpunkt bei zusammengesetzten Querschnitten?

Kapitel 14

Spezielle Biegung

Man betrachte den eingespannten prismatischen Balken in Abbildung 14.1. Am Ende des Balkens greift ein Moment M an.

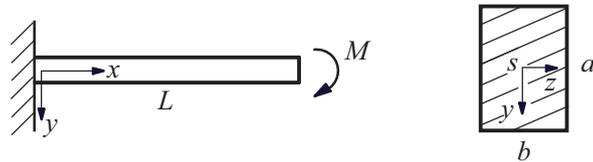


Abbildung 14.1: Prismatischer Balken unter Biegebeanspruchung

Die Beanspruchung des Balkens ist ein konstantes Biegemoment vom Betrag M um die z -Achse.

Die Spannungen in einem beliebigen Querschnitt senkrecht zur x -Achse können mit der folgenden Formel bestimmt werden:

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y \quad (14.1)$$

wobei I_z das Flächenträgheitsmoment und y der Abstand von der z -Achse (siehe Abb. 14.2) ist.

Die Spannungsverteilung ist linear, in der Mitte des Querschnitts verschwinden die Spannungen (neutrale Achse). Am oberen Rand ($y = -\frac{a}{2}$) treten die positiv grössten (Zug), am unteren Rand ($y = \frac{a}{2}$) die negativ grössten Spannungen (Druck) auf.

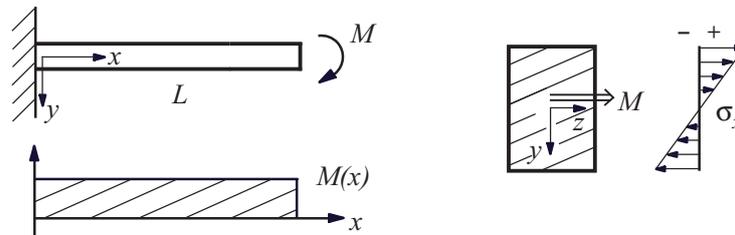


Abbildung 14.2: Spannungsverteilung in einem prismatischen Balken infolge Biegung

Die Dehnungen ε_x haben einen ähnlichen Verlauf wie die Normalspannungen: oben verlängert, unten verkürzt sich der Balken, er wird dann gekrümmt (siehe Abb. 14.3).

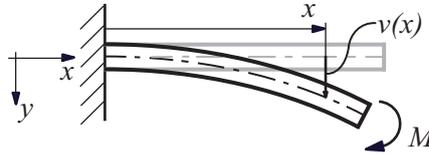


Abbildung 14.3: Deformation eines Balkens infolge Biegung

Zwischen der Verschiebung $v(x)$ und dem Moment M gilt die Differentialgleichung der Biegelinie als Beziehung:

$$v(x)'' = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (14.2)$$

Die zweite Ableitung der Verschiebung $v(x)$ ist gleich dem Moment dividiert durch den Elastizitätsmodul E und das Flächenträgheitsmoment I_z . Wenn das Moment $M(x)$ bekannt ist, kann die Verschiebung durch zweifache Integration bestimmt werden:

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \int \left[\int M(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2 \quad (14.3)$$

Die Integrationskonstanten (C_1, C_2) werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt (siehe Aufgabe).

Aufgabe

Ein elastischer Balken (Elastizitätsmodul E , Flächenträgheitsmoment I , Länge $3L$) wird gemäss Skizze (Abb. 14.4) in A und C mit zwei Auflagern und in B mit einem Gelenk gelagert. Zwischen A und B wirkt eine gleichförmig verteilte Last p auf den Balken. Bestimme die Lagerkräfte und die Verschiebungen.

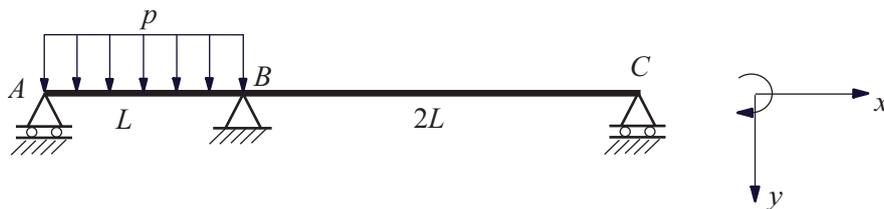


Abbildung 14.4: Skizze zur Aufgabe

Gegeben: Geometrie, p

Gesucht: Lagerreaktionen (in A , B und C), Verschiebungen

Lösung:

Die Struktur ist 1-fach statisch unbestimmt. Die zwei Gleichgewichtsbedingungen, die vertikale Komponentenbedingung und die Momentenbedingung (die horizontale Komponentenbedingung ist trivial) sind (siehe Abb. 14.5):

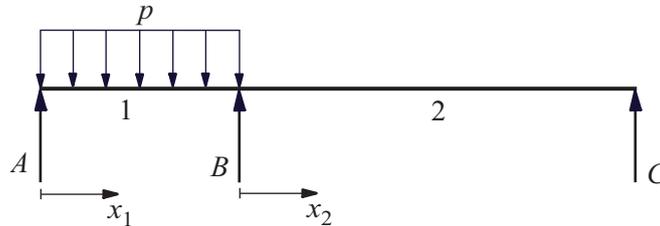


Abbildung 14.5: Systemtrennung

$$\begin{aligned} \sum F_x &: \text{nicht relevant} \\ \sum F_y &: A + B + C = pL \quad (1) \\ \sum M_C &: 2BL + 3AL - \frac{5}{2}pL^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5}{4}pL - \frac{3}{2}A \quad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$C = pL - B - A = -\frac{pL}{4} + \frac{1}{2}A \quad (3)$$

Das Problem ist 1-fach statisch unbestimmt, die Gleichgewichtsbedingungen reichen nicht aus, um alle Lagerkräfte zu bestimmen. Mit Hilfe der Differentialgleichung der Biegelinie (14.2) können sowohl die Lagerkräfte als auch die Verschiebungen bestimmt werden. Die Biegemomente für den 1. und 2. Teil sind:

$$\begin{aligned} M_1(x_1) &= -Ax_1 + \frac{x_1^2}{2}p \\ M_2(x_2) &= -A(x_2 + L) - Bx_2 + pL \left(x_2 + \frac{L}{2}\right) = -AL + p\frac{L^2}{2} + A\frac{x_2}{2} - p\frac{Lx_2}{4} \end{aligned}$$

Beide Momente sind als Funktion einer Unbekannten (A) ausgedrückt. Die Differentialgleichungen lauten:

$$v_1''(x_1) = \frac{M_1(x_1)}{EI}, \quad v_2''(x_2) = \frac{M_2(x_2)}{EI}$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & v_1(L) &= 0, & v_1'(x_1 = L) &= v_2'(x_2 = 0), \\ v_2(0) &= 0, & v_2(2L) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Die Verschiebungen in A , B und C sind null und die Verdrehungen der beiden Balkenteile in B sind gleich. Die Differentialgleichungen können durch Integration gelöst werden. Die dadurch

auftretenden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt. Für Teil 1 gilt:

$$\begin{aligned}
 v_1'(x_1) &= \frac{1}{EI} \int \left(-Ax_1 + p\frac{x_1^2}{2} \right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{EI} \left(-A\frac{x_1^2}{2} + p\frac{x_1^3}{6} + K_1 \right), \\
 v_1(x_1) &= \frac{1}{EI} \int \left(-A\frac{x_1^2}{2} + p\frac{x_1^3}{6} + K_1 \right) dx_1 \\
 &= \frac{1}{EI} \left(-A\frac{x_1^3}{6} + p\frac{x_1^4}{24} + K_1x_1 + K_2 \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$\begin{aligned}
 v_1(0) = 0 &\Rightarrow K_2 = 0 \\
 v_1(L) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{EI} \left(-A\frac{L^3}{6} + p\frac{L^4}{24} + K_1L \right) = 0 \\
 &\Rightarrow K_1 = -p\frac{L^3}{24} + A\frac{L^2}{6}
 \end{aligned}$$

Analog gilt für Teil 2:

$$\begin{aligned}
 v_2'(x_2) &= \frac{1}{EI} \int \left[-AL + p\frac{L^2}{2} + x_2 \left(\frac{A}{2} - p\frac{L}{4} \right) \right] dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(-AL + p\frac{L^2}{2} \right) x_2 + \frac{x_2^2}{2} \left(\frac{A}{2} - p\frac{L}{4} \right) + K_3 \right]
 \end{aligned}$$

Aus (4):

$$\begin{aligned}
 v_2'(0) &= \frac{1}{EI}K_3 \quad \text{und} \quad v_1'(L) = \frac{1}{EI} \left(-A\frac{L^2}{3} + p\frac{L^3}{8} \right) \\
 v_1'(L) = v_2'(0) &\Rightarrow K_3 = -A\frac{L^2}{3} + p\frac{L^3}{8}
 \end{aligned}$$

Um $v_2(x_2)$ zu finden, muss nochmals integriert werden:

$$\begin{aligned}
 v_2(x_2) &= \frac{1}{EI} \int \left[\left(-AL + p\frac{L^2}{2} \right) x_2 + \frac{x_2^2}{2} \left(\frac{A}{2} - p\frac{L}{4} \right) + K_3 \right] dx_2 \\
 &= \frac{1}{EI} \left[\left(-AL + p\frac{L^2}{2} \right) \frac{x_2^2}{2} + \left(\frac{A}{2} - p\frac{L}{4} \right) \frac{x_2^3}{6} + K_3x_2 + K_4 \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

Mit (4) zusammen folgt:

$$v_2(0) = 0 \Rightarrow K_4 = 0$$

Aus der letzten Bedingung in (4) kann die unbekannte Lagerkraft A bestimmt werden:

$$v_2(2L) = 0 \Rightarrow A = \frac{11}{24}pL$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$B = \frac{9}{16}pL \quad \text{und} \quad C = -\frac{1}{48}pL$$

Die Verschiebungen aus (5) und (6) sind dann:

$$v_1(x_1) = \frac{1}{24EI} \left(+\frac{5}{6}pL^3x_1 - \frac{11}{6}pLx_1^3 + px_1^4 \right)$$
$$v_2(x_2) = \frac{1}{12EI} \left(-\frac{1}{3}pL^3x_2 + \frac{1}{4}pL^2x_2^2 - \frac{1}{24}pLx_2^3 \right)$$

14.1 Verständnisfragen

1. Wie ist die Spannungsverteilung im Querschnitt bei spezieller Biegung?
2. Wie ist die Spannungsverteilung bei spezieller Biegung für den Fall eines Sandwich-Trägers aus verschiedenen Materialien, aber gleicher Breite? Wie ist der Dehnungsverlauf?
3. Erkläre den Begriff Neutralachse! Wie wird ihre Lage bestimmt?
4. Was versteht man unter der Biegefestigkeit eines Trägers und wie wirkt sie sich auf die Formänderung eines Biegeträgers aus?
5. Wie lautet für kleine Durchbiegung der Differentialzusammenhang zwischen Krümmung, Neigungswinkel und Durchbiegung eines auf Biegung beanspruchten Trägers?
6. Was versteht man unter dem Begriff Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip) zur Ermittlung von Biegeverformungen?
7. Was sind Rand- und Übergangsbedingungen und wie werden sie bei der Bestimmung der Biegelinie berücksichtigt?

Kapitel 15

Methode der finiten Elemente

15.1 Herleitung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist die am weitesten verbreitete numerische Methode, um komplexe Probleme zu lösen, deren Lösungen analytisch unmöglich oder nur mit groben Näherungen möglich wären. Bei dieser Methode wird die Struktur in "endliche" Elemente aufgeteilt. Die Verschiebungen und Kräfte werden an diskreten Punkten (Knoten) berechnet und die Verschiebungsfunktionen innerhalb des Elements mit linearen, quadratischen, kubischen Funktionen oder höheren Polynomen approximiert. Ein Element zwischen zwei Knoten wird als ideal elastisch deformierbar definiert (siehe Abb. 15.1).

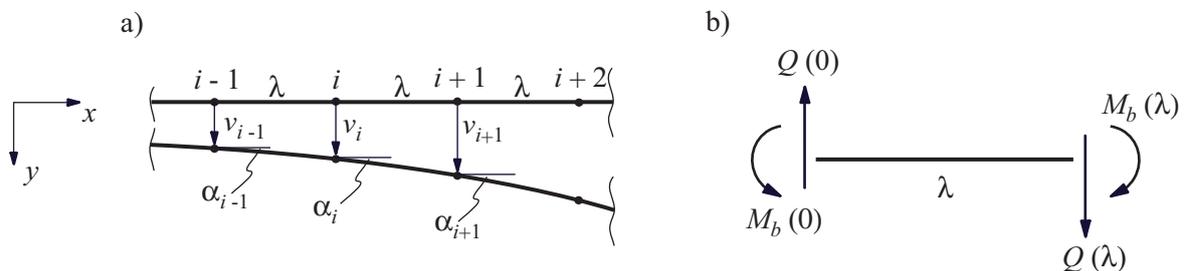


Abbildung 15.1: a) Diskretisierung eines Balkens, b) Kräfte und Momente an einem Element der Länge λ

Die Knoten können nur bestimmte Verschiebungen und/oder Verdrehungen ausführen. Die Anzahl der möglichen Verschiebungen und Verdrehungen eines Knotens bestimmt den Freiheitsgrad. Man entscheidet sich immer anhand des Problems für einen Elemententyp. Das Element in Abbildung 15.1 hat beispielsweise vier Freiheitsgrade (zwei Verschiebungen und zwei Verdrehungen). Damit kann also ein ebenes Problem behandelt werden, falls die Normalkräfte (und Deformationen in Axialrichtung) vernachlässigt werden. Ein generelles 3D Balkenelement hat dagegen zwölf Freiheitsgrade (sechs Verschiebungen und sechs Verdrehungen).

Zwischen den Kräften und Verschiebungen in den Knoten gilt die folgende Beziehung:

$$[C^e] \{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (15.1)$$

wobei $\{\Delta^e\}$ die Verschiebungen (lokaler Verschiebungsvektor) und $\{F^e\}$ die Kräfte (lokaler Kraftvektor) beschreiben. $[C^e]$ ist die Elementsteifigkeitsmatrix. Für das Balkenelement in Abbildung 15.1 gilt:

$$\{\Delta^e\} = \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ \lambda\alpha_{i-1} \\ v_i \\ \lambda\alpha_i \end{pmatrix} \quad \{F^e\} = \begin{pmatrix} -Q(0) \\ -\frac{1}{\lambda}M_b(0) \\ Q(\lambda) \\ \frac{1}{\lambda}M_b(\lambda) \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

$$[C^e] = \frac{EI}{\lambda^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

Die Struktur der Matrix $[C^e]$ kann mit dem Prinzip von Ursache und Wirkung erläutert werden: die Verknüpfung zwischen einer Verschiebung v_{i-1} ("Ursache") und der Kraft $Q(0)$ ("Wirkung") wird durch das erste Element von $[C^e]$ beschrieben:

$$C^e(1, 1) = 12 \frac{EI}{\lambda^3}$$

Eine Verschiebung v an der Stelle $i - 1$ verursacht eine Kraft vom Betrag $12 \frac{EI}{\lambda^3} v$ an der Stelle $i - 1$, usw.

In Gl. 15.2 sind die Verdrehungen α_i mit der Elementlänge (λ) multipliziert und die Momente dadurch dividiert. Falls die Kräfte nicht an den Knoten wirken ($q(\xi)$), müssen sie in die Knoten verteilt werden (siehe Sayir et al. Band 2, Kapitel 19):

$$\{F^e\} = \lambda \int_0^1 q(\xi) \cdot N(\xi) d\xi \quad (15.4)$$

$$\{F^e\} = \lambda \int_0^1 q(\xi) \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ -\xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix} d\xi \quad (15.5)$$

wobei $\xi = \frac{x}{\lambda}$ ist. Falls Einzelkräfte auf den Träger wirken, müssen die Koordinaten ξ_i in Gl. (15.4) ohne Integration eingesetzt werden.

Für die ganze Struktur kann eine Matrixgleichung formuliert werden:

$$[C] \{\Delta\} = \{P\} \quad (15.6)$$

Die Matrix $[C]$ ist die globale Steifigkeitsmatrix, $\{\Delta\}$ ist der globale Verschiebungsvektor und $\{P\}$ ist der globale Kraftvektor. Die globale Steifigkeitsmatrix muss aus den Elementsteifigkeitsmatrizen zusammengesetzt werden. Das Vorgehen hierzu ist das Folgende: von der lokalen Nummerierung muss zu einer globalen Nummerierung übergegangen werden und dementsprechend müssen die Elemente der Elementsteifigkeitsmatrizen in die globale Steifigkeitsmatrix eingetragen werden. Um das Vorgehen zu erläutern, wird ein Beispiel betrachtet (siehe Abb. 15.2). Um den richtigen Ort für die Einträge der Elementsteifigkeitsmatrizen in $[C]$ zu ermitteln, kann wiederum das Prinzip von Ursache und Wirkung verwendet werden; dabei müssen

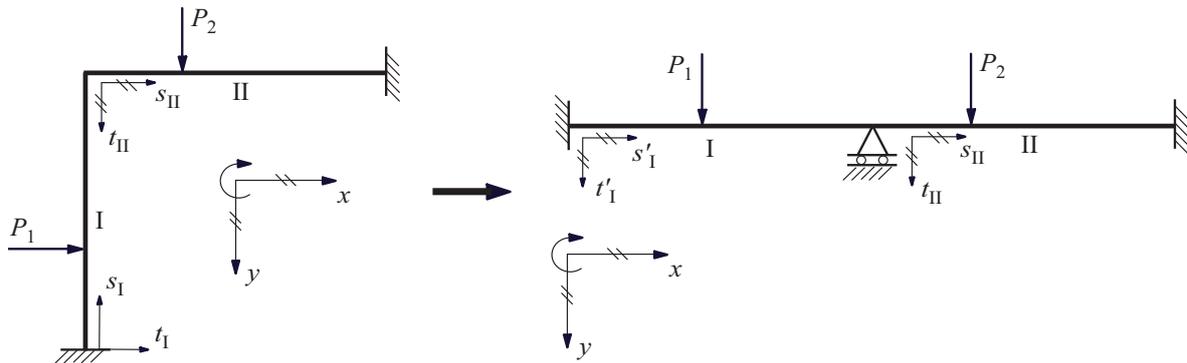


Abbildung 15.4: Struktur mit nicht parallelen Stäben und ihre Transformation.

15.2-15.3) im $x - y$ -Koordinatensystem modelliert werden muss, zeigen die Verschiebungen des Stabes I im globalen $x - y$ -Koordinatensystem in eine unzulässige Richtung. Ein Balkenelement im $x - y$ -Koordinatensystem kann nur Verschiebungen in y -Richtung aufweisen. Die Verschiebungen senkrecht zur Achse des Elementes I zeigen aber in die x -Richtung (Axialrichtung im globalen Koordinatensystem), und Verschiebungen in dieser Richtung sind gemäss den Gleichungen 15.2-15.3 und der Abbildung 15.1 nicht zulässig.

Falls die lokalen und globalen Koordinatenachsen nicht zusammenfallen, so wie in diesem Fall, muss die Elementsteifigkeitsmatrix transformiert werden. Falls die Deformationen in Axialrichtung vernachlässigbar sind sowie für die Lösung der Aufgabe das Balkenelement gegeben in den Gleichungen 15.2-15.3 verwendet wird, kann die Struktur gemäss Abbildung 15.4 transformiert werden. Dabei müssen die Randbedingungen betrachtet werden. Weil der Balken I in Axialrichtung nicht deformierbar ist, kann an der Stelle des rechten Winkels ein Auflager eingeführt werden. Zudem wird der Balken I um 90° gedreht, damit die Balken parallel werden.

15.2 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Balken (Elastizitätskonstante E , Flächenträgheitsmoment I , Länge $2L$) ist gemäss Abbildung 15.5 in A eingespannt und in B und C aufgelagert. Zwischen B und C wirkt eine gleichförmig verteilte Last q auf dem Balken. Das Problem soll mit zwei Elementen modelliert werden.

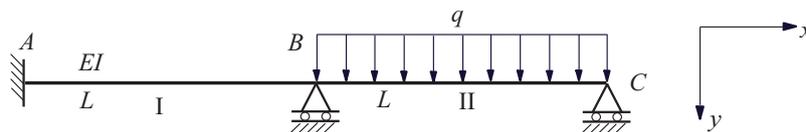


Abbildung 15.5: Skizze zur Aufgabe 1

Bestimme die Lagerkräfte und die Verdrehungen in B und C .

Gegeben: Geometrie, Last.

Gesucht: Lagerkräfte, Verdrehungen in B und C .

Lösung:

Die globale Steifigkeitsmatrix wird mit Hilfe von Gl. (15.3) und Gl. (15.7) erstellt:

$$[C] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Der Verschiebungs- und der Kraftvektor sind:

$$\{\Delta\} = [v_1 \quad L \cdot \alpha_1 \quad v_2 \quad L \cdot \alpha_2 \quad v_3 \quad L \cdot \alpha_3]^T$$

$$\{P\} = [P_1 \quad M_1/L \quad P_2 \quad M_2/L \quad P_3 \quad M_3/L]^T$$

P_1 und M_1 sind die Lagerkräfte im Punkt A . P_2 , M_2 , P_3 und M_3 sind die Summen der äusseren Belastung q und der Lagerkräfte in B und C . Die verteilte Last q muss mit Gl. (15.4) und (15.5) auf die Knoten reduziert werden (siehe Abb. 15.6). Für den Stab II gilt:

$$\{F^{II}\} = \begin{pmatrix} P_L \\ M_L/L \\ P_R \\ M_R/L \end{pmatrix} = q \cdot L \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ -\xi^2 + \xi^3 \end{pmatrix} d\xi = \frac{Lq}{12} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

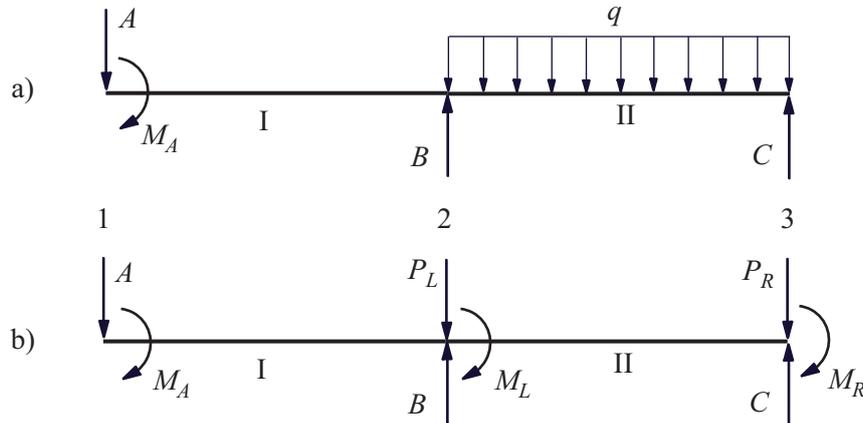


Abbildung 15.6: a) Lagerkräfte, b) Aufteilung der gleichförmig verteilten Last q

Die Kräfte und Momente sind dann:

$$P_1 = A, \quad M_1 = M_A,$$

$$P_2 = P_L - B, \quad M_2 = M_L,$$

$$P_3 = P_R - C, \quad M_3 = M_R$$

Für den Kraftvektor folgt:

$$\{P\} = \left[A \quad \frac{M_A}{L} \quad \frac{Lq}{2} - B \quad \frac{Lq}{12} \quad \frac{Lq}{2} - C \quad -\frac{Lq}{12} \right]^T$$

Für die Verschiebungen gilt wegen folgenden Randbedingungen

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 0 : \\ \{\Delta\} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad L \cdot \alpha_2 \quad 0 \quad L \cdot \alpha_3 \right]^T$$

Das Gleichungssystem kann deshalb auf zwei Gleichungen reduziert werden:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L \cdot \alpha_2 \\ 0 \\ L \cdot \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \frac{M_A}{L} \\ \frac{Lq}{2} - B \\ \frac{Lq}{12} \\ \frac{Lq}{2} - C \\ -\frac{Lq}{12} \end{bmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L \cdot \alpha_2 \\ L \cdot \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{Lq}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Daraus sind die Verdrehungen bestimmbar:

$$\alpha_2 = \frac{L^3 q}{56EI} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = -\frac{5L^3 q}{168EI}$$

Um die gesuchten Lagerkräfte zu bestimmen, benutzt man das unreduzierte Gleichungssystem. Die Verschiebungen und Verdrehungen sind bekannt; die unbekanntes Lagerkräfte sind nun im Kraftvektor enthalten. Um $\{P\}$ zu bestimmen, muss man nur die folgende Multiplikation ausführen:

$$[C] \{\Delta\} = \{P\}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{L^4 q}{168EI} = \frac{Lq}{168} \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ -30 \\ 14 \\ 12 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \frac{M_A}{L} \\ \frac{Lq}{2} - B \\ \frac{Lq}{12} \\ \frac{Lq}{2} - C \\ -\frac{Lq}{12} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$A = \frac{3}{28} Lq, \quad B = \frac{Lq}{2} + \frac{5}{28} Lq = \frac{19}{28} Lq \\ M_A = \frac{1}{28} L^2 q, \quad C = \frac{Lq}{2} - \frac{1}{14} Lq = \frac{3}{7} Lq$$

Aufgabe 2

Eine Säule mit nicht konstantem Querschnitt ist gemäss Abb. 15.7 zwischen zwei Flächen eingespannt. Als Belastung wirken die Kraft F und das Eigengewicht $\gamma \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.

