Mathematik I, II - Valentin Baumann

1. Grundlagen

Mengen:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$; $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,...\}$

$\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^+\}$ rat. Zahlen

$\mathbb{R} = \{\pi, e, 1.\bar{3}, \sqrt{2}, ... + \mathbb{Q}\}$ rat. + irrationale Zahlen

$\mathbb{C} = \mathbb{R}$ + komplexe Zahlen

$A \subset B$: Teilmenge ; $A \cap B$: Schnittmenge; $A \setminus B$: A ohne B

$A \cup B$: Vereinigungsmenge; $x \in B$: x ein Element von B

Potenzgesetze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $a^m / a^n = a^{m-n}$ | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ | $a^n / b^n = (\frac{a}{b})^n$ | $a^0 = 1, a \neq 0$

$a^x = e^{x \ln(a)}$ | $a^{-n} = 1/a^n$ | $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a \cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{1/n}$ | $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Logarithmusgesetze:

$b = a^x \; -> \; x = \log_a(b)$; $b > 0, a > 0, a \neq 1$

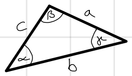
$\log_a(a) = 1$ $\quad \log_a(1) = 0$ $\quad a^{\log_a(b)} = b$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \\ \cdot \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \\ \cdot \log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x) \\ \cdot \log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a(x) \\ \cdot \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \end{array}\right\} \text{gelten wenn: } a>0, x>0, y>0, \; k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$$

- $\log_e x = \ln x$
- $\ln(0) = -\infty$
- $\ln(\infty) = \infty$
- $\ln(<0)$ nicht def.

Additionstheoreme:

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$



Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \pm \tan(x) \cdot \tan(y)}$

$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Trigonometrie:

$t_{rad} = t_{grad} \cdot \frac{\pi}{180°}$

α [°]	α [rad]	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$
120	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
135	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150	$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180	π	0	-1	0
270	$3\pi/2$	-1	0	$\pm\infty$
360	2π	0	1	0

zB. $e^{5\pi/6 \, i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

Symmetrien:
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\cot(-x) = -\cot(x)$

Reihen:

Summe: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Partialsummen

arithmetische Reihe: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Summe natürlicher Zahlen: $S_n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$

Summe der geraden Zahlen: $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$

Summe der ungeraden Zahlen: $S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

n ist jeweils # gerader, ungerader Zahlen, zum addieren

$\boxed{\text{geometrische Reihe: } S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}}$

unendliche geometrische Reihe: $S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$, für $a \in (-1, 1)$

↳ bei $|a| > 1$ gilt $S_n = \infty$

Entw. & Folgen

lineare Entwicklung – rekursiv: $a_n = a_{n-1} + l$; explizit: $a_n = a_0 + l \cdot n$

Exponentielle Entwicklung – rekursiv: $a_n = g \cdot a_{n-1}$; explizit: $a_n = g^n \cdot a_0$

$g > 0$ - Zunahme; $0 < g < 1$ - Abnahme

$g = 1$ - Konstant

Begrenzte Entwicklung – rekursiv: $a_{n+1} = \underbrace{a_n}_{\text{Ist-Zustand}} + \overbrace{\gamma \cdot a_n - \beta \cdot a_n}^{\text{Wachstum}} - \underbrace{K_n}_{\text{Korrektur}}$

$\to$ γ - neugeborene ; β - Sterberate

$a_{n+1} = a_n(1 + \gamma - \beta) - K_n$

mit $g = (1 + \gamma - \beta)$

$\boxed{\text{Wachstum: } a_{n+1} > a_n \text{ für } a_n(\gamma - \beta) > K_n}$

- für rekursiv: $a_{n+1} = g \cdot a_n - K_n$; explizit: $a_n = g^n(a_0 + \frac{K}{1-g}) - \frac{K}{1-g}$

Logistische Entwicklung – $a_n = a_{n-1} + \rho \cdot a_{n-1}(K - a_{n-1})$

K: max. Kapazität

$(K - a_{n-1})$: aktuell freie Kapazität

$a_n \approx \frac{K}{1 + (\frac{K}{a_0} - 1)(1 - \rho K)^n}$

- Bejagung: $a_n = a_{n-1} + \rho \cdot a_{n-1}(K - a_{n-1}) - q a_{n-1}$
- Nahrungsminimum: $a_n = a_{n-1} + \rho \cdot (a_{n-1} - T)(K - a_{n-1})$

falls $T < a_n < K$ –> Wachstum; Falls $0 < a_n < T$ od. $K < a_n$ –> Abnahme

Tumorwachstum

$a_n = a_{n-1} + r \cdot a_{n-1} \ln\left(\frac{K}{a_{n-1}}\right)$ $\quad 0 < r < 1$

falls $0 < a_n < K$ –> Wachstum ; falls $K < a_n$ –> Abnahme

Wachstumsrate

rel.: $r_n = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ $r_n>0$: Wachstumsrate, $r_n<0$: Zerfallsrate

absolut: $a_{n+1}-a_n$

$\boxed{\tilde a \text{ Fixpunkt, wenn } r_{\tilde a}=0!\ \Rightarrow a_{n+1}=a_n=\tilde a}$

Fixpunkte von Folgen & Entw.