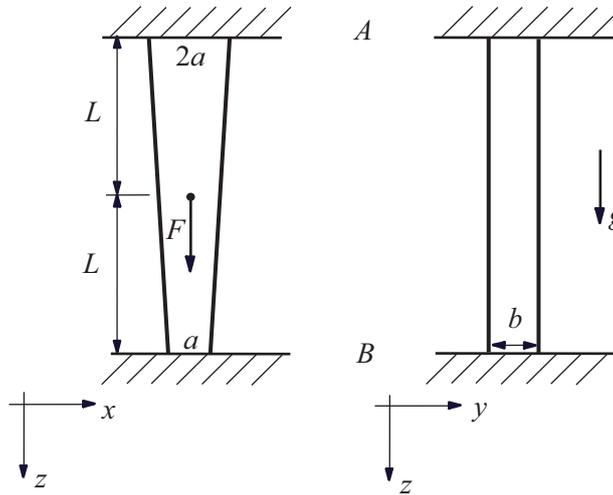


Abbildung 15.7: Skizze zur Aufgabe 2

Modelliere das Problem mit zwei Elementen und berechne die Lagerreaktionen.

Gegeben: Geometrie, γ , Last.

Gesucht: Modellbildung, Lagerkräfte.

Lösung:

Das Problem wird mit zwei Elementen modelliert, wobei die Elemente konstanten Querschnitt haben (siehe Abb. 15.8).

Die Breiten d_1 und d_2 sind (d.h. durchschnittliche Breiten):

$$d_1 = \frac{1}{2} \left(2a + \frac{3}{2}a \right) = \frac{7}{4}a \quad d_2 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{3}{2}a \right) = \frac{5}{4}a$$

Da am Tragwerk nur Axialkräfte wirken, soll man die in Gl. (15.12)-(15.14) gegebenen Kraft- und Verschiebungsvektoren sowie die Steifigkeitsmatrix verwenden. Die zwei Elemente haben unterschiedliche Querschnitte, so dass die zwei Steifigkeitsmatrizen auch unterschiedlich sein werden:

$$\begin{aligned} [C^I] &= A_I \cdot \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \text{mit } A_I &= \frac{7}{4}a \cdot b \\ [C^{II}] &= A_{II} \cdot \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \text{mit } A_{II} &= \frac{5}{4}a \cdot b \end{aligned}$$

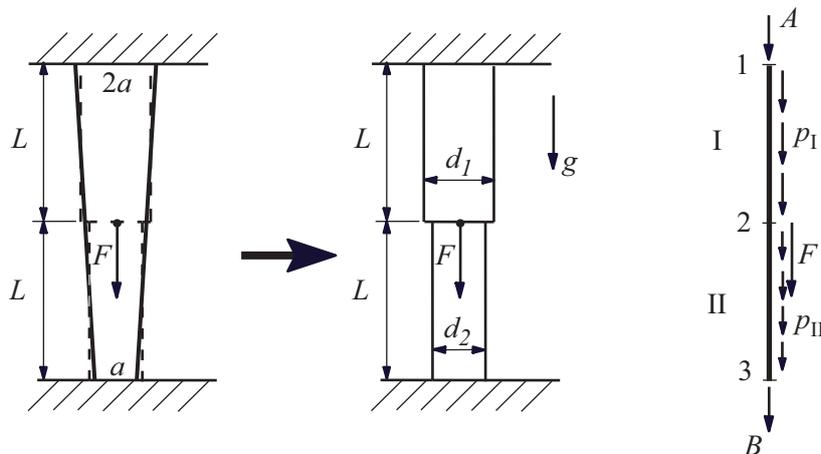


Abbildung 15.8: Modellbildung

Die globale Steifigkeitsmatrix (für die ganze Struktur) ist:

$$[C] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_I & -A_I & 0 \\ -A_I & A_I + A_{II} & -A_{II} \\ 0 & -A_{II} & A_{II} \end{bmatrix}$$

Das Eigengewicht pro Länge ist $p_I = \gamma \cdot A_I$ für den Teil I und $p_{II} = \gamma \cdot A_{II}$ für den Teil II. Eigengewichte müssen auf die Knoten reduziert werden. Gemäss Gl. (15.4) und (15.14) werden die beiden Kraftvektoren:

$$\begin{aligned} \{F^I\} &= L \int_0^1 p_I \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{pmatrix} d\xi = \frac{Lp_I}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \{F^{II}\} &= L \int_0^1 p_{II} \begin{pmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{pmatrix} d\xi = \frac{Lp_{II}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der globale Kraftvektor ist somit:

$$\{P\} = \begin{pmatrix} \frac{Lp_I}{2} + A \\ \frac{L}{2} (p_I + p_{II}) + F \\ \frac{Lp_{II}}{2} + B \end{pmatrix}$$

wobei A und B die Lagerkräfte sind und F die Belastung in der Mitte ist. Die Verschiebungen sind also:

$$\{\Delta\} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$$

Die Randbedingungen sind:

$$u_1 = u_3 = 0$$

Die reduzierte Gleichung ist dann:

$$\begin{aligned}\frac{E}{L}(A_I + A_{II}) \cdot u_2 &= \frac{L}{2}(p_I + p_{II}) + F \\ u_2 &= \frac{L^2}{2E} \cdot \frac{\gamma(A_I + A_{II})}{(A_I + A_{II})} + \frac{FL}{E} \cdot \frac{1}{A_I + A_{II}} = \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{FL}{E(A_I + A_{II})} \\ &= \frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{FL}{E \cdot 3ab}\end{aligned}$$

Die Lagerkräfte werden anschliessend aus der vollständigen Gleichung bestimmt:

$$[C] \cdot \{\Delta\} = \{P\}$$

$$\frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_I & -A_I & 0 \\ -A_I & A_I + A_{II} & -A_{II} \\ 0 & -A_{II} & A_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Lp_I}{2} + A \\ \frac{L}{2}(p_I + p_{II}) + F \\ \frac{Lp_{II}}{2} + B \end{pmatrix}$$

$$\frac{E}{L} \begin{pmatrix} -A_I \cdot u_2 \\ (A_I + A_{II}) \cdot u_2 \\ -A_{II} \cdot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Lp_I}{2} + A \\ \frac{L}{2}(p_I + p_{II}) + F \\ \frac{Lp_{II}}{2} + B \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für A:

$$\begin{aligned}-\frac{E}{L} \cdot \frac{7}{4}ab \cdot \left(\frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{FL}{3Eab} \right) &= \frac{L}{2} \gamma \frac{7}{4}ab + A \\ A &= -\frac{7}{4} \gamma Lab - \frac{7}{12} F\end{aligned}$$

Und für B:

$$\begin{aligned}-\frac{E}{L} \cdot \frac{5}{4}ab \cdot \left(\frac{\gamma L^2}{2E} + \frac{FL}{3Eab} \right) &= \frac{L}{2} \gamma \frac{5}{4}ab + B \\ B &= -\frac{5}{4} \gamma Lab - \frac{5}{12} F\end{aligned}$$

15.3 Verständnisfragen

1. In welchen Fällen wird die Methode der finiten Elemente angewandt?
2. Was ist die Grundidee dieser Methode?
3. Was macht man mit Kräften und Momenten, die nicht in einem Knoten wirken?
4. Welche Verschiebungsgrössen werden bei einem Balkenelement bzw. bei einem Fachwerkelement ermittelt?
5. Wie wird die globale Steifigkeitsmatrix aus den Elementsteifigkeitsmatrizen bei einem geraden Balken zusammengesetzt?
6. Wie werden die Randbedingungen bei dieser Methode implementiert?
7. Wie berechnet man die Lagerkräfte?
8. Wie viele Freiheitsgrade haben die Knoten bei einem Fachwerkelement bzw. bei einem Balkenelement?

Kapitel 16

Schiefe Biegung

Am Ende eines eingespannten Balkens (siehe Abb. 16.1) greift ein Moment an, das in der $y - z$ -Ebene liegt.

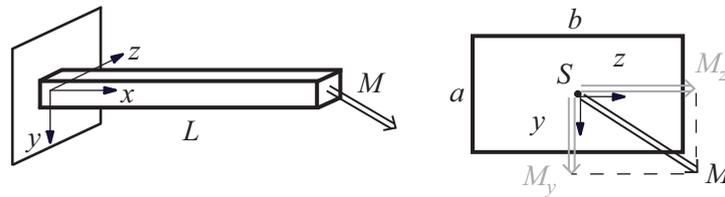


Abbildung 16.1: Schiefe Biegung eines prismatischen Balkens

Der Momentenvektor kann in zwei Komponenten M_y und M_z zerlegt werden. Diese Beanspruchung des Balkens heisst schiefe Biegung.

Der Spannungszustand des Balkens kann aus zwei Biegemomenten M_y und M_z zusammengesetzt werden, die mit y - bzw. mit z -Achsen parallel sind (siehe Abb. 16.2). Die Achsen y und z müssen die Hauptachsen des Querschnitts sein. Die Spannungen können dann mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$\sigma_x^{M_z} = -\frac{M_z}{I_z}y, \quad I_z = \frac{a^3b}{12} \quad (16.1)$$

$$\sigma_x^{M_y} = \frac{M_y}{I_y}z, \quad I_y = \frac{ab^3}{12} \quad (16.2)$$

$\sigma_x^{M_z}$ ist negativ, weil ein positives Moment M_z in der positiven y -Richtung Druckspannungen verursacht, $\sigma_x^{M_y}$ positiv, weil ein positives Moment M_y in der positiven z -Richtung aber Zugspannungen ergibt (Abb. 16.2).

Die Gesamtspannungen in einem Punkt mit den Koordinaten $P(y, z)$ werden als Summe von 16.1 und 16.2 berechnet:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y \quad (16.3)$$

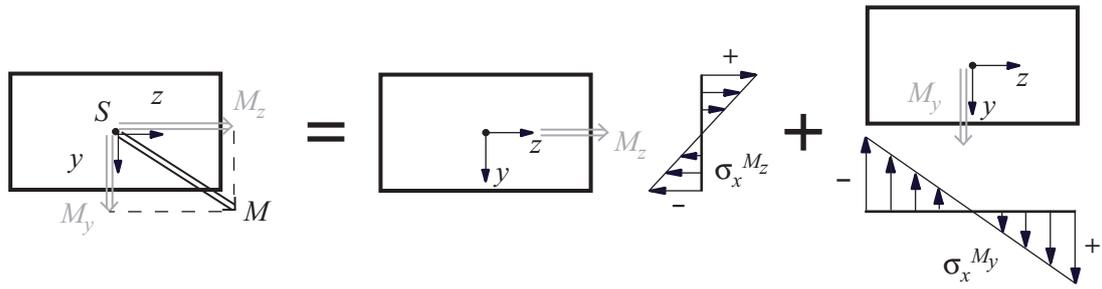


Abbildung 16.2: Verteilung der Normalspannungen infolge schiefer Biegung

Aufgabe

Ein Rechteckquerschnitt ist mit einem Moment M in seiner Ebene belastet (siehe Abb. 16.3). Der Winkel α zwischen dem Moment M und der z -Achse beträgt 30° . Bestimme die positiv und negativ grössten Normalspannungen.

Gegeben: Geometrie, M

Gesucht: Grösste Zug- und Druckspannungen

Lösung:

Die Flächenträgheitsmomente des Querschnitts sind:

$$I_z = \frac{8}{12}a^4, \quad I_y = \frac{2}{12}a^4$$

Die Hauptachsen des Querschnitts sind die y - und z -Achsen. Der Momentenvektor $\underline{\mathbf{M}}$ muss in zwei Komponenten in diesen Richtungen zerlegt werden (siehe Abb. 16.4), wobei die y -Komponente negativ ist:

$$M_z = M \cdot \cos \alpha, \quad M_y = -M \cdot \sin \alpha$$

Das Moment M_z bzw. M_y verursacht Zugspannungen in der oberen bzw. linken Hälfte des Querschnitts. Dementsprechend treten im Punkt A die grössten Zugspannungen auf. Analog

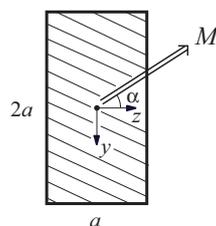


Abbildung 16.3: Skizze zur Aufgabe

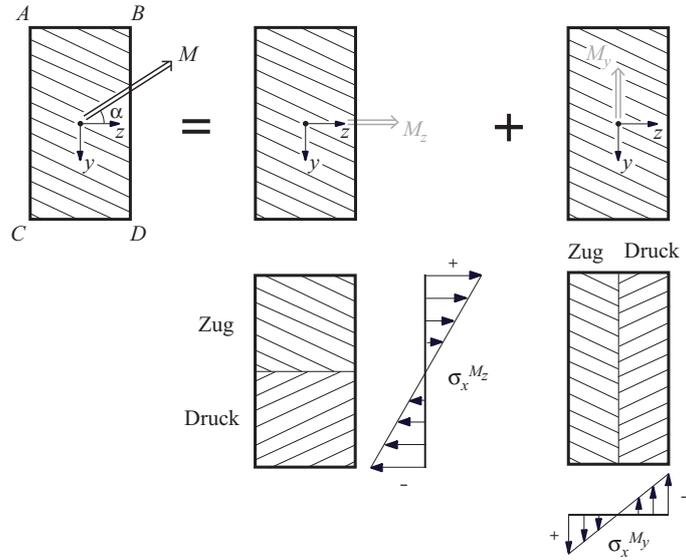


Abbildung 16.4: Zerlegung des Momentes M und die erzeugten Spannungen

werden im Punkt D von den beiden Momenten Druckspannungen erzeugt. Dort tritt die grösste Druckspannung auf. Die Spannungen können gemäss Formel 16.3 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \sigma_x(A) &= -\frac{M \sin \alpha}{I_y} \left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{M \cos \alpha}{I_z} (-a) = \frac{M}{a^4} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{12}{2} \left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{8} (-a) \right] \\ &= \frac{3M}{a^3} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(D) &= -\frac{M \sin \alpha}{I_y} \left(\frac{a}{2}\right) - \frac{M \cos \alpha}{I_z} a = \frac{M}{a^4} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{12}{2} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{8} a \right] \\ &= -\frac{3M}{a^3} \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \end{aligned}$$

16.1 Verständnisfragen

1. Wann liegt gerade Biegung und wann schiefe Biegung vor?
2. Was ist die Grundidee zur Lösung von Problemen mit schiefer Biegung?
3. Wie lauten die Gleichungen für die Biegenormalspannungen bei gerader und schiefer Biegung?
4. Wie ist die Verteilung der Normalspannungen infolge schiefer Biegung?

Kapitel 17

Schubspannungen infolge Biegung

Betrachten wir unser übliches Beispiel, einen eingespannten Balken, an dessen Ende jetzt eine vertikale Kraft angreift (siehe Abb. 17.1).

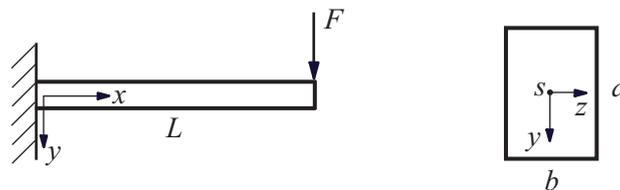


Abbildung 17.1: Eingespannter Balken

Die Beanspruchungen des Balkens sind in Abbildung 17.2 dargestellt. In diesem Fall treten sowohl Biegemomente als auch Querkräfte auf.

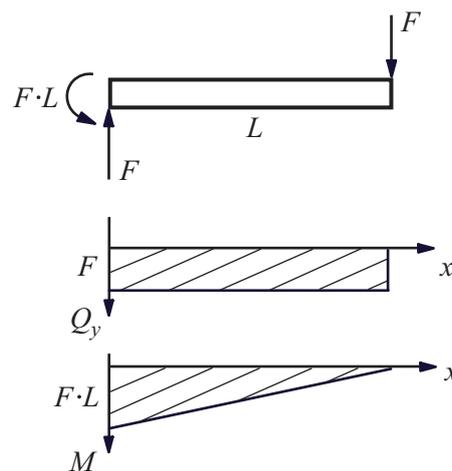


Abbildung 17.2: Beanspruchung des Balkens

Wie im vorhergehenden Kapitel (spezielle und schiefe Biegung) lassen sich die Normalspan-

nungen mit der folgenden Formel berechnen:

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y, \quad \text{wobei } I_z = \frac{a^3 b}{12} \quad (17.1)$$

Um die Wirkung der Querkraft und die Schubspannungen zu verstehen, betrachten wir ein Gedankenexperiment. Der Balken in Abb. 17.3 besteht aus mehreren Schichten. Am Ende des Balkens wirkt eine vertikale Kraft F . Falls die Schichten nicht miteinander verbunden sind, können zwischen den Schichten - wegen der Verformungen - relative Verschiebungen auftreten (siehe Abb. 17.3a). Wenn die Schichten durch Schweißen miteinander verbunden werden oder der Querschnitt aus einem Stück gefertigt wird, können diese Verschiebungen nicht auftreten (siehe Abb. 17.3b).

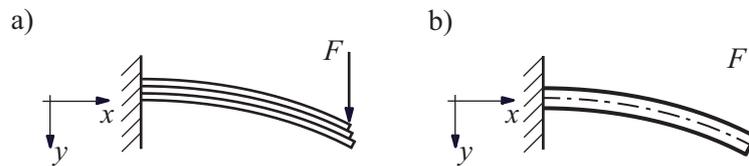


Abbildung 17.3: Darstellung für horizontalen Schub

Um die Verschiebungen zu verhindern, müssen dort horizontale Schubspannungen vorhanden sein. Gemäss dem Satz über die zugeordneten Schubspannungen müssen die gleichen Schubspannungen auch vertikal auftreten (siehe Abb. 17.4).

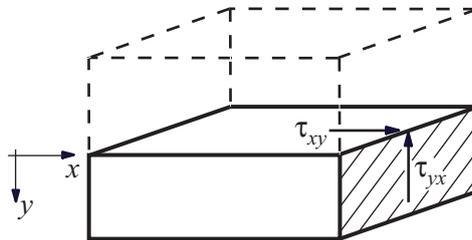


Abbildung 17.4: Schubspannungen infolge Biegung. Horizontale (τ_{xy}) und vertikale (τ_{yx}) Komponenten

Die Grösse dieser Schubspannungen ist:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q \cdot H_z}{I_z \cdot b} \quad (17.2)$$

wobei Q die Querkraft im Querschnitt, I_z das Flächenträgheitsmoment, b die Breite des Querschnitts im Abstand y vom Schwerpunkt und H_z das Flächenmoment 1. Grades der Teilfläche bezüglich der z -Achse sind (siehe Abb. 17.5 und Sayir et al. Band 2, Gl. 20.15).

Die Formel in Gl.17.2 lässt sich bei zusammengesetzten Querschnitten auch verwenden. Hier muss man jedoch zwischen *dickwandigen* und *dünnwandigen* Querschnitten unterscheiden. Bei dickwandigen Querschnitten - z.B. Beton- und Stahlbetonquerschnitten - können die Schubspannungen infolge Biegung mit τ_{xy} bzw. mit τ_{yx} beschrieben werden. In diesem Fall ist

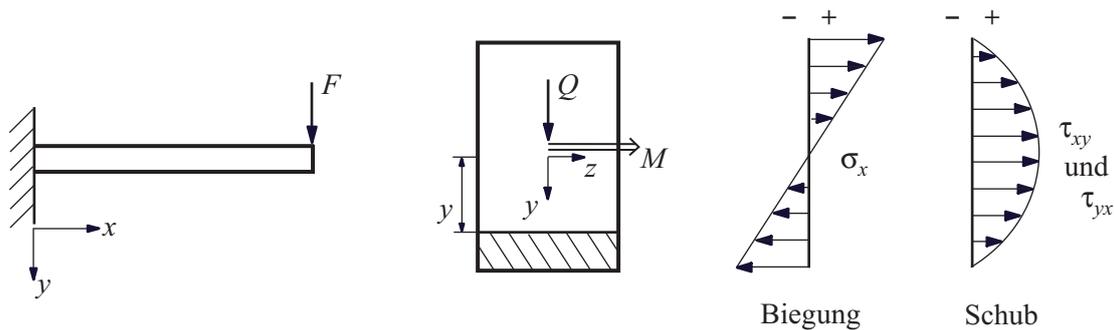


Abbildung 17.5: Normal- und Schubspannungen infolge Biegung

der Schubspannungsverlauf unstetig (Abb.17.6.a). Für dünnwandige Querschnitte gilt: $e \ll a$. (Abb.17.6.b). Die Schubspannungen im Steg (τ_{xy} , τ_{yx}) lassen sich mit Gl.17.2 berechnen und auch der Spannungsverlauf bleibt unverändert. Der Flansch ist dagegen dünn ($e \ll a$) und die Normalspannungen ändern sich nur geringfügig in der y-Richtung; der Effekt in Abb.17.6 kann vernachlässigt werden. Da $e \ll a$ ist, kann die Annahme getroffen werden, dass die Schubspannungen parallel zu den Oberflächen verlaufen (diese Annahme erfüllt die spannungsfreien Randbedingungen). Damit auch die Gleichgewichtsbedingungen (horizontale sowie vertikale Komponentenbedingungen) erfüllt werden, ergibt sich das Spannungsbild in Abb.17.6.b, der sogenannte *Schubspannungsfluss*. Um die Schubspannungen τ_{xy} zu berechnen, kann man Gl.17.2 verwenden.

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q \cdot H_z}{I_z \cdot b} \quad (17.3)$$

Dabei ist H_z das Flächenträgheitsmoment 1.Grades der Teilfläche $e(\frac{h}{2} - z')$ bzgl. der z-Achse und $b = e$. Daher gilt (Abb.17.6.b):

$$\tau_{xy}(z') = \frac{Q}{I_z} \cdot \frac{a+e}{2} \cdot (\frac{h}{2} - z') \quad (17.4)$$

Der Spannungsverlauf im Flansch ist *linear*. Falls $e \ll a$ ist, dann gilt für das Flächenmoment 1.Grades:

$$H_z(z') = \underbrace{\frac{a+e}{2}}_{\text{Abstand zur z-Achse}} \cdot \underbrace{e}_{\text{Flanschbreite}} \cdot (\frac{h}{2} - z') \approx \frac{a}{2} e (\frac{h}{2} - z')$$

und für die Schubspannungen:

$$\tau_{xz}(z') = \frac{Q}{I_z} \cdot \frac{a}{2} \cdot (\frac{h}{2} - z') \quad (17.5)$$

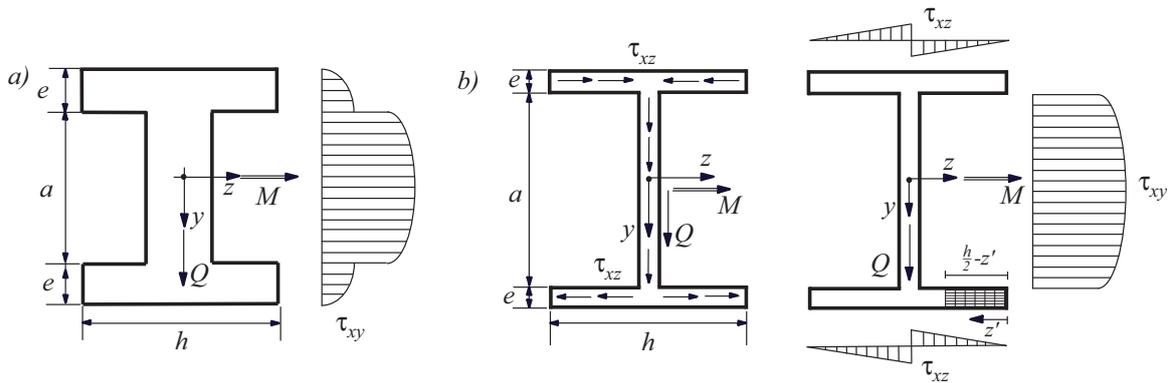


Abbildung 17.6: Schubspannungen infolge Biegung in zusammengesetzten a) dickwandigen; b) dünnwandigen Querschnitten

Aufgabe

Ein Balken mit Doppel-T-Profil ist gemäss Abb. 17.7 gelagert. Am Ende des Balkens greift eine Kraft F an.

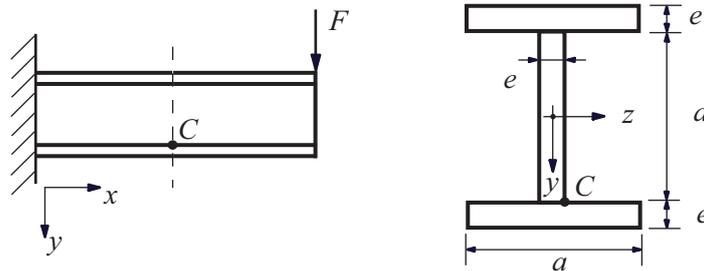


Abbildung 17.7: Skizze zur Aufgabe

- Bestimme die Flächenträgheitsmomente des Querschnitts.
- Setze $e = \frac{a}{2}$ und berechne die maximale Schubspannung.
- Setzt $e \ll a$ und berechne den Schubspannungsverlauf.

Gegeben: Geometrie, F

Gesucht: a) Flächenträgheitsmomente I_y, I_z
 b) Maximale Schubspannung mit $e = \frac{a}{2}$
 c) Schubspannungsverlauf mit $e \ll a$

Lösung:

a) Die Flächenträgheitsmomente können mit Hilfe des Verschiebungssatzes bestimmt werden:

$$I_z = \frac{a^3 e}{12} + 2 \left[\frac{ae^3}{12} + \left(\frac{a+e}{2} \right)^2 ae \right] = \frac{7}{12} a^3 e + a^2 e^2 + ae^3 \frac{2}{3}$$

$$I_y = \frac{ae^3}{12} + 2 \frac{a^3 e}{12} = \frac{1}{6} a^3 e + \frac{1}{12} ae^3$$

b) Die Flächenträgheitsmomente werden mit $e = \frac{a}{2}$ vereinfacht:

$$I_z = \frac{15}{24} a^4 \quad \text{und} \quad I_y = \frac{3}{32} a^4$$

Der Querschnitt ist dickwandig, weil $e \ll a$ ist. Der Spannungsverlauf entspricht also dem Bild in Abb. 17.6.a Um diesen Schubspannungsverlauf bestimmen zu können, müssen Spannungen im Schwerpunkt bzw. im Punkt C berechnet werden. Sie können mit Gl.17.2 ermittelt werden:

$$\tau_{xy} = \frac{Q(x)H_z}{I_z b}$$

Die Querkraftbeanspruchung bleibt im ganzen Balken konstant: $Q(x) = F$. Das Flächenmoment 1.Grades des halben Querschnittes beträgt:

$$H_z^S = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} e + \frac{a+e}{2} ae = \frac{7}{16} a^3$$

wobei für das Flächenmoment des Flansches gilt:

$$H_z^F = \frac{a+e}{2} ae = \frac{3}{8} a^3.$$

Die maximale Schubspannung in der Querschnittsmitte mit $b = \frac{a}{2}$ beträgt somit:

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{QH_z^S}{I_z b} = \frac{F \frac{7}{16} a^3}{\frac{15}{24} a^4 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{F}{a^2}$$

Im Punkt C ändert sich die Breite des Querschnitts sprunghaft, weshalb der Schubspannungsverlauf unstetig ist. Die Schubspannung, falls Punkt C zum Steg gehört, ist (mit $b = \frac{a}{2}$):

$$\tau_{xy}^{Steg} = \frac{F \frac{3}{8} a^3}{\frac{15}{24} a^4 \frac{a}{2}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{F}{a^2}$$

und falls Punkt C zum Flansch gehört ($b = a$):

$$\tau_{xy}^{Flansch} = \frac{F \frac{3}{8} a^3}{\frac{15}{24} a^4 a} = \frac{3}{5} \cdot \frac{F}{a^2}$$

Der Spannungsverlauf ist in Abb.17.8 skizziert.

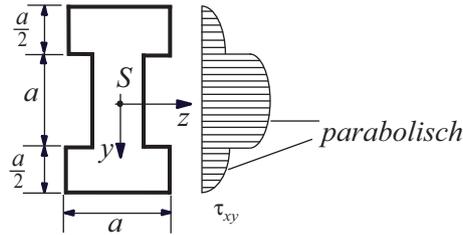


Abbildung 17.8: Schubspannungen in einem dickwandigen Querschnitt

c) Die Flächenträgheitsmomente können wegen $e \ll a$ vereinfacht werden; d.h., es ist: $e^\alpha \approx 0$, für $\alpha > 1$:

$$I_z = \frac{7}{12}a^3e \quad \text{und} \quad I_x = \frac{1}{6}a^3e;$$

der Querschnitt ist somit dünnwandig. In diesem Fall muss der Schubspannungsfluss im Querschnitt berechnet werden (vgl. Abb. 17.6.b). Im Steg müssen die Spannungen im Schwerpunkt bzw. im Punkt C ermittelt werden, wobei wie bisher gilt:

$$\tau_{xy} = \frac{Q(x)H_z}{I_z b}$$

mit $Q(x) = F$ und $b = e$. Das Flächenmoment 1. Grades für den halben Querschnitt ist:

$$H_z^S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}e + \frac{a+e}{2}ae = \frac{5}{8}a^2e$$

und für den Flansch im Punkt C:

$$H_z^C = \frac{a+e}{2}ae = \frac{a^2e}{2}$$

Daraus ergeben sich die Schubspannungen für die Querschnittsmitte

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{F \frac{5}{8}a^2e}{\frac{7}{12}a^3ee} = \frac{15}{14} \cdot \frac{F}{ae}$$

bzw. für C:

$$\tau_{xy}^C = \frac{F \frac{a^2e}{2}}{\frac{7}{12}a^3ee} = \frac{6}{7} \cdot \frac{F}{ae}$$

Gemäss Abb. 17.6.b, treten im Flansch nur horizontale Schubspannungen (τ_{xz}, τ_{zx}) auf. Diese können mit Gl. 17.5 ermittelt werden (Abb. 17.9):

$$\tau_{xz}(z') = \frac{Q}{I_z} \frac{a}{2} \left(\frac{h}{2} - z' \right)$$

mit $Q = F$ und $h = a$:

$$\tau_{xz}(z') = \frac{F}{\frac{7}{12}a^3e} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} - z' \right) = \frac{6}{7} \cdot \frac{F}{a^2e} \cdot \left(\frac{a}{2} - z' \right)$$

Die maximale Schubspannung ergibt sich bei $z = 0$ (im Punkt C):

$$\tau_{yz}^C = \frac{3}{7} \cdot \frac{F}{ae}$$

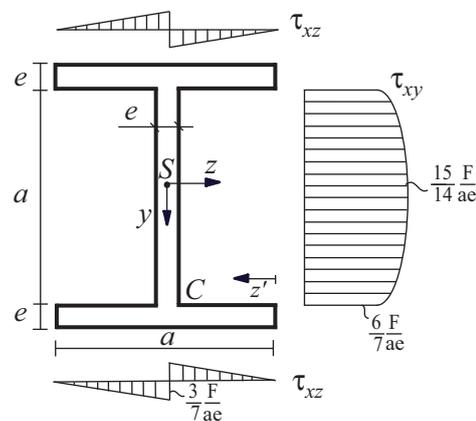


Abbildung 17.9: Schubfluss in einem dünnwandigen Querschnitt

17.1 Verständnisfragen

1. Erläutere die Formel zur Schubspannung infolge Querkraft!
2. Erkläre den Begriff Schubfluss!
3. Wo treten die grössten Normal- bzw. Schubspannungen infolge Biegung in einem Rechteckquerschnitt auf?
4. T-Träger: bleibt der Spannungsverlauf am Übergang von Steg zu Flansch stetig? Falls nicht, warum?
5. Warum treten sowohl horizontale (im Ober- und Unterflansch) als auch vertikale Schubspannungen (im Steg) in einem durch Querkraft belasteten Doppel-T-Träger auf?
6. Profil aus dünnwandigen Teilflächen: Wie ist allgemein der Verlauf des Schubflusses in Teilflächen: a) parallel zur angreifenden Querkraft und b) senkrecht zur angreifenden Querkraft?

Kapitel 18

Torsion

Torsion als Beanspruchung eines Balkens wird nur im Fall eines Kreisring- bzw. Kreisquerschnitts betrachtet (siehe Abb. 18.1).

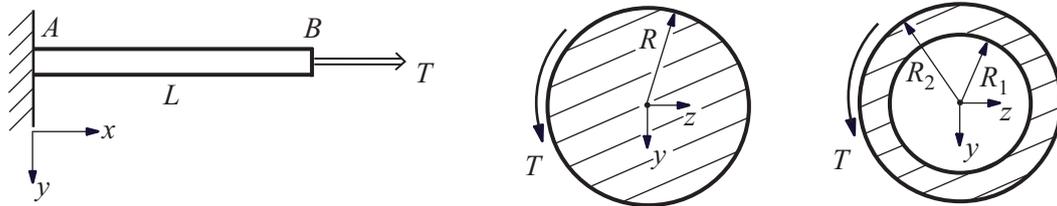


Abbildung 18.1: Torsion eines Kreis- bzw. Kreisringquerschnitts

In einem Kreisquerschnitt treten infolge Torsion nur Schubspannungen auf, die mit der folgenden Formel berechnet werden können:

$$\tau_{\varphi x}(r) = \frac{T}{I_p} r, \quad I_p = I_y + I_z = 2 \cdot \frac{R^4 \pi}{4} = \frac{R^4 \pi}{2} \quad (18.1)$$

wobei I_p das polare Flächenmoment und r der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Querschnitts und dem Punkt P (siehe Abb. 18.2) ist.

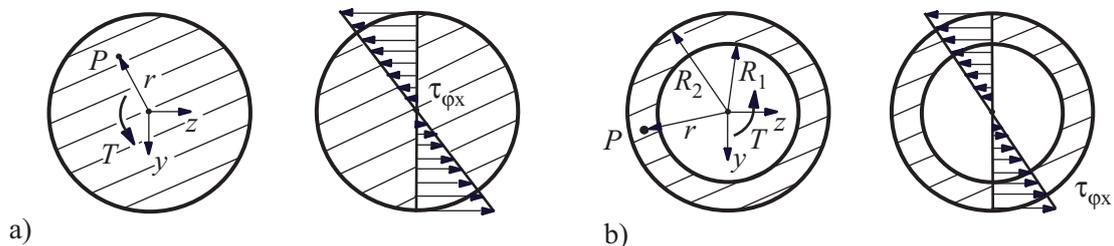


Abbildung 18.2: Spannungszustand infolge Torsion in einem Kreis-(a) bzw. Kreisringquerschnitt (b)

Die Größe der Schubspannung $\tau_{\varphi x}$ hängt vom Abstand (r) des Punktes vom Mittelpunkt ab. Diese Spannungsverteilung ist linear. In der Mitte des Querschnitts sind die Spannungen

null, am äusseren Rand ($r = R$) sind sie am grössten. Im Fall eines Kreisringquerschnitts treten am inneren Rand ($r = R_1$) die kleinsten und am äusseren Rand ($r = R_2$) die grössten Schubspannungen auf.

Der spezifische Verdrehungswinkel ϑ' (siehe Abb. 18.3) kann mit dem Schubmodul G berechnet werden:

$$\vartheta' = \frac{T}{GI_p} \quad (18.2)$$

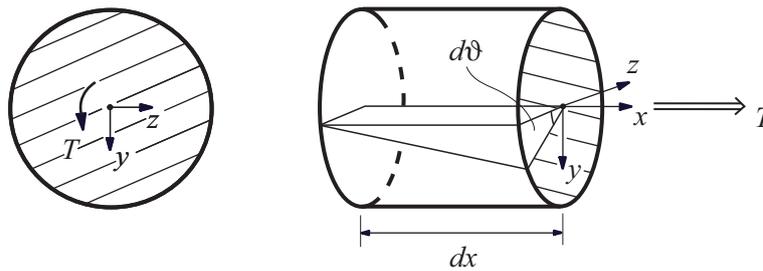


Abbildung 18.3: Spezifische Verdrehung ϑ'

Die Gesamtverdrehung des Balkens im Punkt B (siehe Abb. 18.1) ist:

$$\vartheta = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p} dx = \frac{TL}{GI_p} \quad (18.3)$$

Aufgabe

Eine homogene, abgestufte, linearelastische Welle mit Kreisquerschnitt ist an beiden Enden fest eingespannt und wird durch das Moment M_0 belastet.

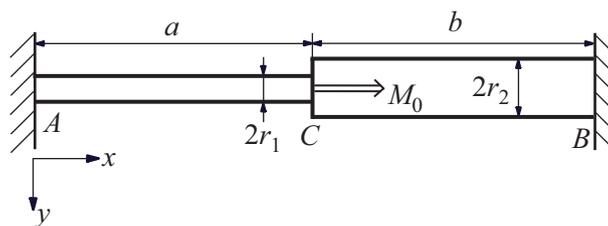


Abbildung 18.4: Skizze zur Aufgabe

Wie gross sind die Einspannmomente und die Verdrehung an der Angriffsstelle von M_0 ?

Gegeben: Geometrie, M_0

Gesucht: Einspannmomente und Verdrehung im Punkt C .

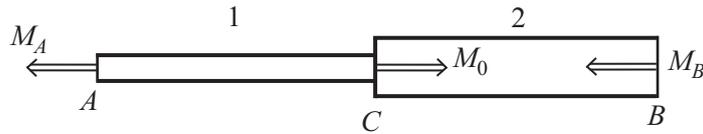


Abbildung 18.5: Freischneiden der Welle

Lösung:

Das Problem ist statisch unbestimmt, da die Momente M_A und M_B aus der Gleichgewichtsbedingung $M_A + M_B = M_0$ alleine nicht bestimmbar sind. Wird die Welle bei C geschnitten, so erzeugen die in den Bereichen 1 und 2 konstanten Torsionsmomente an der Stelle C folgende Verdrehungen:

$$\vartheta_1 = \frac{M_A \cdot a}{GI_{p1}}, \quad \text{wobei } I_{p1} = \frac{\pi}{2} r_1^4,$$

$$\vartheta_2 = \frac{M_B \cdot b}{GI_{p2}}, \quad I_{p2} = \frac{\pi}{2} r_2^4$$

Die geometrische Verträglichkeit verlangt, dass beide Verdrehungen gleich sind:

$$\vartheta_C = \vartheta_1 = \vartheta_2$$

weiterhin:

$$M_A + M_B = M_0 \quad (18.4)$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{M_A \cdot a}{GI_{p1}} = \frac{M_B \cdot b}{GI_{p2}} = \frac{(M_0 - M_A) \cdot b}{GI_{p2}}$$

Und dann:

$$M_A = M_0 \frac{1}{1 + \frac{r_2^4 \cdot a}{r_1^4 \cdot b}}, \quad M_B = M_0 \frac{1}{1 + \frac{r_1^4 \cdot b}{r_2^4 \cdot a}}$$

$$\vartheta_C = \frac{2M_0 ab}{\pi G (br_1^4 + ar_2^4)}$$

18.1 Verständnisfragen

1. Was für Spannungen treten bei einem nur auf Torsion beanspruchten kreis- oder kreisringförmigen Querschnitt auf? Wie ist deren Verteilung (skizziere)? Wo treten die maximalen Spannungen auf und wie werden sie berechnet?
2. Wie berechnet man den Verdrehungswinkel der Endquerschnitte eines Stabes oder einer Welle relativ zueinander bei konstantem Torsionsmoment und konstanter Querschnittsfläche?
3. Wodurch unterscheidet sich grundsätzlich das Formänderungsverhalten der Querschnittsflächen von Torsionsstäben mit kreis- und kreisförmigen Querschnitten von denen mit nichtkreisförmigen Querschnitten?
4. Was ist die Torsionssteifigkeit?
5. Wie lautet die Formel für den spezifischen Verdrehungswinkel?

Kapitel 19

Zusammengesetzte Beanspruchung

In den meisten praktischen Fällen treten die in den vorherigen Kapiteln besprochenen Beanspruchungen zusammengesetzt auf. Man betrachte die Struktur aus zwei Balken in Abbildung 19.1.

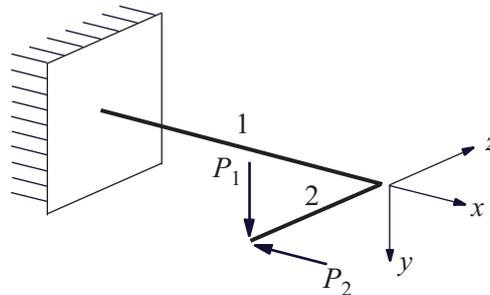


Abbildung 19.1: Zusammengesetzte Beanspruchung

Die Balken werden folgendermassen beansprucht: Balken 2 wird auf schiefe Biegung beansprucht. Im Balken 1 werden aber auch Druck- und Torsionsbeanspruchungen auftreten. Weil die Deformationen klein bleiben, können die verschiedenen Beanspruchungen voneinander getrennt betrachtet werden. Die verschiedenen induzierten Spannungen werden zum Schluss aufsummiert. Im Balken 1, um die grösste Normalspannung zu berechnen, müssen die Normalspannungen infolge Druck und schiefer Biegung summiert werden. Um die grösste Schubspannung zu berechnen, müssen die Schubspannungen infolge Biegung und Torsion summiert werden. Selbstverständlich dürfen verschiedene Komponenten (τ_{xy} , τ_{xz}) nicht summiert werden (siehe folgende Aufgabe)!

Aufgabe

Ein Tragwerk besteht gemäss Abbildung 19.2 aus drei Balken mit Länge $2L$, L bzw. L . An den Punkten B , C und D greifen vier Kräfte an. Sowohl die Balken als auch die Kräfte sind parallel mit den Koordinatenachsen. Das Balkenprofil ist ein Kreisquerschnitt mit Radius R .

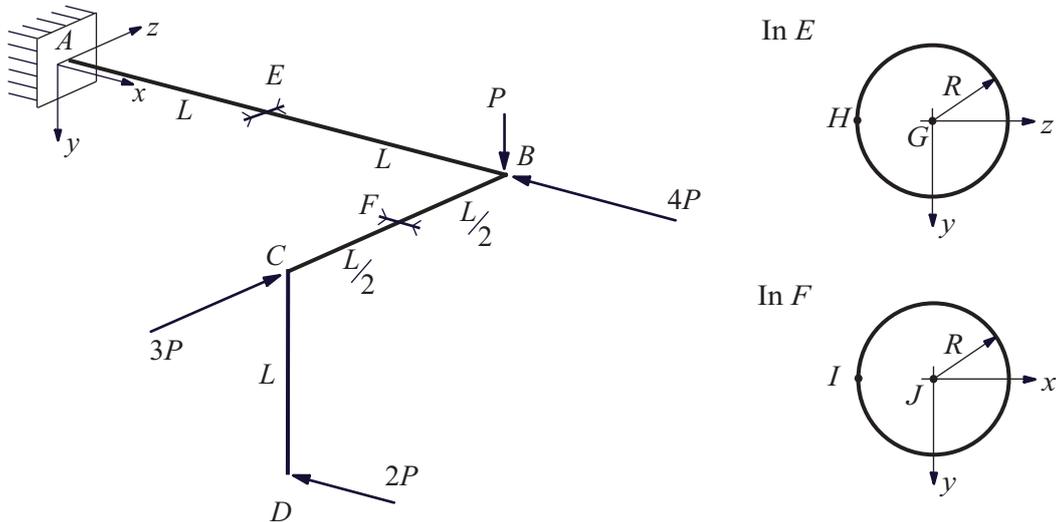


Abbildung 19.2: Skizze zur Aufgabe

Bestimme in den Querschnitten E und F bei den Punkten H , G und I , J die Normal- und Schubspannungen.

Gegeben: Geometrie, Belastung.

Gesucht: Normal- und Schubspannungen in H , G und in I , J .