- linear: ($l\neq 0$) keinen Fixpunkt
- Exponentiell: ($q\neq 1$) $\tilde a = 0$
- Begrenzt: $\tilde a = K$
- Logistisch: $\tilde a_1 = 0$ $\tilde a_2 = K$
- logistisch mit Bejagung: $\tilde a_1 = 0$ $\tilde a_2 = K-\frac{q}{p}$
- logistisch mit Nahrungsm.: $\tilde a_1 = T$ $\tilde a_2 = K$
- Tumorwachstum: ($a_n\neq 0$) $\tilde a = K$

Trick Polynomdivision

· grad im Zähler gleich oder grösser als im Nenner

① Dividieren (Höchster Exponent Zähler geteilt höchster Exponent Nenner)
② Multiplizieren (Nenner mal Resultat aus 1. Division)
③ Subtrahieren (Zähler minus Resultat aus 2. Multiplikation)

Bsp: $(x^3-6x^2+9x-6)\div(x-1) = \underline{\underline{x^2-5x+4-\frac{2}{x-1}}}$

$$\begin{array}{l} -(x^3-x^2) \\ \hline 0\quad -5x^2+9x \\ \quad -(-5x^2+5x) \\ \hline \quad\quad 0\quad +4x-6 \\ \quad\quad\quad -(4x-4) \\ \hline \quad\quad\quad 0\quad -2 \end{array}$$

Konvergenzradius

gegeben Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}\cdot x^n$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{2^{n+1}}}{\frac{n!(n+1)}{2^{n+2}}}\right| = \left|\frac{\cancel{n!}\cdot 2^{\cancel{n+2}}}{\cancel{n!}\cdot \cancel{2^{n+1}}(n+1)}\right| = \left|\frac{2}{(n+1)}\right| = 0$$

Beispielaufgabe: Komplexe Zahlen

$|z_1| = |z_1\cdot z_2| = 1$; $\arg(z_1) = \arg(z_1\cdot z_2)+\pi/4$

$r_1\cdot r_2 = 1$ mit $r_1 = 1$ $\varphi_1 = \varphi_1+\varphi_2+\pi/4$

$\underline{r_2 = 1}$ $\underline{\varphi_2 = -\pi/4}$

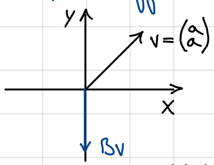
$\underline{z_2 = e^{-\pi/4\, i}}$

$\underline{z_2 = 1\cdot(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))} = \underline{\underline{\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i}}$

Alternativ: Man sieht durch Gleichungen: z_2 hat Radius 1 & bewirkt Drehung um $-\pi/4$: $\underline{z_2 = 1\cdot e^{-\pi/4\, i}}$

Beispielaufgabe:

Sei $B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ & $v=\binom{a}{a}$ mit $a>0$



=> Multiplikation eines Vektors mit B entspricht der Drehung um φ in die pos. Richtung

=> aus der Abbildung: $\underline{\varphi = \frac{5}{4}\pi}$

· $a\cos\varphi - a\sin\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\cos\varphi = \sin\varphi}$

Beispielaufgabe

Matrix C gegeben ; $v_{n+1} = C\cdot v_n$

gesucht ist $v_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, sodass $v_{n+4} = v_n$

=> $\underline{v_n\cdot C^4 = v_n}$; 1. C^4 ausrechnen & so für $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ lösen
2. EV für C^4 zu EW $\lambda=1$ finden!

Diverses & Tipps

· bei MC; falsch/richtig: wirklich ausrechnen

· falls noch Lösungsmenge gefragt wird auch die Lösung angeben.

· Trick zum Ableiten: $f(x) = x^{(x^2)}$; $x>0$

=> $f(x) = x^{(x^2)} = e^{\ln(x^{(x^2)})} = e^{(x^2)\cdot\ln(x)}$

$f'(x) = e^{(x^2)\cdot\ln(x)}\,(2x\cdot\ln(x)+x) = x^{(x^2)}\,(2x\ln(x)+x)$

$\underline{\underline{= x^{x^2+1}\,(2\ln(x)+1)}}$

· $0! = 1$

· Trick mit Satz von Green:

· wenn γ_1, γ_2 & γ_3 gegeben & gefragt nach: $\int_{\gamma_2}\vec K\,d\gamma + \int_{\gamma_3}\vec K\,d\gamma = \ldots$;

=> brauche $\oint_\gamma \vec K\,d\gamma - \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}$ (mit Satz von Green)

$\iint_B \mathrm{rot}(K(x,y))\,dA - \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}$

=> Unbedingt überprüfen ob bei Integral auch wirklich integriert!