Lösung:

Zuerst müssen die Lagerkräfte in A bestimmt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \sum F_x : A_x &= 4P + 2P = 6P, & \sum M_x^A : M_{Ax} &= 0, \\ \sum F_y : A_y &= -P, & \sum M_y^A : M_{Ay} &= 3P \cdot 2L - 2P \cdot L = 4PL, \\ \sum F_z : A_z &= -3P, & \sum M_z^A : M_{Az} &= -P \cdot 2L - 2P \cdot L = -4PL \end{aligned}$$

Damit sind die Beanspruchungen in E :

$$\begin{aligned} N_E &= -A_x = -6P, & T_E &= 0 \\ Q_{Ey} &= -A_y = P, & M_{Ey} &= -M_{Ay} - A_z L = -PL \\ Q_{Ez} &= -A_z = 3P, & M_{Ez} &= A_y L - M_{Az} = 3PL \end{aligned}$$

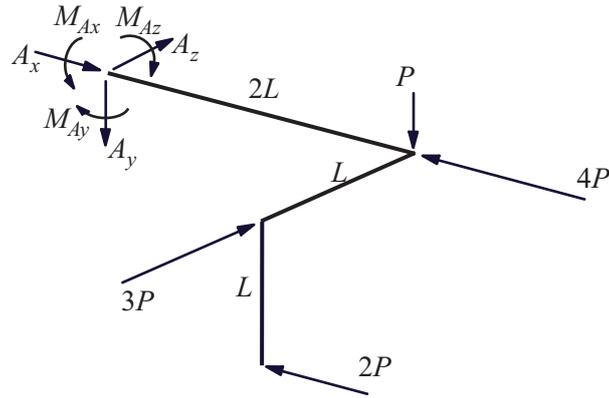


Abbildung 19.3: Systemtrennung

und in F :

$$\begin{aligned}
 N_F &= A_z = -3P, & M_{Fx} &= A_y \frac{L}{2} + P \frac{L}{2} - M_{Ax} = 0 \\
 Q_{Fy} &= -A_y - P = 0, & M_{Fy} &= 4P \frac{L}{2} - M_{Ay} - A_z 2L - A_x \frac{L}{2} = PL \\
 Q_{Fx} &= -A_x + 4P = -2P, & T_F &= A_y 2L - M_{Az} = 2PL
 \end{aligned}$$

Berechnung der Spannungen in E : Die Beanspruchungen im Querschnitt E sind Druck und Biegung. Die Normalspannungen infolge Druck im ganzen Querschnitt sind:

$$\sigma^N = \frac{N_E}{R^2 \pi} = -\frac{6P}{R^2 \pi} \quad (\text{Druck})$$

Die Gesamtbiegung kann als Summe von zwei einzelnen Biegemomente (M_{Ey} und M_{Ez}) betrachtet werden. Das Moment M_{Ez} verursacht weder in H noch in G Normalspannungen

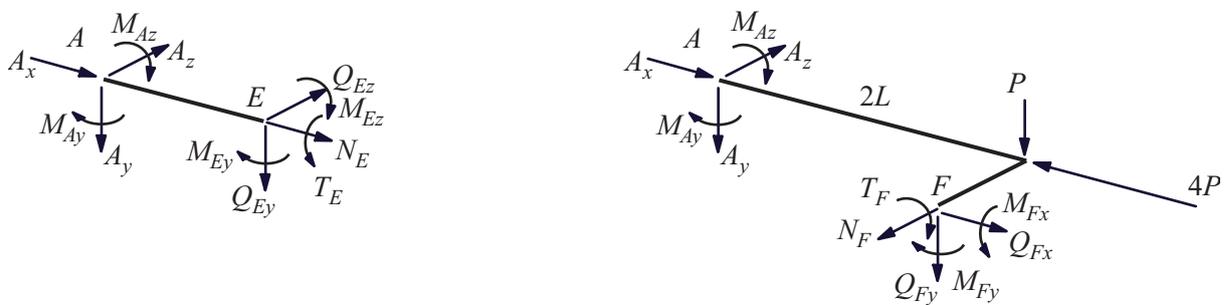


Abbildung 19.4: Beanspruchungen in E und F

(neutrale Achse!). Das Moment M_{Ey} verursacht in H die folgende Spannung:

$$\sigma_H^M = \frac{M_{Ey}}{I_y} \cdot (-R) \quad \text{mit: } I_y = \frac{R^4\pi}{4} = I_z = I$$

$$\sigma_H^M = \frac{-PL}{\frac{R^4\pi}{4}}(-R) = 4 \frac{PL}{R^3\pi} \quad (\text{Zug})$$

Demzufolge sind die Normalspannungen in G :

$$\sigma_G = \sigma^N = -\frac{6P}{R^2\pi} \quad (\text{Druck})$$

und in H :

$$\sigma_H = \sigma^N + \sigma_H^M = 4 \frac{PL}{R^3\pi} - \frac{6P}{R^2\pi} = \frac{2P}{R^2\pi} \left(2 \frac{L}{R} - 3 \right)$$

Schubspannungen werden nur infolge Biegung auftreten. Die Querkraft Q_{Ez} verursacht in H keine Schubspannung (siehe Verteilung der Schubspannungen im Kapitel 17 und Abbildung 19.4).

Im Punkt G gilt:

$$\tau_{xz}^G = \frac{Q_{Ez}H}{I \cdot 2R} \quad \text{mit } H = \frac{R^2\pi}{2} \cdot r$$

$$\tau_{xz}^G = \frac{3P \frac{R^2\pi}{2} r}{\frac{R^4\pi}{4} 2R} = 3P \frac{r}{R^3}$$

wobei r der Abstand zwischen G (Mittelpunkt des Querschnitts) und dem Schwerpunkt des Halbkreises ist.

Die Schubspannungen infolge Q_{Ey} in H und G sind gleich (siehe Abb. 19.5):

$$\tau_{xy}^G = \tau_{xy}^H = \frac{Q_{Ey}H}{I \cdot 2R} = P \frac{r}{R^3}$$

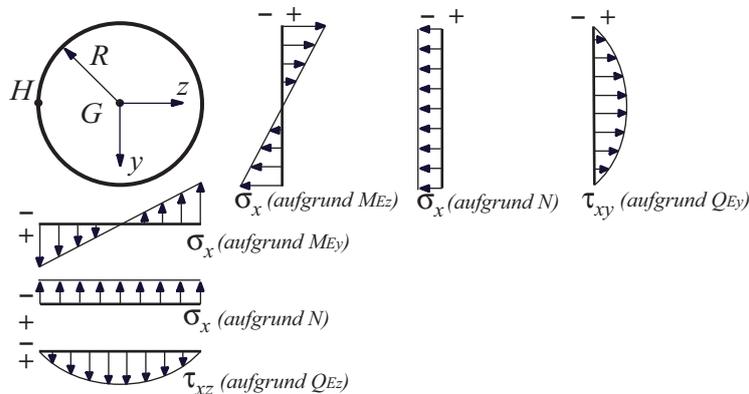


Abbildung 19.5: Spannungsverteilung im Punkt E

Berechnung der Spannungen in F : Im Querschnitt F treten Druck, Torsion und gerade Biegung auf. Die Druckspannungen sind:

$$\sigma^N = \frac{N_F}{R^2\pi} = -\frac{3P}{R^2\pi} \quad (\text{Druck})$$

Das Biegemoment M_{Fy} verursacht keine Spannung im Punkt J . Die Normalspannung infolge M_{Fy} im Punkt I ist:

$$\sigma_I^M = \frac{M_{Fy}}{I}(-R) = -\frac{PL}{\frac{R^4\pi}{4}}R = -4\frac{PL}{R^3\pi} \quad (\text{Druck})$$

Die Summe der Normalspannungen im Punkt I ist:

$$\sigma_I = \sigma^N + \sigma_I^M = -\frac{3P}{R^2\pi} - 4\frac{PL}{R^3\pi} = -\frac{P}{R^2\pi} \left(3 + 4\frac{L}{R} \right) \quad (\text{Druck})$$

und in J gilt:

$$\sigma^J = \sigma^N = -\frac{3P}{R^2\pi}$$

In I tritt keine Schubspannung infolge Biegung auf. In J wie vorher gerechnet:

$$\tau_{zx}^J = \frac{Q_{Fx}H}{I \cdot 2R} = \frac{-2P\frac{R^2\pi}{2}r}{\frac{R^4\pi}{4}2R} = -2P\frac{r}{R^3}$$

In diesem Querschnitt gibt es auch Torsion (T_F). Das Torsionsmoment verursacht in J keine Schubspannung (Mittelpunkt des Querschnitts). In I tritt aber die folgende Schubspannung auf:

$$\tau_{zy}^I = \frac{T_F}{I_p}R \quad \text{mit: } I_p = 2I$$

$$\tau_{zy}^I = \frac{2PL}{\frac{R^4\pi}{2}}R = 4\frac{PL}{R^3\pi}$$

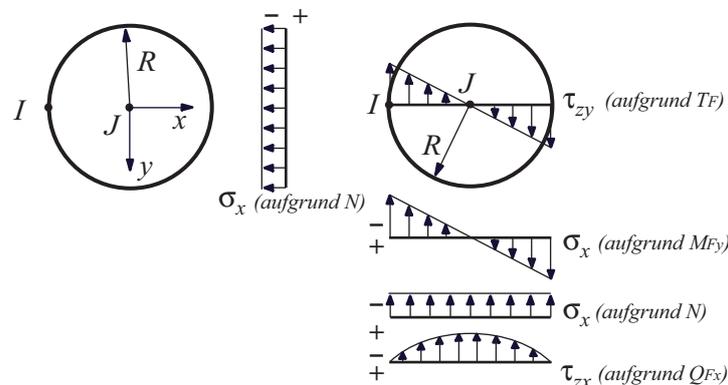


Abbildung 19.6: Spannungsverteilung im Punkt F

19.1 Verständnisfragen

1. Nenne alle dir bekannten Beanspruchungsarten!
2. Annahme: wir haben zwei senkrecht miteinander verschweisste Stäbe, wobei der erste Stab fest eingespannt ist und am anderen Stab an dessen freien Ende eine Kraft angreift. In welche Richtung muss diese Kraft zeigen, dass sie a) ein Biege- und Torsionsmoment sowie eine Querkraft oder b) ein Biegemoment und eine Normalkraft im ersten Stab hervorruft? Welche Beanspruchungen ruft sie dann jeweils im zweiten Stab hervor?

Kapitel 20

Deformationsenergie und Energieverfahren

20.1 Arbeit

Eine Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ greift am materiellen Angriffspunkt M an, der sich im Zeitintervall $\Delta t = t_C - t_B$ längs einer Kurve von B nach C bewegt (siehe Abb. 20.1).

Die Arbeit A_{BC} der Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ von B nach C ist definiert als Zeitintegral:

$$A_{BC} = \int_{t_B}^{t_C} P dt = \int_{t_B}^{t_C} \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{v}} dt \quad (20.1)$$

oder als Kurvenintegral:

$$A_{BC} = \oint_B^C \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{r}} \quad (20.2)$$

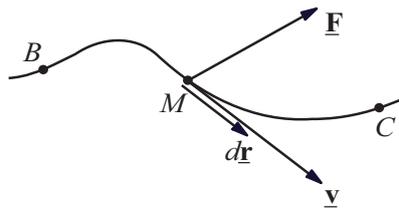


Abbildung 20.1: Arbeit einer Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit materiellem Angriffspunkt M

Eine Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ ist konservativ, wenn ihre Arbeit A_{BC} unabhängig von der Bahnkurve ist. Die Arbeit einer konservativen Kraft kann demzufolge als Differenz einer Ortsfunktion $V(\underline{\mathbf{r}})$ dargestellt werden. Diese Funktion $V(\underline{\mathbf{r}})$ heisst Potential der konservativen Kraft.

$$A_{BC} = V(\underline{\mathbf{r}}_B) - V(\underline{\mathbf{r}}_C) \quad (20.3)$$

Beispiel einer konservativen Kraft: das Gewicht in der Nähe der Erdoberfläche, mit dem entsprechenden Potential:

$$V(z) = mgz \quad (\text{wobei: } V(0) = 0, z: \text{Höhe})$$

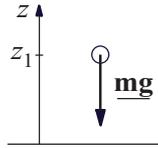


Abbildung 20.2: Arbeit und Potential der Gewichtskraft

Beispiel einer nicht konservativen Kraft: die Gleitreibungskraft, bei der die Arbeit eine Funktion der Bahnkurve ist.

20.2 Deformationsenergie

20.2.1 Linear elastische Feder

Eine linear elastische Feder mit Federkonstante k wird von x_1 bis x_2 deformiert. Die Arbeit der inneren konservativen Federkraft beträgt:

$$A_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} -kx \, dx = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = V(x_1) - V(x_2)$$

Das Potential V der inneren Federkraft wird Deformationsenergie U genannt und beträgt:

$$U = V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (20.4)$$

wobei V auf den entlasteten Zustand x_0 normiert wird ($V(x_0) = 0$).

20.2.2 Deformationsenergie bei Zug und Druck

Die totale Deformationsenergie eines linear elastischen Stabes (Länge L , Querschnittsfläche A , Elastizitätsmodul E) unter Zug oder Druck beträgt:

$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2AE} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L AE \cdot \varepsilon_x^2(x) \, dx \quad (20.5)$$

20.2.3 Deformationsenergie bei Biegung

Die totale Deformationsenergie bei Biegung eines linear elastischen Balkens (Länge L , Flächenträgheitsmoment I_z , Elastizitätsmodul E) ist:

$$U = \int_0^L \frac{M_b^2(x)}{2EI_z} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_z \cdot v''(x)^2 \, dx \quad (20.6)$$

Bei schiefer Biegung erhält man:

$$U = \int_0^L \left[\frac{M_2^2(x)}{2EI_2} + \frac{M_3^2(x)}{2EI_3} \right] \, dx \quad (20.7)$$

wobei 2, 3 die Hauptrichtungen des Querschnittes sind.

20.2.4 Deformationsenergie bei Torsion

Die totale Deformationsenergie bei Torsion eines linear elastischen Stabes (Länge L , polares Flächenmoment I_P , Schubmodul G) mit Kreis- oder Kreisringquerschnitt beträgt:

$$U = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2GI_P} dx = \frac{1}{2} \int_0^L GI_P \cdot \vartheta'(x)^2 dx \quad (20.8)$$

20.2.5 Zusammengesetzte Beanspruchung

Bei zusammengesetzter Beanspruchung werden die verschiedenen Energieanteile summiert:

$$U = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx + \int_0^L \left[\frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} \right] dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GI_P} dx \quad (20.9)$$

20.3 Die Arbeitsgleichungen

20.3.1 Statisch bestimmte Probleme

Bei einem statisch bestimmten Problem können mit den Arbeitsgleichungen Verschiebungen, Steigungen oder Verdrehungen an gewünschten Orten berechnet werden.

Gesucht: Verschiebung $v(a)$ bei $x = a$

- i) Wahl eines statisch bestimmten Ersatzproblems (sbEp) mit einer an der Stelle $x = a$ in Richtung der gesuchten Verschiebung wirkenden Einheitskraft als einzige Belastung
- ii) Berechnung des Biegemomentes $\bar{M}_b(x)$ am sbEp
- iii) Berechnung des Biegemomentes $M_b(x)$ am gegebenen Problem
- iv) Aus dem Theorem der virtuellen Arbeit (TdvA) ergibt sich:

$$v(a) = \int_0^L \bar{M}_b(x) \frac{M_b(x)}{EI_z} dx \quad (20.10)$$

Gesucht: Drehwinkel $\alpha(b)$ bei $x = b$

- i) Wahl eines sbEp mit einem Einheitskräftepaar an der Stelle $x = b$ als einzige Belastung in Drehrichtung des gesuchten Winkels
- ii) Berechnung von $\bar{M}_b(x)$ am sbEp
- iii) Berechnung von $M_b(x)$ am gegebenen Problem
- iv) Aus dem TdvA ergibt sich:

$$\alpha(b) = \int_0^L \bar{M}_b(x) \frac{M_b(x)}{EI_z} dx \quad (20.11)$$

Bemerkung: Bei zusammengesetzter Beanspruchung wird die rechte Seite von (20.10) oder (20.11) sinngemäss ergänzt mit:

$$\int_0^L \bar{N}(x) \frac{N(x)}{EA} dx + \int_0^L \bar{T}(x) \frac{T(x)}{GI_P} dx$$

20.3.2 Statisch unbestimmte Probleme

Bei einem n -fach statisch unbestimmten Problem können die fehlenden Gleichungen zur Bestimmung der Lagerreaktionen mit den Arbeitsgleichungen hergeleitet werden.

i) Alle n zusätzlichen Bindungen lösen und unbekannte Lagerkräfte bzw. Momente einführen. Für jede gelöste Bindung werden nacheinander Einheitskräfte bzw. -kräftepaare in Richtung der freigemachten Verschiebungen bzw. Drehungen eingeführt. Damit erhält man n unabhängige sbEp.

ii) Berechnung von $\overline{M}_b(x)$ für jedes sbEp

iii) Berechnung von $M_b(x)$ am gegebenen Problem

iv) Da die n Verschiebungen bzw. Drehungen gleich Null sind, gilt für jedes sbEp:

$$\int_0^L \overline{M}_b(x) \frac{M_b(x)}{EI_z} dx = 0 \quad (20.12)$$

Man erhält damit n unabhängige Zusatzgleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Lagerkräfte. Die Verschiebungen können anschliessend gemäss Unterkapitel 20.3.1 ermittelt werden.

20.4 Der Satz von Castigliano

20.4.1 Statisch bestimmte Probleme

Gesucht: Verschiebung v_k des Lastangriffspunktes der Einzellast F_k in Kraftrichtung:

Die gesuchte Verschiebung ist die Ableitung der Deformationsenergie U (siehe Unterkapitel 20.2) nach der Einzelkraft F_k :

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} \quad (20.13)$$

Beispiel für spezielle Biegung:

$$v_k = \frac{\partial}{\partial F_k} \int_0^L \frac{M_b^2(x)}{2EI_z} dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial F_k} \frac{M_b^2(x)}{2EI_z} dx = \int_0^L \frac{M_b(x)}{EI_z} \frac{\partial M_b(x)}{\partial F_k} dx \quad (20.14)$$

Gesucht: Verdrehung α_i in Richtung eines Einzelmomentes M_i :

Die gewünschte Verdrehung wird beim Ableiten der Deformationsenergie U nach dem Einzelmoment M_i erhalten:

$$\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (20.15)$$

Beispiel für Torsion mit einem Einzelmoment T_i als Belastung:

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial T_i} \int_0^L \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial T_i} \frac{T^2(x)}{2GI_p} dx = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p} \frac{\partial T(x)}{\partial T_i} dx \quad (20.16)$$

Gesucht: Verschiebung v_H bzw. Verdrehung α_H an einer lastfreien Stelle:

- i) Einführung einer Hilfskraft H bzw. eines Hilfsmomentes M_H an der lastfreien Stelle
- ii) Berechnung der Deformationsenergie inklusiv Hilfsgrösse
- iii) Für die gesuchte Verschiebung bzw. Verdrehung gilt:

$$v_H = \left(\frac{\partial U}{\partial H} \right)_{H=0} \quad (20.17)$$

$$\alpha_H = \left(\frac{\partial U}{\partial M_H} \right)_{M_H=0} \quad (20.18)$$

Bemerkung: Die Kraft bzw. Moment nach der bzw. dem partiell abgeleitet wird, muss eindeutig bezeichnet sein! Greifen an einem Träger zum Beispiel zwei Kräfte vom Betrag F an, so müssen sie in F_1 und F_2 umbenannt werden!

20.4.2 Statisch unbestimmte Probleme

Bei n -fach statisch unbestimmten Problemen müssen n Bindungen gelöst werden und die Bindungskräfte müssen als äussere Lasten eingeführt werden.

Da die Verschiebungen bzw. Verdrehungen am Ort und in Richtung der aufgelösten Bindungen gleich Null sind, gilt:

$$v_k = \frac{\partial U}{\partial F_k} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} = 0 \quad (20.19)$$

Somit erhält man n unabhängige Zusatzgleichungen zur Bestimmung der unbekanntes Lagerkräfte.

20.5 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein mechanisches System besteht aus zwei rechtwinklig zusammengeschweissten, starren Balken AB und BC der Länge $2a$ und zwei linearelastischen Stäben CD und CE (Länge a , Zugsteifigkeit EA). Das System ist in A , E und D gelenkig gelagert und die beiden Stäbe mit dem Balken BC im Punkt C gelenkig verbunden. Alle Gelenke sind reibungsfrei. Gemäss Abbildung 20.3 wirkt auf dem Balken AB eine gleichförmig verteilte Last $\frac{F}{a}$ und der Balken BC ist in der Mitte M mit einer Einzellast vom Betrag F belastet. Alle Eigengewichte können vernachlässigt werden.

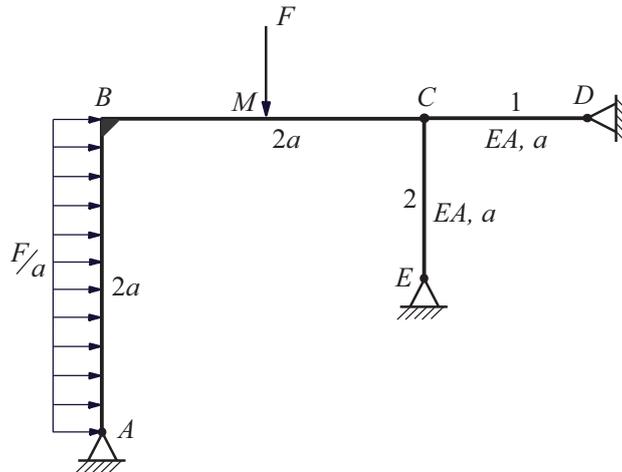


Abbildung 20.3: Gesamtsystem

Wie gross ist die vertikale Absenkung im Punkt M (Angriffspunkt der Kraft F)?

Gegeben: a , EA , F , Geometrie.

Gesucht: Vertikale Absenkung v_{M_y} im Punkt M .

Lösung:

Es gibt verschiedene Möglichkeiten/Methoden um diese Aufgabe zu lösen:

1. Mit einer Energiemethode:
 - a) Castigliano
 - b) Arbeitsgleichungen
2. Mit einer genauen Analyse der Verschiebungen infolge Deformation

1. Energiemethoden:

Das System ist 1-fach statisch unbestimmt. Die Stäbe CD und CE sind Pendelstützen und können demzufolge nur Normalkräfte übertragen.

Das System wird freigeschnitten, getrennt und die vertikale Einzellast F gemäss Bemerkung im Unterkapitel 20.4.1 in F_1 umbenannt. Die gleichförmig verteilte Last $\frac{F}{a}$ kann durch ihre Resultierende vom Betrag $2F$ in der Balkenmitte ersetzt werden.

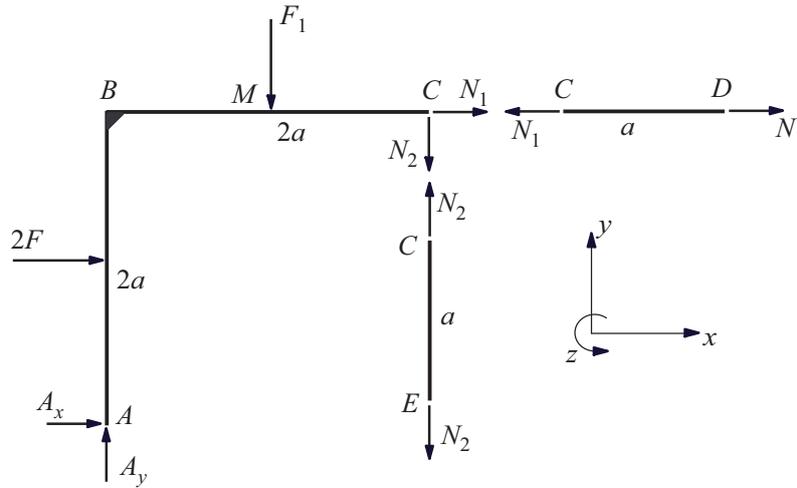


Abbildung 20.4: Systemtrennung und Einführung der Schnittkräfte

Gleichgewicht am Balken AC:

$$\begin{aligned} \sum F_x: A_x + 2F + N_1 &= 0 & \Rightarrow N_1 &= -A_x - 2F \\ \sum F_y: A_y - F_1 - N_2 &= 0 & \Rightarrow N_2 &= A_y - F_1 \\ \sum M_C: aF_1 + a2F + 2aA_x - 2aA_y &= 0 & \Rightarrow A_y &= A_x + F + \frac{F_1}{2} \end{aligned}$$

1.a) Castigliano:

Die Verschiebungen in A sind gleich Null (gelenkig gelagert). Gemäss Castigliano ist die Verschiebung in x -Richtung v_{A_x} die Ableitung der totalen Deformationsenergie nach A_x :

$$v_{A_x} = \frac{\partial U}{\partial A_x} = 0$$

Da das System 1-fach statisch unbestimmt ist, müssen alle unbekanntes Kräfte bezüglich A_x ausgedrückt werden und die obere Gleichung muss nach A_x aufgelöst werden.

Die Deformationsenergie des Systems setzt sich aus der inneren Energie infolge Zug oder Druck in den beiden Stäben zusammen. Da die Balken AB und BC starr sind, leisten sie keinen Beitrag zur Deformationsenergie. Da die Normalkräfte N_1 und N_2 über die Stablänge konstant bleiben, ist die Integration über die Länge trivial. Die Deformationsenergie beträgt:

$$U = \int_0^a \frac{N_1^2}{2EA} dx + \int_0^a \frac{N_2^2}{2EA} dy = \frac{a}{2EA} (N_1^2 + N_2^2)$$

$$\text{mit: } N_1 = -A_x - 2F$$

$$\text{und: } N_2 = A_y - F_1 = A_x + F - \frac{F_1}{2}$$

Damit ist die Verschiebung v_{A_x} :

$$\begin{aligned} v_{A_x} &= \frac{\partial}{\partial A_x} \left[\frac{a}{2EA} (N_1^2 + N_2^2) \right] = \frac{a}{2EA} \left(\frac{\partial N_1^2}{\partial A_x} + \frac{\partial N_2^2}{\partial A_x} \right) \\ &= \frac{a}{EA} \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial A_x} + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial A_x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Mit $\frac{\partial N_1}{\partial A_x} = -1$ und $\frac{\partial N_2}{\partial A_x} = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} v_{A_x} &= \frac{a}{EA} \left[(-A_x - 2F)(-1) + \left(A_x + F - \frac{F_1}{2} \right) \cdot 1 \right] = 0 \\ \Rightarrow A_x + 2F + A_x + F - \frac{F_1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow A_x &= -\frac{3F}{2} + \frac{F_1}{4} \end{aligned}$$

Damit können die beiden Normalkräfte berechnet werden:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} \\ N_2 &= -\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} \end{aligned}$$

Nach Castigliano beträgt die vertikale Verschiebung in M :

$$\begin{aligned} v_{M_y} &= \frac{\partial U}{\partial F_1} \quad (\text{und nicht } \frac{\partial U}{\partial F}) \\ v_{M_y} &= \frac{a}{EA} \left(N_1 \frac{\partial N_1}{\partial F_1} + N_2 \frac{\partial N_2}{\partial F_1} \right) \\ &= \frac{a}{EA} \left[\left(-\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \right] \\ &= \frac{a}{EA} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{F}{2} + \frac{F_1}{4} \right) \end{aligned}$$

Erst jetzt kann F_1 durch F ersetzt werden:

$$v_{M_y} = \frac{3Fa}{8EA}$$

1.b) Arbeitsgleichungen:

Wie bei Castigliano müssen hier in einem ersten Schritt die Auflagerkräfte bestimmt werden. Dafür wird ein erstes sbEp gewählt, bei dem die Verschiebung v_{A_x} gleich Null gesetzt wird. Dafür wird in A eine Einheitskraft in x -Richtung eingeführt.

Achtung: bei dem sbEp werden alle anderen Belastungen nicht berücksichtigt!

Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \sum F_x : \bar{N}_1 &= -1 \\ \sum F_y : \bar{N}_2 &= \bar{A}_y \\ \sum M_C : 2a \cdot 1 &= \bar{A}_y \cdot 2a \\ \Rightarrow \bar{A}_y &= 1 \\ \Rightarrow \bar{N}_2 &= 1 \end{aligned}$$

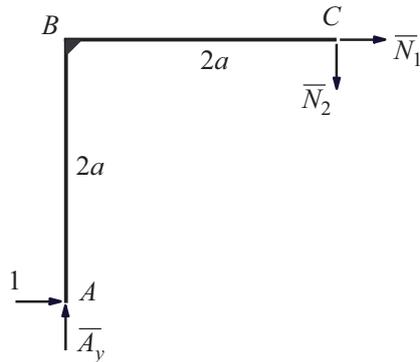


Abbildung 20.5: Ersatzproblem zur Berechnung der unbekanntes Lagerkraft A_x

Die Normalkräfte N_1 und N_2 sind bei 1.a) bezüglich A_x berechnet worden und können in Gleichung (20.12) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^a \bar{N}_1 \frac{N_1}{EA} dx + \int_0^a \bar{N}_2 \frac{N_2}{EA} dx \\
 &= \frac{a}{EA} (\bar{N}_1 N_1 + \bar{N}_2 N_2) \\
 &= \frac{a}{EA} \left[-1 \cdot (-A_x - 2F) + 1 \cdot \left(A_x + F - \frac{F_1}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung führt wie erwartet auf das gleiche Ergebnis wie die Formulierung nach dem Satz von Castigliano:

$$A_x = -\frac{3F}{2} + \frac{F_1}{4}$$

Folgendes sbEp wird für die Berechnung der Verschiebung v_{M_y} gewählt:

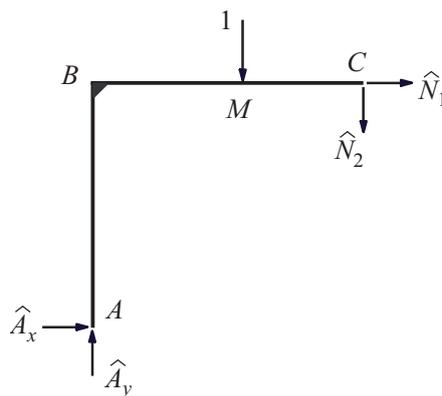


Abbildung 20.6: Ersatzproblem zur Berechnung von v_{M_y}

Als einzige äussere Belastung wirkt eine vertikale Kraft vom Betrag 1 im Punkt M . Die Lagerreaktionen lassen sich aus der Lösung nach Castigliano berechnen, indem $F_1 = 1$ und

$F = 0$ eingesetzt werden:

$$\hat{N}_1 = -\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\hat{N}_2 = -\frac{F}{2} - \frac{F_1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Damit ist die vertikale Absenkung:

$$v_{M_y} = \int_0^a \hat{N}_1 \frac{N_1}{EA} dx + \int_0^a \hat{N}_2 \frac{N_2}{EA} dx$$

$$= \frac{a}{EA} (\hat{N}_1 N_1 + \hat{N}_2 N_2)$$

und wie erwartet:

$$v_{M_y} = \frac{a}{2EA} \left(\frac{F}{2} + \frac{F_1}{4} \right) = \frac{3Fa}{8EA}$$

2. Verschiebungen und kleine Deformationen:

Wie im Teil 1 können alle Kräfte bezüglich A_x ausgedrückt werden:

$$N_1 = -A_x - 2F$$

$$N_2 = A_x + F - \frac{F_1}{2} = A_x + \frac{F}{2}$$

Hier müssen F_1 und F nicht mehr separat betrachtet werden. Da der Balken AC starr ist, führt er im deformierten Zustand eine reine Rotation um A aus (mit einem sehr kleinen Winkel $\alpha \ll 1$).

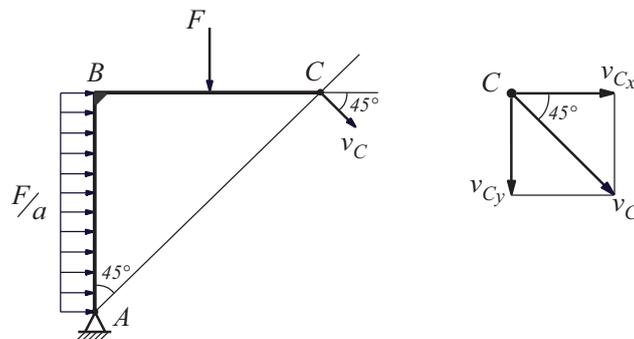


Abbildung 20.7: Verschiebung in C infolge einer Rotation um A

Dadurch entsteht folgende Beziehung für die Komponenten v_{C_x} und v_{C_y} :

$$v_{C_x} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_C = v_{C_y}$$

mit: $v_{C_x} = -u_{C_x} = -\varepsilon_1 \cdot a$

und: $v_{C_y} = -u_{C_y} = -\varepsilon_2 \cdot a$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Aus den Stoffgleichungen für den einachsigen Spannungszustand gilt:

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{EA} = \varepsilon_2 = \frac{N_2}{EA} \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2$$

Es folgt:

$$-A_x - 2F = A_x + \frac{F}{2} \quad \Rightarrow \quad A_x = -\frac{5F}{4}$$

und damit:

$$N_1 = -\frac{3F}{4} = N_2$$

Die vertikale Verschiebung in C ist dann:

$$v_{C_y} = -\frac{N_2}{EA} a = \frac{3aF}{4EA}$$

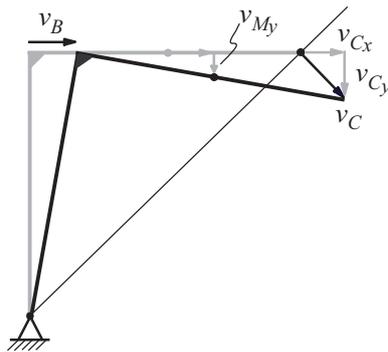


Abbildung 20.8: Geometrische Überlegung zur Bestimmung von v_{M_y}

Aus geometrischer Überlegung folgt:

$$v_{M_y} = \frac{1}{2} v_{C_y} = \frac{3aF}{8EA}$$

Aufgabe 2

Ein mechanisches System besteht aus drei elastischen Balken mit kreisförmigem Querschnitt (Biegesteifigkeit EI , Torsionssteifigkeit GI_p). Die Balken sind gemäss Abbildung 20.9 rechtwinklig zusammengeschnitten. Das System ist in A eingespannt und in B und D durch Einzelkräfte belastet. Länge der Stäbe, Betrag und Richtung der Kräfte sind in der Abbildung 20.9 gegeben (Eigengewichte sind vernachlässigbar).

Berechne die vertikale Verschiebung des Punktes C .

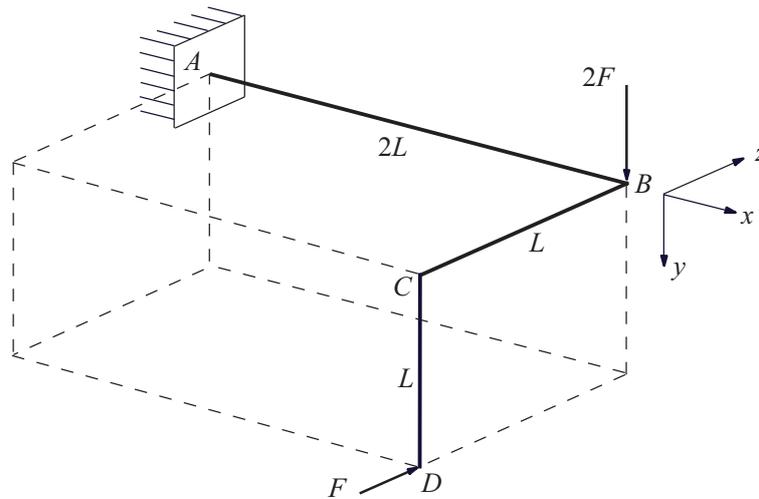


Abbildung 20.9: Mechanisches System

Gegeben: L , EI , GI_p , F , Geometrie.

Gesucht: Vertikale Absenkung des Punktes C .

Lösung:

Die Aufgabe wird hier mit a) Arbeitsgleichungen vollständig vorgelöst. Die Lösung mit b) Castigliano oder mit c) Biegelinie/Verdrehungswinkel werden nur rasch skizziert.

a) **Arbeitsgleichungen:**

Das Problem ist statisch bestimmt. Für die Berechnung der vertikalen Absenkung des Systems im Punkt C wird ein sbEp mit einer vertikalen Einheitskraft vom Betrag 1 in C gewählt:

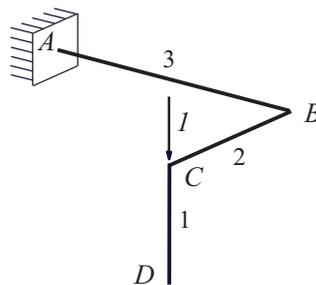
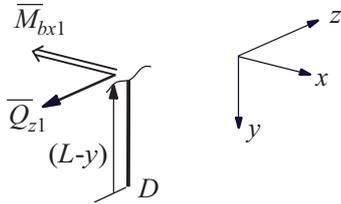


Abbildung 20.10: Statisch bestimmtes Ersatzproblem (sbEp) zur Aufgabe 2

Die Beanspruchungen werden vom Stab 1 (Punkt D) aus berechnet. Damit sind die Auflagerreaktionen in A nicht nötig.

sbEp

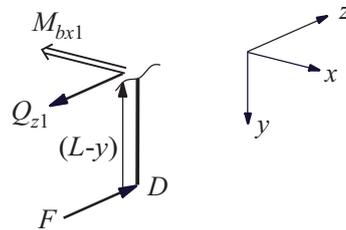
Stab 1: Stab 1 ist unbelastet.



$$\begin{aligned} \bar{Q}_{z1} &= 0 \\ \bar{M}_{bx1} &= 0 \end{aligned}$$

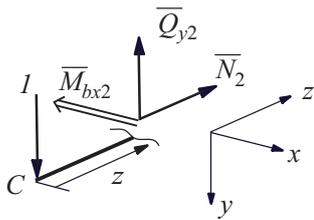
gegebenes Problem

Stab 1:



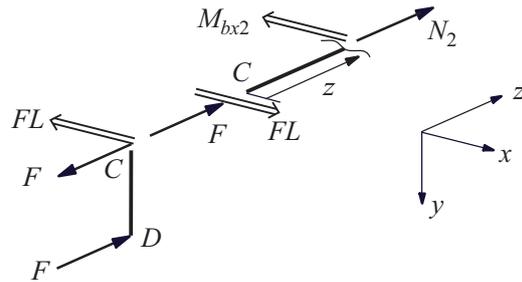
$$\begin{aligned} Q_{z1} &= F \\ M_{bx1} &= F(L-y) \end{aligned}$$

Stab 2:



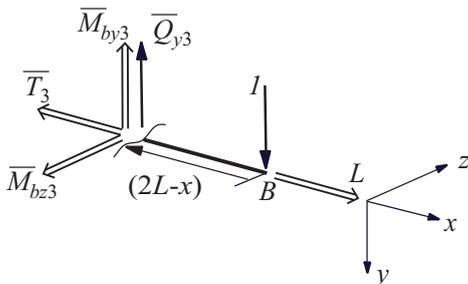
$$\begin{aligned} \bar{Q}_{y2} &= 1 \\ \bar{N}_2 &= 0 \\ \bar{M}_{bx2} &= 1 \cdot z \end{aligned}$$

Stab 2: Reduktion der Kraft F in D auf eine Kraft und ein Moment in C .

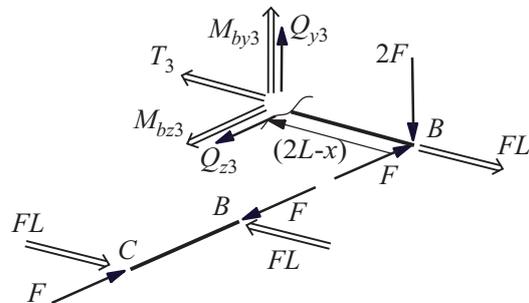


$$\begin{aligned} N_2 &= -F \\ M_{bx2} &= FL \end{aligned}$$

Stab 3: Reduktion der Einzelkraft in den Punkt B .



Stab 3: Reduktion der Kraft F in D auf eine Kraft und ein Moment in B .



$$\begin{array}{ll}
\bar{Q}_{y3} = 1 & Q_{z3} = F \\
\bar{T}_3 = L & Q_{y3} = 2F \\
\bar{M}_{by3} = 0 & T_3 = FL \\
\bar{M}_{bz3} = 1 \cdot (2L - x) & M_{by3} = -F \cdot (2L - x) \\
& M_{bz3} = 2F(2L - x)
\end{array}$$

Damit kann die Arbeitsgleichung aufgestellt werden. Energie infolge Querkraft wird dabei vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
v_{C_y} &= \int_0^{2L} \left(\bar{M}_{bz3} \frac{M_{bz3}}{EI} + \bar{M}_{by3} \frac{M_{by3}}{EI} + \bar{T}_3 \frac{T_3}{GI_p} \right) dx + \int_0^L \left(\bar{N}_2 \frac{N_2}{EA} + \bar{M}_{bx2} \frac{M_{bx2}}{EI} \right) dz \\
&\quad + \int_0^L \left(\bar{M}_{bx1} \frac{M_{bx1}}{EI} \right) dy \\
v_{C_y} &= \int_0^{2L} \left(\bar{M}_{bz3} \frac{M_{bz3}}{EI} + 0 + \bar{T}_3 \frac{T_3}{GI_p} \right) dx + \int_0^L \left(0 + \bar{M}_{bx2} \frac{M_{bx2}}{EI} \right) dz + \int_0^L (0) dy
\end{aligned}$$

Die Normalkraft N_2 und die Biegemomente M_{by3} , M_{bx1} verursachen Deformationen in der xz -Ebene (horizontal) und leisten keinen Beitrag zur vertikalen Absenkung in C .

Einsetzen der Beanspruchungen in die Arbeitsgleichung und Integration führt zur gesuchten vertikalen Verschiebung:

$$\begin{aligned}
v_{C_y} &= \int_0^{2L} \left[\frac{2F}{EI} (2L - x)^2 + \frac{F}{GI_p} L^2 \right] dx + \int_0^L \frac{FL}{EI} z dz \\
&= \left[-\frac{2F}{EI} \frac{(2L - x)^3}{3} + \frac{FL^2}{GI_p} x \right]_0^{2L} + \left[\frac{FL}{EI} \frac{z^2}{2} \right]_0^L \\
&= \left[0 + 2 \frac{FL^3}{GI_p} - \left(-\frac{2F}{EI} \cdot \frac{8L^3}{3} \right) - 0 \right] + \left[\frac{FL^3}{2EI} - 0 \right] \\
&= \frac{2FL^3}{GI_p} + \frac{16}{3} \frac{FL^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{FL^3}{EI} \\
v_{C_y} &= FL^3 \left(\frac{2}{GI_p} + \frac{35}{6EI} \right)
\end{aligned}$$

b) Castigliano

Für die Lösung mit dem Satz von Castigliano wird im Punkt C eine vertikale Kraft vom Betrag H eingeführt. Alle Beanspruchungen werden in Abhängigkeit von F und H berechnet. Die gesamte Deformationsenergie wird dann nach H abgeleitet. Nach dem Ableiten kann H gleich Null gesetzt werden und der Rest bezüglich x , y , z integriert werden.

c) Biegelinie/Verdrehung

Die vertikale Absenkung in C setzt sich aus drei Deformationen zusammen:

- der Stab AB wird in y -Richtung gebogen ($M_{bz3} \rightarrow v_{b3}$),
- der Stab AB wird verdreht ($T_3 \rightarrow v_{t3}$),
- und der Stab BC wird in y -Richtung gebogen ($M_{bx2} \rightarrow v_{b2}$).

Die Absenkung in C ist die Summe der drei Verschiebungen:

$$v_{Cy} = v_{b3} + v_{t3} + v_{b2}$$

Wie bei den Arbeitsgleichungen leisten M_{by3} , N_2 und M_{bx1} keinen Beitrag zur vertikalen Absenkung.

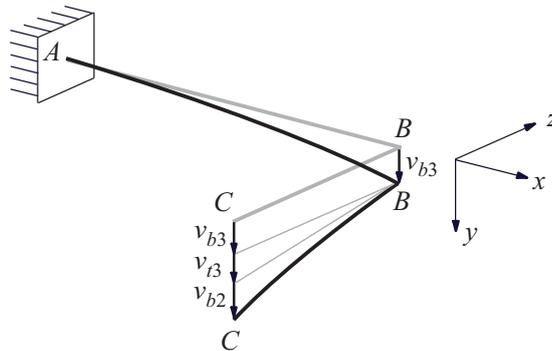


Abbildung 20.11: Deformation der Balken AB und BC

Aufgabe 3

Zwei elastische Balken mit gleicher Biegesteifigkeit EI sind jeweils einseitig fest eingespannt und stützen sich momentenfrei aufeinander ab (siehe Abb. 20.12). Ohne äussere Last ist die Kontaktkraft F_C gleich Null.

Im Berührungspunkt C wird jetzt eine horizontale Einzelkraft vom Betrag F eingeführt.

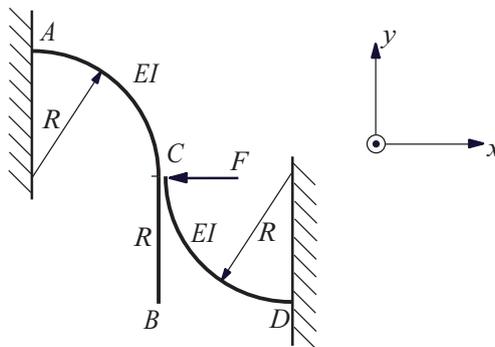


Abbildung 20.12: Gesamtsystem

- Welche Kontaktkraft F_C wirkt zwischen den Balken?
- Welche Neigung α gegen die Vertikale hat der gerade Balkenteil?
- Welche horizontale Auslenkung erfährt der Punkt B ?

Hinweis: Die Balkeneigengewichte sind vernachlässigbar klein.

Gegeben: R , EI , F , Geometrie.

Gesucht: a) Kontaktkraft F_C

b) Neigung α vom Teil CB

c) v_{Bx}

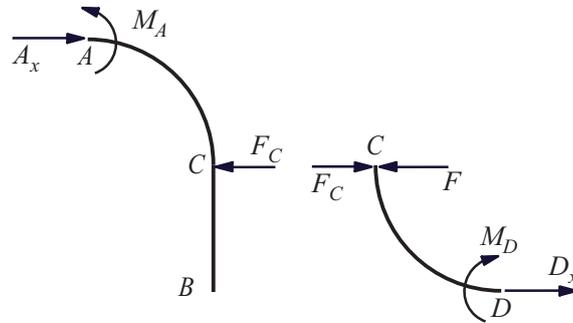


Abbildung 20.13: Systemtrennung und Einführung der Schnittkräfte

Lösung:

Die ganze Aufgabe wird mit der Methode von Castigliano gelöst. Die Schub- und Längsdeformationen werden dabei vernachlässigt.

a) Die Kontaktkraft F_C ist eine innere Kraft des mechanischen Systems und erscheint bei der Trennung der beiden Stäbe (siehe Abb. 20.13).

Da wir die Auflagerreaktionen nicht berechnen wollen, werden die Biegemomente von den freien Enden B und C aus berechnet:

$$M_{b0} = 0$$

$$M_{b1} = F_C \cdot R \sin \varphi_1$$

$$M_{b2} = (F - F_C) \cdot R \sin \varphi_2$$

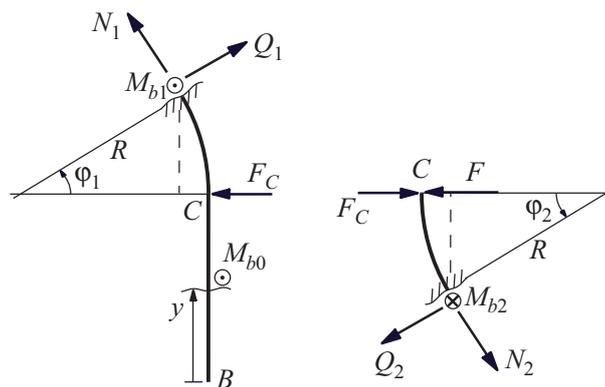


Abbildung 20.14: Beanspruchungen in den Balken AB und CD

Die horizontale Auslenkung im Punkt C muss bei beiden Stäben gleich sein. Aus Castigliano

folgt für den Stab AB :

$$\begin{aligned} v_{Cx1} &= \frac{\partial U_1}{\partial F_C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{b1}}{EI} \frac{\partial M_{b1}}{\partial F_C} R d\varphi_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_C R^2 \sin^2 \varphi_1}{EI} R d\varphi_1 \\ &= \frac{F_C R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{F_C R^3}{EI} \left[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{F_C R^3 \pi}{EI} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

wobei v_{Cx1} die Verschiebung in negativer x -Richtung darstellt.