· Quadratische Formel: $\boxed{x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$

Grenzwerte

Def. Folge (a_n) konvergiert gegen Grenzwert g, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, sodass $|a_n - g| < \varepsilon$ => Ab n_0 ist jedes Folgeglied näher an g als ε angibt!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

· Grenzwert von $f(x)$ wenn x gegen Zahl a geht:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Grenzwert in Punkt x_0 existiert falls:

y_l = linksseitiger Grenzwert
y_r = rechtsseitiger Grenzwert

$$\boxed{y_l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x_n<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x_n<x_0}} f(x) = y_r \neq \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad \text{mit } g = \text{(beidseitiger Grenzwert)}}$$

Rechenregeln

mit $\lim_{x\to a} f(x) = f$ & $\lim_{x\to a} g(x) = g$

- $\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot f$
- $\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = f\cdot g$
- $\lim_{x\to a} c^{f(x)} = c^f$
- $\lim_{x\to a} (f(x))^n = f^n$
- $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = f \pm g$
- $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = f/g$
- $\lim_{x\to a} \log_c(f(x)) = \log_c f$
- $\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = f^g$

Tricks zum Bestimmen von Grenzwerten

Polynome:

① Wenn Grad oben grösser als unten => $\pm\infty$

zB: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{2x} = \infty$

② Wenn Grad unten grösser als oben => 0

zB: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x+x^2-x^3} = 0$

③ Grad oben & unten gleich => Konstanten des höchsten Grads

zB: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x^2+3x}{-x+x^2+3x^3} = \frac{2}{3}$

Kürzen von Brüchen

zB. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 2$

Exponentialfunktion

· Exponentialfunktion a^x immer dominant (a-beliebig)

zB. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{10000}} = \infty$; $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cdot x^2 = \frac{x^2}{e^x} = 0$

Sandwitch

Bestimmte Funktionen lassen sich durch obere & untere Grenze eingrenzen:

· zB. $-\frac{1}{x} \le \frac{\cos(x)}{x} \le \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$

Regel von Bernoulli-de l'Hôpital

Anwenden bei $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty\cdot 0$, etc.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Grenzwert	Umformung
$\lim f(x)g(x) = 0\cdot\infty$	$\lim f(x)g(x) = \lim \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)} = \lim \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$
$\lim f(x)-g(x) = \infty-\infty$	$\lim f(x)-g(x) = \lim \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$
$\lim f(x)^{g(x)} = 0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{\lim g(x)\cdot \ln(f(x))}$

! => Regel kann man mehrmals ausführen!

Reihe von Folgen für Grenzwertbestimmung

Für $x\to\infty$ wachsen folgende Ausdrücke schneller gegen ∞

$$\ldots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^a < q^x < x! < x^x$$

Index n_0 bestimmen

· Sei $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Vermutung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

· Sei zB. $\varepsilon = 0.2 = 1/5$, finde n_0, sodass $|a_n - 1| < \varepsilon$

· $|a_n - 1| = |1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1| = |\frac{(-1)^n}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon = 1/5 \Rightarrow n > 5$, also $n_0 = 6$

Wichtigste Grenzwerte

$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1/2$	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(x + \frac{c}{x}) = \sqrt{c}$
$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^n$	$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = 1/e$	$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a)$	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} q^x = 0$ falls $\lvert q\rvert < 1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} = 1$$

!
- Konvergente Folge hat genau 1 Grenzwert
- Folge mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ heisst Nullfolge
- Folge ohne Grenzwert heisst divergent

=> Falls $\lim_{x\to a}$ & $a \neq 0$ oder $\pm\infty$, dann einfach a in $f(x)$ einsetzen;
& wenn für $f(x)$ $x \neq a$, dann Nenner $\to 0$!

2. Funktionen

Def: Eine Abbildung f von D (Def.-raum) nach Z (Ziel-raum) legt für jedes $x \in D$ ein Element $f(x) \in Z$ fest

$$f: D \to Z \qquad x \mapsto f(x)$$

Wertebereich: $W_f = \{f(x) \mid x \in D\} \subset Z$; Zielraum $\neq$ Wertebereich

Komposition: (Verkettung von Funktionen)

$h(x) = g(f(x))$; $h = g \circ f$ $\Rightarrow$ $x \mapsto g(f(x))$

$h: D_f \to Z_g$; $W_f \subset D_g$

$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = f^n(x)$

Umkehrabbildung

$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f(x)$

Eine Funktion f heisst umkehrbar, wenn es für jedes $y \in Z$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$. (bijektiv)

Umkehrfunktion: $y = f^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

$\Rightarrow$ D_f & W_f miteinander vertauscht!