Auf den Balken CD wirkt in C in negativer x -Richtung die resultierende Kraft F_R vom Betrag $(F - F_C)$. Die horizontale Auslenkung in negativer x -Richtung beträgt:

$$\begin{aligned} v_{Cx2} &= \frac{\partial U_2}{\partial F_R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{b2}}{EI} \frac{\partial M_{b2}}{\partial (F - F_C)} R d\varphi_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(F - F_C) R^2 \sin^2 \varphi_2}{EI} R d\varphi_2 \\ &= \frac{(F - F_C) R^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi_2 d\varphi_2 = \frac{(F - F_C) R^3 \pi}{EI} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung $v_{Cx1} = v_{Cx2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{F_C R^3 \pi}{EI} \frac{\pi}{4} &= \frac{(F - F_C) R^3 \pi}{EI} \frac{\pi}{4} \\ F_C &= F - F_C \\ F_C &= \frac{F}{2} \end{aligned}$$

b) Für die Berechnung der Verdrehung im Punkt C wird ein Hilfsmoment M_H eingeführt (siehe Unterkapitel 20.4.1). Das resultierende Biegemoment M_{bh} im kreisförmigen Teil des Balkens AB beträgt:

$$M_{bh} = M_H + F_C \cdot R \sin \varphi_1$$

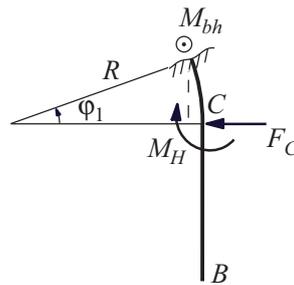


Abbildung 20.15: Einführung eines Hilfsmomentes M_H

Die Verdrehung wird gemäss Formel (20.18) berechnet:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial U}{\partial M_H} \Big|_{M_H=0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{bh}}{EI} \frac{\partial M_{bh}}{\partial M_H} R d\varphi_1 \Big|_{M_H=0} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_H + F_C \cdot R \sin \varphi_1}{EI} \cdot 1 \cdot R d\varphi_1 \Big|_{M_H=0} \end{aligned}$$

M_H kann jetzt gleich Null gesetzt werden:

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_C R^2}{EI} \sin \varphi_1 d\varphi_1 = \frac{F_C R^2}{EI} [-\cos \varphi_1]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{F_C R^2}{EI}$$

Mit $F_C = \frac{F}{2}$ aus Aufgabenteil a) beträgt die gesuchte Verdrehung im Punkt C :

$$\alpha = \frac{FR^2}{2EI}$$

c) Die Auslenkung in B lässt sich aus geometrischer Überlegung bestimmen:

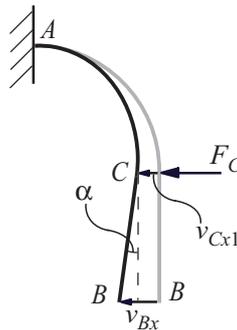


Abbildung 20.16: Deformation des Balkens AB

$$v_{Bx} = v_{Cx1} + R \sin \alpha$$

Da die Verdrehung $\alpha \ll 1$ ist, darf $\sin \alpha$ mit α approximiert werden. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Cx1} + R\alpha \\ &= \frac{FR^3}{2EI} \frac{\pi}{4} + R \frac{FR^2}{2EI} \\ &= \frac{FR^3}{2EI} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

20.6 Verständnisfragen

1. Was ist eine konservative Kraft?
2. Aus welchen Anteilen setzt sich die Deformationsenergie im allgemeinen Fall zusammen und wie werden diese Anteile berechnet?
3. Welche Energieverfahren sind dir bekannt?
4. Was ist das Ziel dieser Verfahren? Wie ist das Vorgehen bei diesen Verfahren?
5. Unter welchen Voraussetzungen kann die Deformationsenergie der Querkraft vernachlässigt werden?
6. Kann auch eine Lösung für statisch unbestimmte Probleme gefunden werden? Warum?
7. Was ist ein statisch bestimmtes Ersatzproblem (sbEp)? Wie muss es gewählt werden?
8. Wie berechnet man die Verschiebung an einer lastfreien Stelle mit dem Satz von Castigliano?

Kapitel 21

Knickung

21.1 Stabilitätsprobleme

Bei einem Fachwerk unter zusammengesetzter Beanspruchung gibt es ein Stabilitätsproblem, falls die Absolutwerte des Biegemomentes in der deformierten Lage grösser sind als in der undeformierten Lage.

In diesem Fall muss die Stabilitätsgrenze berechnet werden, in deren Nähe die zulässigen Spannungen im Allgemeinen überschritten werden.

21.2 Balken unter Druck

Ein Balken unter Druck ist ein typisches Beispiel eines Stabilitätsproblems. Die Stabilitätsgrenze, auch "Eulersche Knicklast" genannt, beträgt für einen elastischen Balken mit Länge L und Biegesteifigkeit EI_z :

$$F_E = k \cdot \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \quad (21.1)$$

wobei k ein numerischer Faktor ist, der von der Lagerung abhängig ist. In der untenstehenden Abbildung ist dieser Koeffizient k für fünf verschiedene Lagerungsarten gegeben:

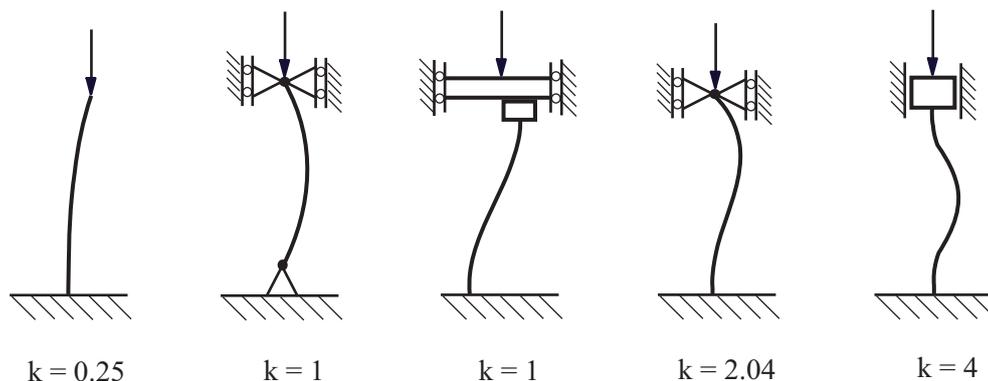


Abbildung 21.1: Koeffizient k für fünf Grundfälle der Lagerung

Lösungsweg von Stabilitätsproblemen

In einem mechanischen System werden alle Stäbe freigeschnitten und die auf jeden Stab wirkenden Zug/Druckkräfte bestimmt.

Für alle Stäbe unter Drucklast muss das System auf Stabilität überprüft werden:

$$S < F_E = k \cdot \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

wobei S die Stabkraft ist.

21.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Ein mechanisches System besteht aus zwei linear elastischen Stäben (Länge $2L$, Elastizitätsmodul E), die im Punkt C reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Am Ende des waagerechten Stabes (Punkt B) wirkt gemäss Abbildung 21.2 eine vertikale Kraft vom Betrag F .

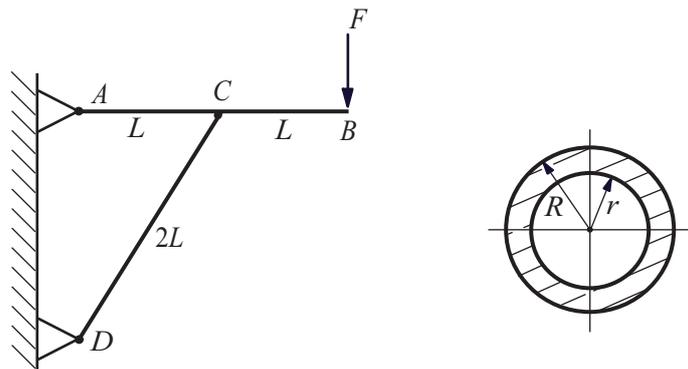


Abbildung 21.2: Gesamtes System und Stabquerschnitt

Welche Bedingung muss der innere Radius r bei einem gegebenen äusseren Radius R erfüllen, so dass das mechanische System stabil bleibt (Eigengewicht vernachlässigbar klein)?

Gegeben: L, R, E, F , Geometrie.

Gesucht: $r = f(L, R, E, F)$

Lösung:

In einem ersten Schritt wird das System freigeschnitten und im Punkt C getrennt. Der Stab DC ist eine Pendelstütze und ist demzufolge nur durch eine Normalkraft belastet. Die innere Kraft im Punkt C kann in Richtung des Stabes DC eingeführt werden (siehe Abb. 21.3).

Die Momentenbedingung wird im Punkt C aufgestellt:

$$\sum M_C : FL + A_y L = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -F$$

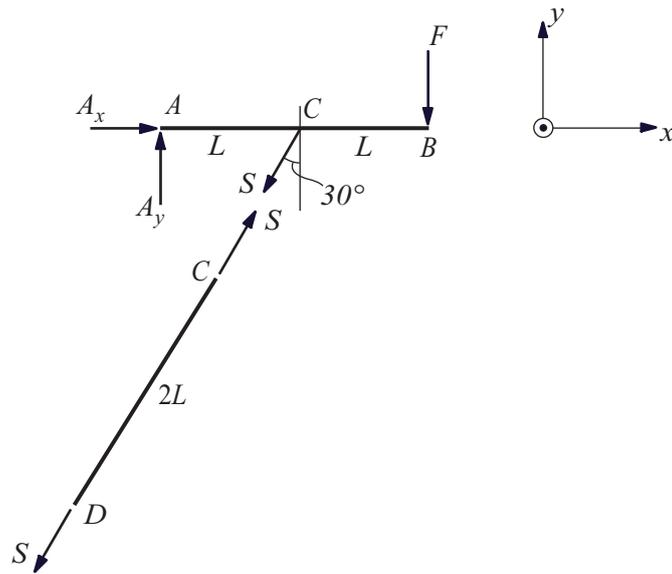


Abbildung 21.3: System wird freigeschnitten und in C getrennt

Kräftegleichgewicht am Stab AB :

$$\sum F_x : A_x - \frac{S}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{S}{2}$$

$$\sum F_y : A_y - F - S \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = -\frac{4\sqrt{3}}{3}F$$

Normalkraft am Stab AB :

$$0 < x < L$$

$$N + A_x = 0$$

$$\Rightarrow N = -A_x = -\frac{S}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}F$$

$$L < x < 2L$$

$$N = 0$$

Normalkraft am Stab CD :

$$N = S = -\frac{4\sqrt{3}}{3}F$$

Der Stab CD ist auf Druck belastet und kann somit kritisch bezüglich Knicken sein. Für die Berechnung der kritischen Knicklast (21.1) muss der Faktor k anhand von Abbildung 21.1 bestimmt werden. Der Stab ist auf beiden Seiten gelenkig gelagert, was einem Faktor $k = 1$ entspricht.

Daraus folgt:

$$|S| < F_E = 1 \cdot \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}F < \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$$

Das Trägheitsmoment I_z eines Kreisringquerschnitts lässt sich aus Substraktion zweier Kreisquerschnitt vom Radius R bzw. r berechnen:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{3}}{3}F &< \frac{\pi^3 E (R^4 - r^4)}{16L^2} = \frac{\pi^3 ER^4}{16L^2} \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right) \\ \frac{64\sqrt{3}FL^2}{3\pi^3 ER^4} &< 1 - \frac{r^4}{R^4} \\ \frac{r^4}{R^4} &< 1 - \frac{64\sqrt{3}FL^2}{3\pi^3 ER^4} \\ \frac{r}{R} &< \left(1 - \frac{64\sqrt{3}FL^2}{3\pi^3 ER^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (*) \\ r &< R \left(1 - \frac{64\sqrt{3}FL^2}{3\pi^3 ER^4}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Diskussion:

Ist die Einzelkraft $F = 0$ (mechanisches System unbelastet), dann kann der unbelastete Querschnitt "unendlich dünn" werden:

$$\frac{r}{R} < 1 \quad \Rightarrow \quad r < R$$

und im Grenzfall $r = R$

Im Gegensatz dazu darf r nicht kleiner als Null werden (Kreisquerschnitt). Der rechte Term in der Ungleichung (*) muss somit immer grösser Null sein. Damit kann die maximale Kraft F bestimmt werden, die das mechanische System bei einem vollen Kreisquerschnitt ($r = 0$) noch ertragen kann:

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} = 0 &< \left(\frac{3\pi^3 ER^4 - 64\sqrt{3}FL^2}{3\pi^3 ER^4}\right)^{\frac{1}{4}} \\ 64\sqrt{3}FL^2 &< 3\pi^3 ER^4 \\ F &< \frac{\sqrt{3} \pi^3 ER^4}{64 L^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Das dargestellte mechanische System besteht aus gewichtslosen elastischen Stäben mit unterschiedlicher Biegesteifigkeit. Alle Gelenke und Lagerungen sind reibungsfrei. Als einzige Belastung wirkt im Punkt B eine vertikale Last vom Betrag F .

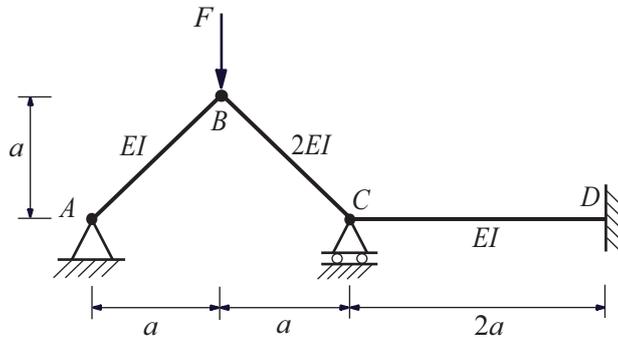


Abbildung 21.4: Gesamtes System

Ermittle, welcher Stab bei Steigerung von F zuerst ausknickt.

Gegeben: a , EI , F , Geometrie

Gesucht: $F_{krit.}$ für jeden Stab

Lösung:

Die Stabkräfte werden mit Hilfe des Knotengleichgewichts berechnet. Stäbe AB und BC sind Pendelstützen und können dementsprechend nur durch Zug oder Druck belastet werden.

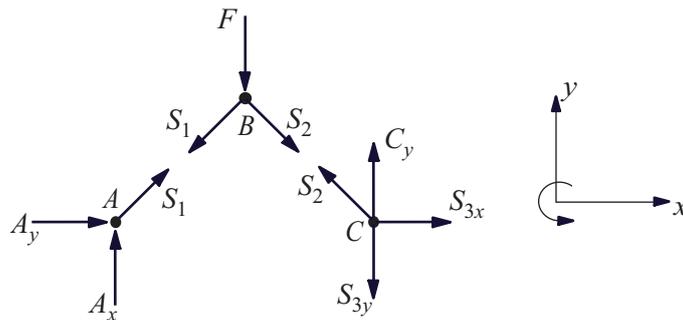


Abbildung 21.5: Knotengleichgewicht in A , B und C

Gleichgewicht im Punkt B :

$$\sum F_x : -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2$$

$$\sum F_y : F + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 = -F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gleichgewicht im Punkt C :

$$\sum F_x : S_{3x} - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{3x} = -\frac{F}{2}$$

Bei kritischer Knicklast sind Stabkraft und Eulersche Knicklast gleich. Stab AB und BC sind gelenkig gelagert, was einem Koeffizienten $k_1 = k_2 = 1$ entspricht. Stab CD ist in C gelenkig gelagert und in D eingespannt: er weist einen Koeffizienten $k = 2.04$ auf.

Im kritischen Fall hat man:

$$\begin{aligned} |S_{1krit.}| &= \frac{\sqrt{2}}{2} F_{1krit.} = 1 \cdot \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}a)^2} \Rightarrow F_{1krit.} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi^2 EI}{a^2} \\ |S_{2krit.}| &= \frac{\sqrt{2}}{2} F_{2krit.} = 1 \cdot \frac{\pi^2 2EI}{(\sqrt{2}a)^2} \Rightarrow F_{2krit.} = \sqrt{2} \frac{\pi^2 EI}{a^2} \\ |S_{3krit.}| &= \frac{1}{2} F_{3krit.} = 2.04 \cdot \frac{\pi^2 EI}{(2a)^2} \Rightarrow F_{3krit.} = 1.02 \frac{\pi^2 EI}{a^2} \end{aligned}$$

$F_{1krit.} < F_{3krit.} < F_{2krit.}$. Damit ist die kritische Last $F_{1krit.}$ (Stab AB) für das Versagen des Systems massgebend.

21.4 Verständnisfragen

1. Was versteht man unter dem Begriff Knickung und was bedeutet die kritische Knicklast?
2. Wie lautet die Formel für die kritische Knicklast nach Euler und was versteht man unter Knick-sicherheit?
3. Skizziere das Knicken eines Stabes für fünf verschiedene Lagerungen und gib den entsprechenden Faktor k an!
4. Was versteht man unter einem Verzweigungsproblem?
5. Warum ist die kritische Knicklast für einen eingespannt-eingespannten Balken grösser als für einen gelenkig-gelenkig gelagerten Balken?
6. Wie ändert sich die kritische Knicklast, falls die Balkenlänge bei denselben Randbedingungen verdoppelt wird?

Anhang A

Einführung in die Vektoralgebra im \mathbb{R}^3

A.1 Skalare und Vektoren

Größen, deren Werte reelle Zahlen sind, werden *Skalare* genannt. Beispiele sind Masse, Temperatur usw.

Im Unterschied dazu werden Größen, zu deren vollständiger Charakterisierung sowohl eine Masszahl als auch eine Richtung erforderlich sind, *Vektoren* genannt. Beispiele sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Rotationsgeschwindigkeit usw.

Gebundene Vektoren haben einen *Angriffspunkt* an den sie gebunden sind. *Linienflüchtige Vektoren* haben eine *Wirkungslinie*, auf welcher sie frei verschiebbar sind. *Freie Vektoren* sind parallel zu sich selbst frei verschiebbar. Einen Vektor $\underline{\mathbf{a}}$ kann man mit den kartesischen

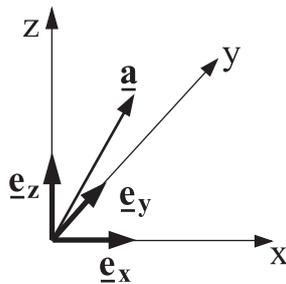


Abbildung A.1: Vektor und Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

Koordinaten in folgender Weise bestimmen (Abb. A.1):

$$\underline{\mathbf{a}} = a_x \underline{\mathbf{e}}_x + a_y \underline{\mathbf{e}}_y + a_z \underline{\mathbf{e}}_z, \quad (\text{A.1})$$

wobei $\underline{\mathbf{e}}_x$, $\underline{\mathbf{e}}_y$ und $\underline{\mathbf{e}}_z$ die Grundvektoren (Einheitsvektoren) des Koordinatensystems xyz , und a_x , a_y und a_z die Komponenten des Vektors sind:

$$a_x = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_x, \quad a_y = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_y, \quad a_z = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_z. \quad (\text{A.2})$$

Die Länge oder Norm des Vektors ist mit der Gleichung definiert:

$$|\underline{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ ist durch folgende Gleichung definiert:

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}} = (\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}) = |\underline{\mathbf{a}}| |\underline{\mathbf{b}}| \cos \varphi, \quad (\text{A.4})$$

wobei φ der zwischen $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ eingeschlossene Winkel ist (Abb.A.2). Das Skalarprodukt

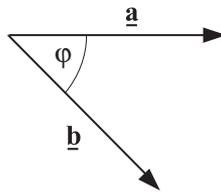


Abbildung A.2: Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$

ergibt einen *Skalar*. Das Skalarprodukt kann als Projektion verstanden werden: wählt man den Vektor $\underline{\mathbf{a}}$ bzw. $\underline{\mathbf{b}}$ als *Einheitsvektor*, entspricht das Skalarprodukt der Grösse der Komponente des Vektors $\underline{\mathbf{b}}$ (bzw. $\underline{\mathbf{a}}$) in die Richtung des Vektors $\underline{\mathbf{a}}$ (bzw. $\underline{\mathbf{b}}$).

Die Eigenschaften des Skalarproduktes sind:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} &= \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{a}}, & \underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}}) &= \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}}, \\ (\alpha \underline{\mathbf{a}}) \cdot \underline{\mathbf{b}} &= \alpha (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}), & \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{a}} &= |\underline{\mathbf{a}}|^2 = \underline{\mathbf{a}}^2 \geq 0, \\ |\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}| &\leq |\underline{\mathbf{a}}| |\underline{\mathbf{b}}|, & \cos \varphi &= \frac{\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}}}{\sqrt{\underline{\mathbf{a}}^2 \underline{\mathbf{b}}^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren $\underline{\mathbf{e}}_x, \underline{\mathbf{e}}_y, \underline{\mathbf{e}}_z$ ergibt:

$$\underline{\mathbf{e}}_x \cdot \underline{\mathbf{e}}_x = \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \underline{\mathbf{e}}_y = \underline{\mathbf{e}}_z \cdot \underline{\mathbf{e}}_z = 1, \quad \underline{\mathbf{e}}_x \cdot \underline{\mathbf{e}}_y = \underline{\mathbf{e}}_y \cdot \underline{\mathbf{e}}_z = \underline{\mathbf{e}}_z \cdot \underline{\mathbf{e}}_x = 0, \quad (\text{A.6})$$

also ergibt das Skalarprodukt von $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$:

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = (a_x \underline{\mathbf{e}}_x + a_y \underline{\mathbf{e}}_y + a_z \underline{\mathbf{e}}_z) \cdot (b_x \underline{\mathbf{e}}_x + b_y \underline{\mathbf{e}}_y + b_z \underline{\mathbf{e}}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.7})$$

Das *Vektorprodukt* oder *Kreuzprodukt* zweier Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ ergibt einen *Vektor* $\underline{\mathbf{c}}$:

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = [\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}] = [\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{b}}], \quad (\text{A.8})$$

der auf $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ senkrecht steht (Abb. A.3). $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$ bilden ein *Rechtssystem* (sie haben die gleiche Orientierung wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand). Die Länge des Vektors $\underline{\mathbf{c}}$ ist:

$$|\underline{\mathbf{c}}| = |\underline{\mathbf{a}}| |\underline{\mathbf{b}}| \sin \varphi, \quad (\text{A.9})$$

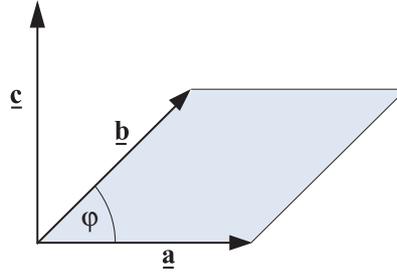


Abbildung A.3: Vektoren \underline{a} , \underline{b} und \underline{c}

was zahlenmässig der graue Fläche in Abb.A.3 entspricht.

Die Eigenschaften des Vektorprodukts sind:

$$\begin{aligned}
 \underline{a} \times \underline{b} &= -(\underline{b} \times \underline{a}), & \underline{a} \times \underline{a} &= 0, \\
 \underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) &= \underline{b} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0, & (\alpha \underline{a}) \times \underline{b} &= \alpha (\underline{a} \times \underline{b}), \\
 \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) &= \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c},
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

und das Vektorprodukt der Einheitsvektoren $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 \underline{e}_x \times \underline{e}_x &= \underline{e}_y \times \underline{e}_y = \underline{e}_z \times \underline{e}_z = 0, \\
 \underline{e}_x \times \underline{e}_y &= \underline{e}_z, \quad \underline{e}_y \times \underline{e}_z = \underline{e}_x, \quad \underline{e}_z \times \underline{e}_x = \underline{e}_y.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Das Vektorprodukt von \underline{a} und \underline{b} mit den kartesischen Koordinaten ausgedrückt ist:

$$\begin{aligned}
 \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & a_x & b_x \\ \underline{e}_y & a_y & b_y \\ \underline{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \underline{e}_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + \underline{e}_y \begin{vmatrix} a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} + \underline{e}_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \\
 &= \underline{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \underline{e}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \underline{e}_z (a_x b_y - a_y b_x) = \\
 &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Das doppelte Vektorprodukt:

$$\underline{d} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b}), \tag{A.13}$$

ergibt einen neuen, zu \underline{b} und \underline{c} komplanaren Vektor \underline{d} . Für das gemischte Produkt gilt:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}). \tag{A.14}$$

Das Resultat ist ein Skalar, der zahlenmässig gleich dem Volumen des von den drei Vektoren gebildeten Parallelepipeds ist, und das Ergebnis ist positiv, wenn die Vektoren ein Rechtssystem bilden, negativ im entgegengesetzten Falle.

A.3 Beispiele aus der Kinematik

In diesem Kapitel werden zwei Beispiele aus der Kinematik vorgelöst um die Rechnung mit Skalaren und Vektoren zu demonstrieren.

A.3.1 Ebene Bewegung

Ein Rad rollt auf der xz -Ebene (Abb. A.4). Der Mittelpunkt des Rades hat die Geschwindigkeit \underline{v}_M .

Bestimme die Rotationsgeschwindigkeit des Rades und die Geschwindigkeit in $A(-R/2; R/2; 0)$!

Die Aufgabe kann mit Vektoren oder mit Skalaren gelöst werden. Zuerst werden wir die vektorielle Darstellung benutzen. In diesem Fall muss man darauf achten, dass die Vektoren mit drei Komponenten dargestellt werden müssen, obwohl es sich um ein ebenes Problem handelt. Der Grund ist, dass der Rotationsgeschwindigkeitsvektor senkrecht zu der Ebene steht.

Der Punkt M hat die Geschwindigkeit:

$$\underline{v}_M = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

und die Rotationsgeschwindigkeit ist:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Der Punkt C ist der Berührungspunkt zwischen der Ebene und dem Rad und befindet sich

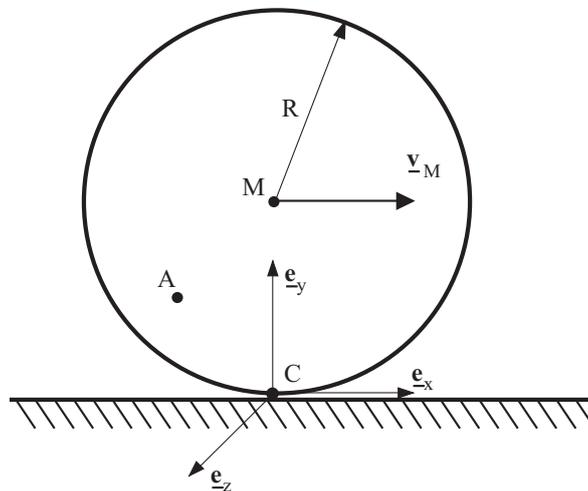


Abbildung A.4: Rad auf der xz -Ebene

deshalb in Ruhe (Geschwindigkeit ist null!). Dieser Punkt ist also das Momentanzentrum der Bewegung. Die Geschwindigkeit in M ist:

$$\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{r}_{CM}, \quad (\text{A.17})$$

wobei $\underline{\mathbf{r}}_{CM}$ der Ortsvektor von C nach M ist:

$$\underline{\mathbf{r}}_{CM} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

(A.15) und (A.16) in (A.17) einsetzen:

$$\begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

und daraus folgt, dass $\omega = -\frac{v}{R}$, und:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{R} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_{CA}$ ist:

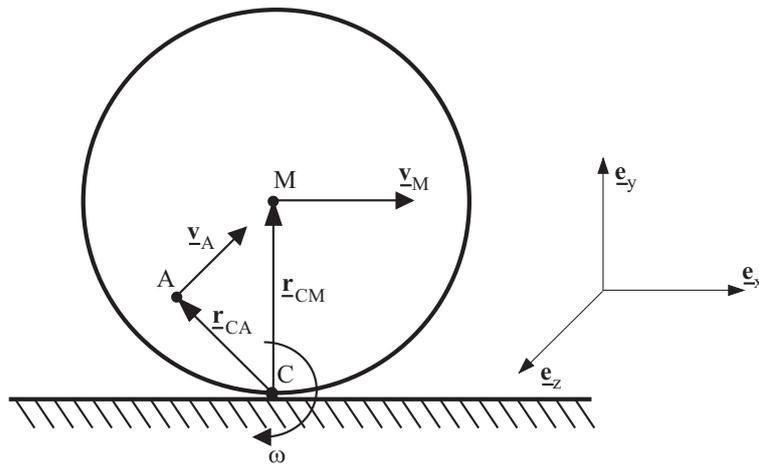


Abbildung A.5: Rad auf der xz -Ebene

$$\underline{\mathbf{r}}_{CA} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

also die Geschwindigkeit in A ist:

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{CA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \frac{R}{2} \\ -\omega \frac{R}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Die Aufgabe kann auch mit Skalaren gelöst werden. Die Länge des Geschwindigkeitsvektors ist:

$$|\underline{\mathbf{v}}_M| = v, \quad (\text{A.23})$$

und der senkrechte Abstand zwischen C und M ist in diesem Fall die Länge des Ortsvektors $\underline{\mathbf{r}}_{CM}$:

$$|\underline{\mathbf{r}}_{CM}| = R, \quad (\text{A.24})$$

also ist die Rotationsgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{R}$. Die Richtung der Rotationsgeschwindigkeit muss man aus der Anschauung heraus bestimmen (Abb. A.5). Im verwendeten Koordinatensystem (Rechtssystem) ist die Rotationsgeschwindigkeit negativ, da sie gegenüber der z -Achse im Uhrzeigersinn dreht. Die vektorielle Darstellung ist daher:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{R} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Die Geschwindigkeit in A kann man bestimmen als Produkt von Rotationsgeschwindigkeit und senkrechtem Abstand von C zu der Wirkungslinie von $\underline{\mathbf{v}}_A$ (in diesem Fall $|\underline{\mathbf{r}}_{CA}| = \sqrt{2}\frac{R}{2}$):

$$v_A = \sqrt{2}\frac{R}{2}\frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}v. \quad (\text{A.26})$$

Die Richtung und das Vorzeichen muss man aus der Anschauung bestimmen (Abb. A.5). Man kann die Geschwindigkeit in x und in y -Komponenten zerlegen (z.B. mit \sin und \cos Funktionen) und vektoriell darstellen:

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ v_A \\ \sin 45^\circ v_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

A.3.2 Bewegung im Raum

Der Bewegungszustand eines starren Würfels (Kantenlänge a) ist durch die Kinematik:

$$\underline{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

gegeben. Bestimme die Geschwindigkeit in A !

Diese Aufgabe lässt sich skalar nur sehr schwer lösen, weil die Zentralachse sowie die senkrechten Abstände im Raum bestimmt werden müssen. Räumliche Aufgaben sollten immer mit Vektoren gelöst werden!

Die gesuchte Geschwindigkeit kann mit der folgenden Formel bestimmt werden:

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_O + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_{OA}, \quad (\text{A.29})$$

wobei $\underline{\mathbf{r}}_{OA}$ folgender Ortsvektor ist:

$$\underline{\mathbf{r}}_{OA} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

also:

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_O + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + 0 \\ v + \omega a \\ v - \omega a \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

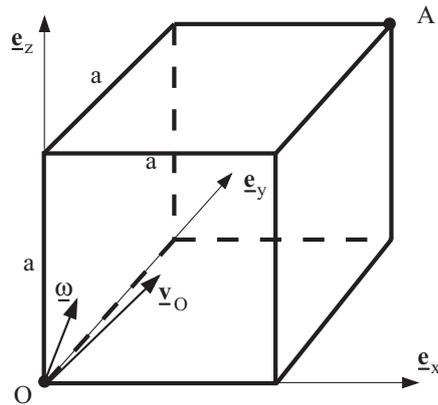


Abbildung A.6: Würfel

A.4 Aufgaben

- a) Bestimme α , wenn $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ senkrecht zueinander stehen!
 $\underline{\mathbf{a}} = [2 \ \alpha \ 1]^T$, $\underline{\mathbf{b}} = [4 \ -2 \ -2]^T$.
- b) Projiziere den Vektor $\underline{\mathbf{a}}$ auf den Vektor $\underline{\mathbf{b}}$! Bestimme den Winkel zwischen $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$!
 $\underline{\mathbf{a}} = [1 \ -2 \ 1]^T$, $\underline{\mathbf{b}} = [4 \ -4 \ 7]^T$.
- c) Die Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ sind von Null verschieden und $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{0}}$. Zeige, dass $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ parallel sind!
- d) Finde $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}}$ und $(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) \times (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}})$!
 $\underline{\mathbf{a}} = [2 \ -3 \ -1]^T$, $\underline{\mathbf{b}} = [1 \ 4 \ -2]^T$.
- e) Finde $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}}$ und $\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}})$!
 $\underline{\mathbf{a}} = [3 \ -1 \ 2]^T$, $\underline{\mathbf{b}} = [2 \ 1 \ -1]^T$, $\underline{\mathbf{c}} = [1 \ -2 \ 2]^T$.
- f) Bestimme einen Einheitsvektor senkrecht auf die Ebene von $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$!
 $\underline{\mathbf{a}} = [2 \ -6 \ 3]^T$, $\underline{\mathbf{b}} = [4 \ 3 \ -1]^T$.
- g) Finde die Gleichung der Ebene, die durch drei Punkte gegeben ist!
 $P_1 = [2 \ -1 \ 1]^T$, $P_2 = [3 \ 2 \ 1]^T$, $P_3 = [-1 \ 3 \ 2]^T$.
- h) Beweise die Gleichungen (A.13) und (A.14)!

A.5 Resultate der Aufgaben

- a) $\alpha = 3$
- b) $\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_b = \frac{19}{9}$, $\varphi = \arccos \frac{19}{9\sqrt{6}}$
- c) $\varphi = k\pi$

d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [10 \ 3 \ 11]^T$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = [-10 \ -3 \ -11]^T$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = [-20 \ -6 \ -22]^T$

e) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = [24 \ 7 \ -5]^T$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [15 \ 15 \ -15]^T$

f) $\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{1105}} [-3 \ 14 \ 30]^T$

g) $3x - y + 13z = 20$

Anhang B

Geraden- und Ebenengleichungen

B.1 Darstellungsformen einer Funktion

B.1.1 Analytische Darstellung

Die analytische Darstellung einer Funktion ist eine:

- *implizite Gleichung*, wobei die Variablen gemischt sind, ($f(x, y) = 0$),
- *explizite Gleichung*, wobei die Gleichung nach einer Variable aufgelöst ist, ($y = f(x)$).

Beispiel

Die analytische Gleichung eines Kreises (mit Radius R um den Punkt (x_0, y_0)) ist (implizite Darstellung):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (\text{B.1})$$

oder (explizite Darstellung):

$$y = \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0. \quad (\text{B.2})$$

B.1.2 Parametrische Darstellung

Die Koordinaten einer Funktion können auch voneinander getrennt, in Funktion eines Parameters dargestellt werden. Als Parameter kann z.B. die Zeit (t) oder ein Winkel (φ) dienen.

Beispiel

Die parametrische Gleichung eines Kreises ist (Winkel φ als Parameter):

$$x(\varphi) = x_0 + R \cos \varphi, \quad y(\varphi) = y_0 + R \sin \varphi. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Gleichungen für die Gerade im Raum

Eine anschauliche Beschreibung der Geraden kann in folgender Weise gegeben werden: die Gerade ist die Spur eines Punktes, der sich in einer Ebene ohne Richtungsänderung bewegt, also zwischen zwei Punkten auf dem kürzesten Verbindungsweg läuft.

Eine Gerade im Raum kann auf mehrfache Weise dargestellt werden. In diesem Kapitel werden die folgenden Darstellungen behandelt :

- als Schnitt zweier Ebenen,
- durch einen Punkt, plus einen Richtungsvektor,
- durch zwei Punkte.

B.2.1 Allgemeiner Fall

Eine Gerade ist immer darstellbar als Schnitt zweier Ebenen, also analytisch als System mit zwei linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{B.4}$$

B.2.2 Gleichung einer Geraden durch einen Punkt und parallel zum Richtungsvektor

Eine Gerade kann eindeutig bestimmt werden durch einen Punkt und die Richtung der Geraden. Es sei der Punkt P_1 mit dem Ortsvektor \underline{r}_{OP_1} und ein Richtungsvektor \underline{k} (mit $|\underline{k}| = 1$) gegeben (Abb.B.1). Der Punkt P ist ein von P_1 unterschiedlicher beliebiger Punkt der Geraden. Wir möchten den Ortsvektor \underline{r}_{OP} dieses Punktes bestimmen (wenn wir den Ortsvektor

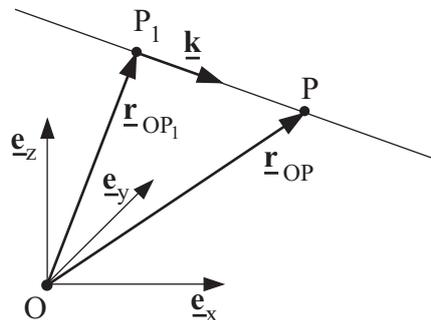


Abbildung B.1: Gerade im kartesischen Koordinatensystem, P_1 ist ein gegebener Punkt der Geraden, \underline{k} ist der gegebene Richtungsvektor der Geraden und P ist ein allgemeiner Punkt auf der Geraden.

eines allgemeinen Punktes kennen, ist die Gerade eindeutig bestimmt). Der Vektor von P_1 nach P ist $\lambda \underline{k}$ (Abb.B.1), wobei λ ein reeller Parameter ist, dessen Absolutwert dem Abstand zwischen der beiden Punkten entspricht. Der Ortsvektor des Punktes P ist die Summe von \underline{r}_{OP_1} und $\lambda \underline{k}$. Die Gleichung der Geraden ist also:

$$\underline{r}_{OP} = \underline{r}_{OP_1} + \lambda \underline{k}, \tag{B.5}$$

oder in Komponentenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \\ z_{P_1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}. \tag{B.6}$$

Die Gleichungen (B.5) und (B.6) sind parametrische Darstellungen der Geraden, wobei der Parameter $|\lambda|$ dem Abstand zwischen dem bekannten Punkt P_1 und einem beliebigen Punkt P entspricht, falls $|\underline{\mathbf{k}}| = 1$.

B.2.3 Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

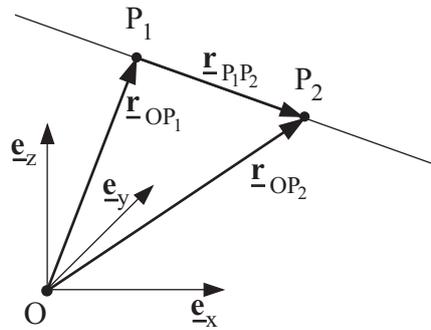


Abbildung B.2: Gerade im kartesischen Koordinatensystem, P_1 und P_2 sind gegebene Punkte der Geraden.

Wenn zwei Punkte einer Geraden bekannt sind, kann man ein ähnliches Verfahren verwenden (Abb.B.2). In diesem Fall wird der Richtungsvektor $\underline{\mathbf{k}}$ aus $\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2}$ durch Normierung bestimmt:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2} &= \underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}, \\ \underline{\mathbf{k}} &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2}|} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|},\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

eingesetzt in (B.5) ergibt:

$$\underline{\mathbf{r}}_{OP} = \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \lambda \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2}|} = \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \lambda \underline{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.8})$$

oder in Komponentenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \\ z_{P_1} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1P_2}|} \begin{bmatrix} x_{P_2} - x_{P_1} \\ y_{P_2} - y_{P_1} \\ z_{P_2} - z_{P_1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Die Gleichungen (B.5) und (B.8) sind parametrische Darstellungen der Geraden im Raum.

B.3 Gleichungen einer Ebene

Man betrachte die lineare Gleichung:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (\text{B.10})$$

Diese Gleichung kann z.B. nach z aufgelöst werden:

$$z = -\frac{(Ax + By + D)}{C}, \quad (\text{B.11})$$

d.h. für alle xy -Koordinatenpaare (die der xy -Ebene entsprechen) ergibt sich eine z -Koordinate. Die Beziehung ist linear, also handelt es sich bei Gl. (B.10) um eine *Ebene* (eine Ebene ist analytisch darstellbar als eine lineare Gleichung).

Weitere Möglichkeiten der Ebenendarstellung (die wir in diesem Kapitel betrachten), sind:

- durch einen Punkt und parallel zu zwei Geraden,
- durch drei Punkte,
- durch einen Punkt und senkrecht zu einer Geraden.

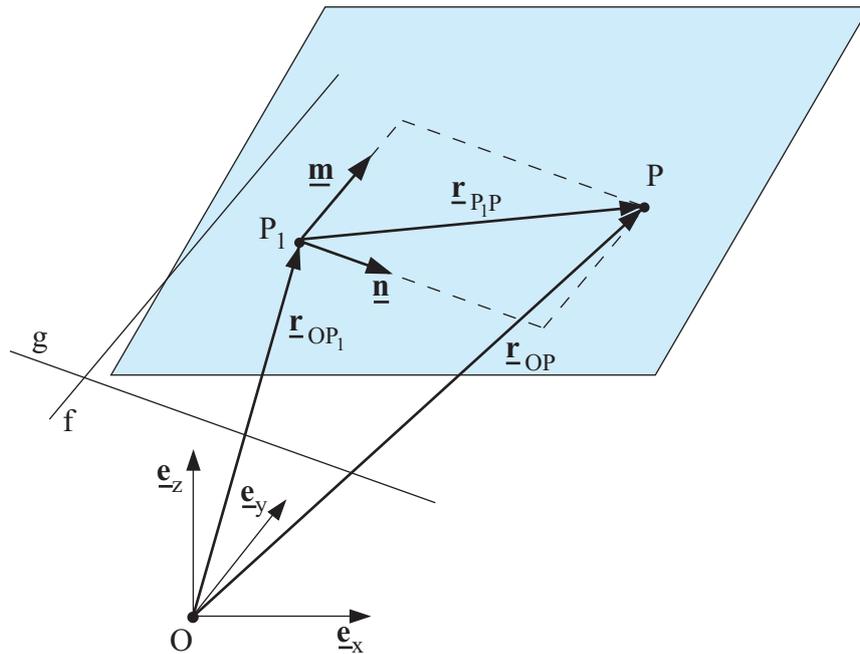


Abbildung B.3: Ebene im kartesischen Koordinatensystem, P_1 ist der gegebene Punkt der Ebene, f und g sind gegebene Geraden parallel zur Ebene.

B.3.1 Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und parallel zu zwei Geraden

Die zwei Geraden f und g sind mit den Richtungsvektoren $\underline{\mathbf{m}}$ und $\underline{\mathbf{n}}$ gegeben (mit $|\underline{\mathbf{m}}| = 1$, und $|\underline{\mathbf{n}}| = 1$). Der gegebene Punkt ist P_1 (Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}_{OP_1}$). Gesucht ist der Ortsvektor des allgemeinen Punktes P ($\underline{\mathbf{r}}_{OP}$).

Der Vektor von P_1 nach P ($\underline{\mathbf{r}}_{P_1P}$) ist (Abb. B.3):

$$\underline{\mathbf{r}}_{P_1P} = \lambda \underline{\mathbf{m}} + \mu \underline{\mathbf{n}}, \quad (\text{B.12})$$

wobei λ und μ reelle Parameter sind (deren Absolutwerte den projizierten Abständen der beiden Punkte P_1 und P auf die Geraden f und g entsprechen (Abb.B.3), falls $|\underline{\mathbf{m}}| = 1$ und $|\underline{\mathbf{n}}| = 1$). Der gesuchte Ortsvektor ist:

$$\underline{\mathbf{r}}_{OP} = \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \underline{\mathbf{r}}_{P_1P} = \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \lambda \underline{\mathbf{m}} + \mu \underline{\mathbf{n}}, \quad (\text{B.13})$$

oder in Komponentenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \\ z_{P_1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Die Gl.(B.13) und (B.14) sind parametrische Darstellungen der Ebene. Falls eine Gerade (f) mit Richtungsvektor ($\underline{\mathbf{m}}$) und zwei Punkte (P_1, P_2) der Ebene gegeben sind, könnte diese Methode auch verwendet werden. Der zweite Richtungsvektor wird aus den Punkten P_1 und P_2 bestimmt, wobei mindestens einer der zwei Punkte ($(P_1), (P_2)$) nicht auf f liegen darf:

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_2}|} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|}. \quad (\text{B.15})$$

B.3.2 Gleichung einer Ebene durch drei Punkte

Aus drei gegebenen Punkten (P_1, P_2, P_3), die nicht auf einer Geraden liegen, können die zwei Richtungsvektoren bestimmt werden, so dass man wieder den ersten Fall erhält (Abb.B.4):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{m}} &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_3}}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_3}|} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_3} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_3} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|}, \\ \underline{\mathbf{n}} &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_2}}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_2}|} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}_{OP} &= \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \underline{\mathbf{r}}_{P_1 P} = \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \lambda \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_3} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_3} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|} + \mu \frac{\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}}{|\underline{\mathbf{r}}_{OP_2} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}|} = \\ &= \underline{\mathbf{r}}_{OP_1} + \lambda \underline{\mathbf{m}} + \mu \underline{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

In Komponentenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_1} \\ y_{P_1} \\ z_{P_1} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_3}|} \begin{bmatrix} x_{P_3} - x_{P_1} \\ y_{P_3} - y_{P_1} \\ z_{P_3} - z_{P_1} \end{bmatrix} + \frac{\mu}{|\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P_2}|} \begin{bmatrix} x_{P_2} - x_{P_1} \\ y_{P_2} - y_{P_1} \\ z_{P_2} - z_{P_1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Die Gleichungen (B.13) und (B.18) sind parametrische Darstellungen der Ebene.

B.3.3 Gleichung einer Ebene durch einen Punkt und senkrecht zu einer Geraden

Ein Punkt (P_1) der Ebene und eine Gerade mit dem Richtungsvektor ($\underline{\mathbf{n}}$) sind gegeben. Die Ebene steht senkrecht zu dieser Gerade. Aus dieser Bedingung folgt, dass das Skalarprodukt der Vektoren $\underline{\mathbf{n}}$ und $\underline{\mathbf{r}}_{P_1 P}$ (Abb.B.5) verschwindet:

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{P_1 P} = \underline{\mathbf{n}} (\underline{\mathbf{r}}_{OP} - \underline{\mathbf{r}}_{OP_1}) = 0, \quad (\text{B.19})$$

oder:

$$n_x (x - x_1) + n_y (y - y_1) + n_z (z - z_1) = 0. \quad (\text{B.20})$$

Diese Gleichungen sind analytische Darstellungen der Ebene (vergleiche mit Gl.(B.10), wobei: $A = n_x, B = n_y, C = n_z$ und $D = -n_x x_1 - n_y y_1 - n_z z_1$).

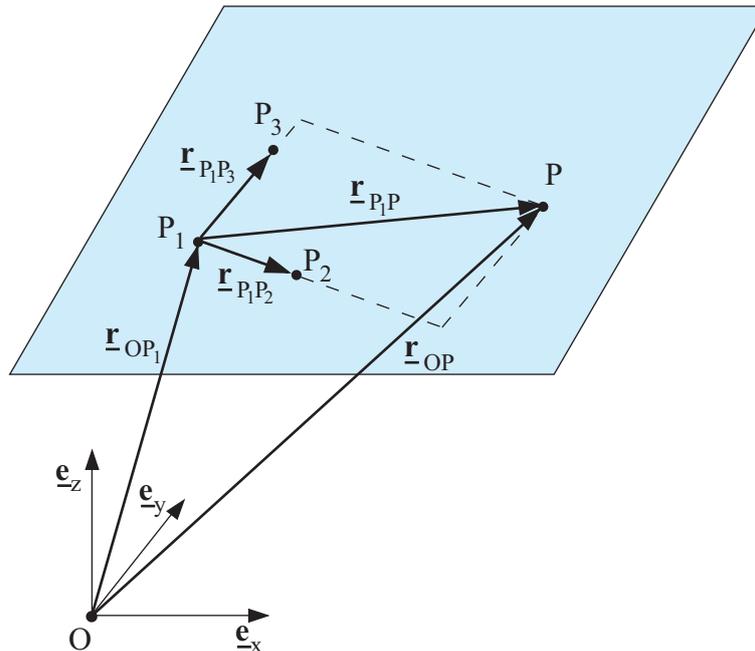


Abbildung B.4: Ebene im kartesischen Koordinatensystem, P_1, P_2, P_3 sind gegebene Punkte der Ebene.

B.4 Beispiel aus der Mechanik

Die Geradengleichungen werden zur Darstellung der Zentral- und Rotationsachse verwendet, welche in der Kinematik eine wichtige Rolle spielen.

B.4.1 Bestimmung der Zentralachse

Man betrachte die Aufgabe mit dem Würfel in *Einführung in die Vektoralgebra im \mathbb{R}^3* . Die Kinemate ist:

$$\underline{\mathbf{v}}_O = \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Bestimme die Zentralachse!

Der Bewegungszustand des Würfels ist eindeutig bestimmt. Zuerst muss die Geschwindigkeit parallel zum Vektor der Rotationsgeschwindigkeit bestimmt werden. Man bestimmt den Einheitsvektor:

$$\mathbf{e}_\omega = \frac{\underline{\boldsymbol{\omega}}}{|\underline{\boldsymbol{\omega}}|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.22})$$

und projiziert die Geschwindigkeit auf diese Richtung (das Skalarprodukt mit einem Einheits-

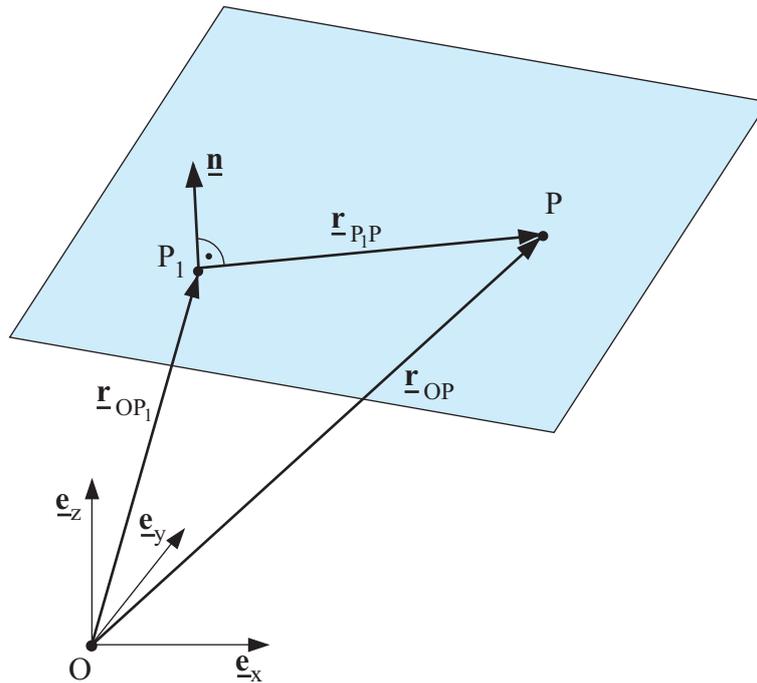


Abbildung B.5: Ebene im kartesischen Koordinatensystem, P_1 ist ein gegebener Punkt der Ebene und \underline{n} steht senkrecht auf der Ebene.

vektor entspricht der Projektion):

$$v_\omega = \underline{e}_\omega \cdot \underline{v}_O = \frac{2v}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.23})$$

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich:

$$\underline{v}_\omega = v_\omega \underline{e}_\omega = \frac{2v}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Sei P ein Punkt der Zentralachse mit den Koordinaten (x, y, z) . Die Geschwindigkeit des Punktes ist \underline{v}_ω (Definition der Zentralachse!). Man hat die folgende Beziehung:

$$\underline{v}_\omega = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times \underline{r}_{OP}, \quad (\text{B.25})$$

wobei die Geschwindigkeiten und die Rotationsgeschwindigkeit bekannt sind. Gesucht sind die Koordinaten (x, y, z) des Punktes. Für den Ortsvektor des Punktes gilt:

$$\underline{r}_{OP} = \underline{r}_P - \underline{r}_O = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

Die Vektorgleichung lautet:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega z - \omega y \\ \omega x \\ -\omega x \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

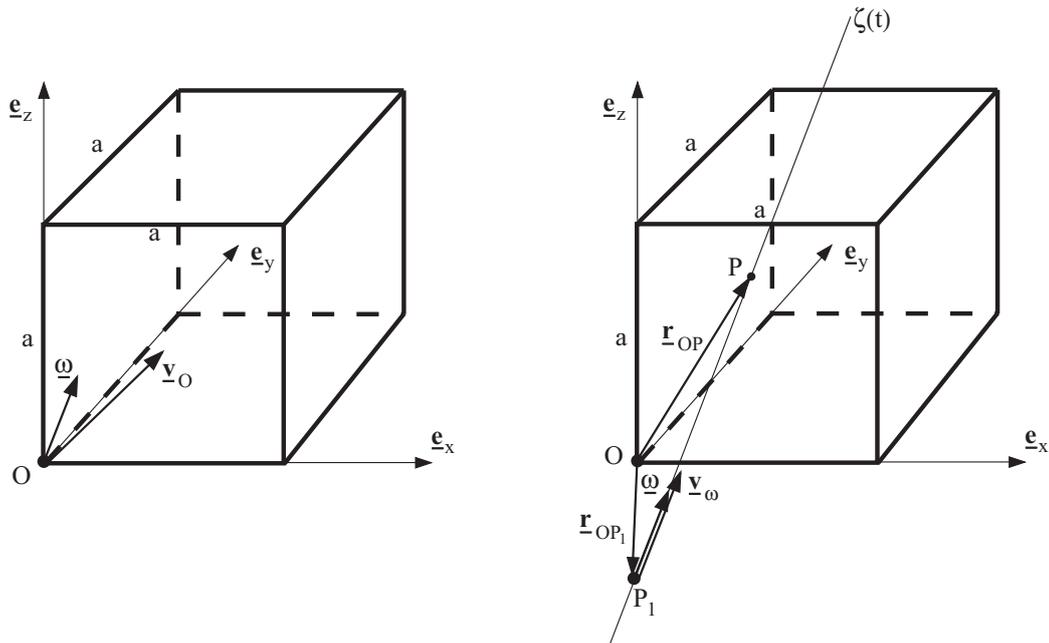


Abbildung B.6: Würfel und Zentralachse

Diese Gleichungen können nach x, y, z aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} z - y + \frac{v}{\omega} &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned} \tag{B.28}$$

Es existieren mehrere Lösungen, welche alle zu Punkten auf der Zentralachse (Abb. B.6) gehören. Gl. (B.28) sind die analytischen Gleichungen der Zentralachse. Man kann einen Punkt auf der Achse wählen (d.h. eine Koordinate):

$$y = 0 \Rightarrow z = -\frac{v}{\omega}, \Rightarrow P_1 \left(0, 0, -\frac{v}{\omega} \right), \tag{B.29}$$

und die Gleichung in parametrischer Form aufstellen (siehe Unterabschnitt *Gleichung einer Geraden durch einen Punkt und parallel zum Richtungsvektor*):

$$\zeta(\lambda) = \mathbf{r}_{OP_1} + \lambda \mathbf{e}_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{v}{\omega} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{B.30}$$

Anhang C

Lineare Algebra

C.1 Matrizen

C.1.1 Definition einer reellen Matrix

Unter einer reellen *Matrix* $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ (m, n) versteht man $m \cdot n$ Zahlen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1. \text{ Zeile} \\ \leftarrow 2. \text{ Zeile} \\ \vdots \\ \leftarrow i - te \text{ Zeile} \\ \vdots \\ \leftarrow m - te \text{ Zeile} \end{array}$$

$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 1. & 2. & \dots & k - te & \dots & n - te & \text{Spalte.} \end{array}$

Gebäuchliche Schreibweisen für eine Matrix sind:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{(m,n)}. \quad (\text{C.1})$$

Eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ (m, n) heisst quadratisch, falls $m = n$, sonst ist die Matrix rechteckig.

C.1.2 Transponierte einer Matrix

Aus der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ (m, n) entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten die transponierte Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ vom Typ (n, m) :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

C.2 Rechenoperationen für Matrizen

C.2.1 Addition und Subtraktion

Um zwei Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ addieren oder subtrahieren zu können, müssen sie vom gleichen Typ (m, n) sein.

Die Summe von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}, \quad (\text{C.3})$$

also:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

Die Differenz ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}}, \quad (\text{C.5})$$

mit:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}$,

Assoziativgesetz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}}$.

C.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ wird mit einem Skalar (λ) elementweise multipliziert:

$$\lambda \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda (a_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Rechengesetze:

Assoziativgesetz: $\lambda (\mu \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = (\lambda \mu) \underline{\underline{\mathbf{A}}}$,

Distributivgesetze: $(\lambda + \mu) \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \mu \underline{\underline{\mathbf{A}}}$,

$\lambda (\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \lambda \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \lambda \underline{\underline{\mathbf{B}}}$.

C.2.3 Multiplikation von Matrizen

Das Produkt zweier Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ kann man nur bilden, wenn die Spaltenzahl der linken Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ gleich der Zeilenzahl der rechten Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ ist. Wenn die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ (m, n) ist, dann muss die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ vom Typ (n, p) sein. Das Produkt ist eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ vom Typ (m, p) :

$$\begin{array}{ccc}
 & & k\text{-ter Spaltenvektor} \\
 & & \downarrow \\
 & & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 & & \text{Matrix } \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\
 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ i\text{-ter} \\ \text{Zeilenvektor} \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \downarrow & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \longrightarrow & & c_{ik} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \\
 & \text{Matrix } \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \text{Matrix } \underline{\underline{\mathbf{C}}}
 \end{array} \quad (\text{C.8})$$

Das Element c_{ik} ist gleich dem Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und der k -ten Spalte der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}. \quad (\text{C.9})$$

Rechengesetze:

Assoziativgesetz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} (\underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}$,

Distributivgesetz: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} (\underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}$,

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}$$

Weitere Gesetze: $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}})^T = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$.

C.3 Inverse einer Matrix

C.3.1 Determinanten

Unter *Determinanten* versteht man reelle oder komplexe Zahlen, die eindeutig *quadratischen* Matrizen zugeordnet werden.

Die Determinante einer 2-reihigen, quadratischen Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ist:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \quad (\text{C.10})$$

Weitere Schreibweisen für die Determinante sind:

$$D = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Gemäss Laplaceschem Entwicklungssatz lässt sich die Determinante für eine Matrix vom Typ (n, n) wie folgt berechnen:

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad (\text{C.12})$$

wobei die Zeile i fest ist, es wird nach den Elementen der i -ten Zeile entwickelt. A_{ik} (*Adjunkte*) bedeutet die mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+k}$ multiplizierte *Unterdeterminante* des Elements a_{ik} (man kann auch k festhalten und nach i summieren, dann wird nach den Elementen der k -ten Spalte entwickelt). Die Unterdeterminante ist die Determinante einer Matrix vom Typ $(n-1, n-1)$, die man durch Eliminierung der i -ten Zeile und k -ter Spalte erhält.

Die Determinante einer Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ $(4, 4)$, entwickelt nach den Elementen der 3. Spalte ist:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{4+3} a_{43} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Man muss vier Unterdeterminanten vom Typ $(3, 3)$ bestimmen. Die erste davon entwickelt nach Elementen der ersten Zeile ist:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = \\ &a_{21} (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42}) - a_{22} (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41}) + a_{24} (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

C.3.2 Rang einer Matrix

In einer Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ist die grösste Anzahl r der linear unabhängigen Spaltenvektoren stets gleich der grössten Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Die Zahl r heisst *Rang* der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

$$\text{Rg}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = r. \quad (\text{C.15})$$

Wenn eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ rechteckig (vom Typ (m, n)) ist, gilt für ihren Rang:

$$\text{Rg}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = r \leq \min(m, n), \quad (\text{C.16})$$

wenn eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ quadratisch (vom Typ (n, n)) ist und ihre Determinante von Null verschieden ist, gilt für ihren Rang:

$$\text{Rg}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = r = n, \quad (\text{C.17})$$

und die Matrix heisst *regulär*. Anderenfalls ($r < n$) ist die Matrix *singulär*.

C.3.3 Inverse Matrix

Für eine reguläre Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ existiert eine inverse Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$, so dass:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}. \quad (\text{C.18})$$

Das Produkt der Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ ist die Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Mit der Determinante und den algebraischen Komplementen einer Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ lässt sich die inverse Matrix berechnen:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \quad (\text{C.20})$$

wobei A_{ik} das algebraische Komplement:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} \quad (\text{C.21})$$

und D_{ik} die $(n-1)$ -reihige Unterdeterminante von $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ist (in der Determinante $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}$ wird die i -te Zeile und k -te Spalte gestrichen).

Die Inverse einer Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ $(2, 2)$:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.22})$$

ist gegeben durch:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.23})$$

C.4 Eigenwertproblem

Man betrachte das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

oder kurz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}. \quad (\text{C.25})$$

Im Spezialfall ist der Vektor $\underline{\mathbf{b}}$ eine lineare Kombination des unbekanntes Vektors $\underline{\mathbf{x}}$:

$$\underline{\mathbf{b}} = \lambda \underline{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.26})$$

wobei λ unbekannt ist, in (C.25) eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\mathbf{x}} &= \lambda \underline{\mathbf{x}}, \\ (\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \underline{\mathbf{x}} &= \underline{\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Diese Gleichung stellt ein *Eigenwertproblem* dar.

Das Eigenwertproblem besitzt dann eine nichttriviale Lösung (die triviale Lösung ist $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$), wenn:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0. \quad (\text{C.28})$$

Die Entwicklung der Determinante ergibt eine Gleichung, wobei λ die Unbekannte ist (gesucht sind Werte für λ , für die Gl. (C.28) erfüllt ist).

Ein Beispiel mit einer Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ vom Typ (2, 2) ist:

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Diese Gleichung ist die *charakteristische Gleichung*, auf der linken Seite steht ein Polynom, dessen Ordnung gleich der Zahl n der quadratischen Matrix vom Typ (n, n) (in diesem Fall: $n = 2$) ist. Das Polynom hat n Nullstellen (λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$), die die *Eigenwerte* des Eigenwertproblems darstellen.

Durch Einsetzen der Eigenwerte λ_i in Gl. (C.27), erhält man zugehörige Vektoren $\underline{\mathbf{x}}_i$, die *Eigenvektoren* genannt werden.

C.5 Beispiel aus der Elastizität

Ein ebener Spannungszustand ist durch die folgenden Spannungen gegeben (k Konstante mit Dimension $\frac{N}{mm^2}$):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 4k, & \tau_{xy} &= 2k, \\ \sigma_y &= 7k, & \tau_{xz} &= 0, \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Bestimme die Hauptspannungen und Hauptrichtungen!

Der Spannungstensor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = k \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Für eine beliebige Richtung (für ein Flächenelement), gegeben durch einen Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}$, wird der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}})$ aus dem Spannungstensor berechnet durch:

$$\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}}) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{n}}. \quad (\text{C.32})$$

Wir suchen die Richtung (ein Flächenelement), in der die Schubspannungen verschwinden, also der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{s}}$ parallel zum Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}$ ist:

$$\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{n}}) = \sigma \underline{\mathbf{n}}, \quad (\text{C.33})$$

womit wir folgende Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\mathbf{n}} &= \sigma \underline{\mathbf{n}}, \\ (\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}})\underline{\mathbf{n}} &= \underline{\mathbf{0}}, \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

die einem Eigenwertproblem entsprechen. Bei den Eigenwerten (σ_i) handelt es sich um die *Hauptspannungen*, bei den Eigenvektoren um die *Haupttrichtungen*.

Die Determinante ist:

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \begin{vmatrix} 4k - \sigma & 2k & 0 \\ 2k & 7k - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + 11k\sigma^2 - 24k^2\sigma, \quad (\text{C.35})$$

somit lautet die charakteristische Gleichung:

$$\sigma(-\sigma^2 + 11k\sigma - 24k^2) = 0. \quad (\text{C.36})$$

Die Lösungen dieses Polynoms sind die Hauptspannungen:

$$\sigma_1 = 3k, \quad \sigma_2 = 8k, \quad \sigma_3 = 0. \quad (\text{C.37})$$

Um die Haupttrichtungen zu bestimmen, setzen wir die Hauptspannungen in (C.34) ein:

$$\sigma_1 = 3k : \quad k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_x^1 \\ n_y^1 \\ n_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.38})$$

Es ist ein ebenes Problem in der xy -Ebene, also $n_z^1 = 0$! Die zwei anderen Gleichungen sind linear abhängig, man kann daher eine Komponente beliebig wählen (wenn $\underline{\mathbf{n}}$ ein Eigenvektor ist, ist auch $p\underline{\mathbf{n}}$ ein Eigenvektor, da die Länge keine Rolle spielt). Wir wählen $n_y^1 = 1$, daraus:

$$n_x^1 = -2n_y^1 = -2, \quad (\text{C.39})$$

und:

$$\underline{\mathbf{n}}^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.40})$$

Mit σ_2 :

$$\sigma_2 = 8k : \quad k \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.41})$$

wie vorher, $n_z^2 = 0$. Jetzt wählen wir $n_x^2 = 1$, und erhalten:

$$2n_x^2 = n_y^2 = 2, \quad (\text{C.42})$$

somit gilt für die zweite Hauptrichtung:

$$\underline{\mathbf{n}}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.43})$$

Die dritte Richtung folgt daraus, dass die drei Eigenvektoren orthogonal sind, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander. $\underline{\mathbf{n}}^1$ und $\underline{\mathbf{n}}^2$ liegen in der xy -Ebene, somit handelt es sich bei $\underline{\mathbf{n}}^3$ um die z -Richtung:

$$\underline{\mathbf{n}}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.44})$$

Literaturverzeichnis

- [Bronstein] I. N. Bronstein, K. A. Semendajev, *Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten*, Thun und Frankfurt am Main, 2000.
- [Papula] Lothar Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Viewegs Fachbücher der Technik, 1999.
- [Gross] Dietmar Gross, Walter Schnell, Wolfgang Ehlers, Peter Wriggers, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik, Bd.1, Statik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998(2000).
- [Gross2] Dietmar Gross, Walter Schnell, Wolfgang Ehlers, Peter Wriggers, *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik, Bd.2, Elastostatik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998(2000).
- [Motz] Heinz Dieter Motz, Albert Cronrath, *TM-Übungsbuch*, Harri (1996).
- [Knappstein] Gerhard Knappstein, *Aufgaben zur Festigkeitslehre, ausführlich gelöst*, Harri, 1998.
- [Sayir et al. Band 1] Mahir B. Sayir, Jürg Dual und Stephan Kaufmann *Ingenieurmechanik 1* B.G. Teubner, 2004.
- [Sayir et al. Band 2] Mahir B. Sayir, Jürg Dual und Stephan Kaufmann *Ingenieurmechanik 2* B.G. Teubner, 2004.

Index

- Arbeit, 185
- Arbeitsgleichungen, 187
 - statisch bestimmte Probleme, 187
 - statisch unbestimmte Probleme, 188
- Balkenelement
 - ebene Biegung, 154
 - mit Axialverschiebungen, 156
- Beanspruchung, 79
 - Biegemoment, 79
 - in gekrümmten Balken, 81
 - in geraden Balken, 80
 - Normalkraft, 79
 - Querkraft, 79
 - Torsionsmoment, 79
- Beanspruchungsdiagramme, 80
- Bewegungszustand, 11
 - 1. Invariante, 11
 - 2. Invariante, 11
- Biegelinie, 148
- Biegung
 - schiefe, 163
 - spezielle, 147
- Deformationen, 113
- Deformationsenergie, 186
 - bei Biegung, 186
 - bei Torsion, 187
 - bei Zug und Druck, 186
 - bei zusammengesetzter Beanspruchung, 187
- Dehnmessstreifen, 117
- Dehnung, 113
- Deviationsmoment, 137
- Differentielle Beziehungen, 80
- Dreigelenkbogen, 48
- Dreikräftechnitt, 55
- Dyname, 29
- Ebene Bewegung, 13
- Eigenwertproblem
 - Bestimmung der Hauptspannungen, 109
- Eulersche Knicklast, 203
- Flächenmoment
 - 1. Grades, 168
 - 2. Grades, 137
 - Dreieck-Profil, 140
 - Kreis-Profil, 139
 - Kreisring-Profil, 139
 - Viereck-Profil, 139
 - polares, 175
- Freiheitsgrad, 153
- Geschwindigkeit, 1
- Hauptsatz der Statik, 37
- Hookesche Gesetz, 124
- Ideale Fachwerke, 53
- Kinematik, 11
- Knickung, 203
- Knoten, 153
- Knotengleichgewicht, 54
- Koordinaten
 - Kartesische, 1
 - Sphärische, 3
 - Zylindrische, 2
- Kräftemittelpunkt, 30
- Kräftepaar, 28
- Kraft, 25
 - äussere, 26
 - Fern-, 25
 - Innere, 26
 - konservativ, 185
 - Potential, 185
 - Kontakt-, 25
- Kraftvektor
 - globaler, 154
 - lokaler, 154

Kreisbewegung, 5
 Kreiselung, 10
 Lagerbindungen, 38
 Auflager, 38
 Einspannung, 39
 Gelenke, 38
 Kurzes Querlager, 38
 Längslager, 39
 Langes Querlager, 39
 Leistung, 28
 Methode der finiten Elemente, 153
 Mohrscher Kreis
 Flächenträgheitsmoment, 138
 Spannungen, 101
 Moment, 27
 Momentanzentrum, 13
 Normalspannung, 99
 infolge Biegung, 147
 infolge Zug/Druck, 131
 Ortsvektor, 1
 Pendelstütze, 53
 Polbahnen, 14
 Bewegliche Polbahn, 14
 Feste Polbahn, 14
 Prinzip von St. Venant, 105
 Prinzip der virtuellen Leistung, 56
 Reaktionsprinzip, 25
 Reibung
 Gelenk-, 70
 Gleit-, 67
 Haft-, 67
 Roll-, 71
 Resultierende, 27
 Rittersches Schnittverfahren, 55
 Rotation, 10
 Rotationsachse, 10
 Satz der projizierten Geschwindigkeiten, 9
 Satz von Castigliano, 188
 Hilfskraft, 188
 Hilfsmoment, 188
 statisch bestimmte Probleme, 188
 statisch unbestimmte Probleme, 189
 sbEp, 187
 Schnelligkeit, 1
 Schnittgrößen, 79
 Schubspannungen, 99
 horizontale, 168
 Indizes, 100
 infolge Biegung, 168
 infolge Torsion, 175
 zugeordnete, 100
 Schubverzerrung, 113
 Schubwinkel, 114
 Seilhaftung, 69
 Spannungs-Dehnungs-Diagramm, 121
 Spannungsmatrix, 100
 Spannungstensor, 100
 Spannungsvektor, 99
 Stabilitätsproblem, 203
 Standfestigkeit, 37
 Statische Äquivalenz, 29
 Statische Bestimmtheit, 40
 Steifigkeitsmatrix
 Element-, 154
 Transformation, 157
 globale, 154
 Stoffgesetze, 121
 Systemtrennung, 47
 Temperaturdehnungen, 124
 Torsion, 175
 Torsionsversuch, 122
 Translation, 9
 Verschiebungsfeld, 113
 Verschiebungssatz, 138
 Verschiebungsvektor
 globaler, 154
 lokaler, 154
 Verzerrungsmatrix, 115
 Verzerrungstensor, 115
 Wirkungslinie, 27
 Zentralachse, 11
 Zugversuch, 121
 Zusammengesetzte Beanspruchung, 179
 Zweigelenkbogen, 48
 zyklisches Vertauschen, 102