$\hookrightarrow$ f & f^{-1} bzgl. $y = x$ Spiegelsymmetrisch

Umkehrfunktion bestimmen:

1. Funktions f. nach x auflösen $\Rightarrow x = g(y)$
2. Variable vertauschen $x = g(y) \to y = f^{-1}(x)$
3. Definiere: $f^{-1}: W_f \to D$, $y \mapsto f^{-1}(y) = x$

$\hookrightarrow$ Definitionsbereich für, welchen f umkehrbar!

- ganze Funktion f nur umkehrbar falls streng monoton!
- umkehrbare Funktionen mit angepasstem D.

$x \mapsto x^2$	nur für $\mathbb{R}^{>0}$ od. $\mathbb{R}^{<0}$ umkehrbar
mit $a>0$: $x \mapsto a^x$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$
$y \mapsto \log_a y$	$\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$
$y \mapsto \arcsin y$	$[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$x \mapsto \cos x$	$[0, \pi] \to [-1, 1]$
$y \mapsto \arccos y$	$[-1, 1] \to [0, \pi]$
$x \mapsto \tan x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$
$y \mapsto \arctan y$	$\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

D für gew. f:

- $\sqrt{f(x)} \to f(x) \geq 0$
- $\ln(f(x)) \to f(x) > 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to g(x) \neq 0$
- $(f(x))^{g(x)} \to f(x) > 0$
- $\tan(f(x)) \to f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Reproduktion

Reproduktionsfunktion f mit $f(x_n) = x_{n+1}$

·dafür in der rekursiven Folge x_n durch x & x_{n+1} durch $f(x_n)$ ersetzen

$f(x) =$ rek. Folge mit x

- Veränderung: $\delta(x) = f(x) - x$
- Mit Umkehrfunktion rückwärts durchlaufen: $x_n = f^{-1}(x_{n+1})$

Startwert: $x_0 = (f^{-1})^n(x_n)$

Fixpunkte

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

$\to$ geometrisch: Schnittpunkt von f (Reproduktionsfkt.) mit Winkelhalbierenden $y = x$!

$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ \tilde{x} \text{ ist Fixpunkt falls: } r_n = \frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{\tilde{x}_n} = 0 \\ \to \delta(x) = f(x) - x = 0 \end{array}}$

$\Rightarrow$ Fixpunkte sind Kandidaten für Grenzwerte

$\Rightarrow$ Grenzwert immer Fixpunkt aber nicht unbedingt umgekehrt.

Konvergenzkriterium

$|f'(\tilde{x})| < 1$; dann konvergiert Folge gegen $\tilde{x}$ für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $\tilde{x}$! $\Rightarrow$ Grenzwert

$\hookrightarrow$ $\tilde{x}$ attraktiv

$|f'(\tilde{x})| > 1$; $\tilde{x}$ kein Grenzwert für jeden Startwert!

$\hookrightarrow$ $\tilde{x}$ abstossend

$|f'(\tilde{x})| = 1$; Spezialfall – keine Entscheidung möglich

Stetigkeit

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_n < x}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_n > x}} f(x) = f(x_0)}$$

- Funktion heisst stetig in D falls stetig in jedem $x_0 \in D$!

Bsp: $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} a \frac{\tan(x)}{\sin(x)} & x \neq 0 \\ \pi & x = 0 \end{cases}$

Welches a damit f stetig bei $x_0 = 0$?

$$\frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} a \cdot \frac{1}{\cos(x)} = a$$

$\Rightarrow$ damit stetig & $\lim_{x \to 0} a \cdot \frac{\tan(x)}{\sin(x)} = f(0)$ muss $a = \pi$ sein!

- $x^n, \sin(x), \cos(x), e^x, \log(x)$ für $x > 0$ sind alle stetig
- Alle Additionen, Subtrakt., Multiplik. & Verschachtelung dieser Funktionen sind stetig!
- Unstetigkeiten wenn – durch Null geteilt wird
  – ∞ $\log(0)$

Periodizität

$f(x \pm k \cdot T) = f(x)$; $k \in \mathbb{N}$, f-periodisch, T-Periode

Symmetrie:

- Gerade Funktion: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ spiegelsymmetrisch zur y-achse
  zB: $\sin(x)$, $\tan(x)$
- Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch zum Ursprung
  zB: $\cos(x)$, x^2

Bsp-Aufgabe: $f(x) = \begin{cases} \frac{b \ln(x)}{x^2 - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

b damit stetig auf $\mathbb{R}^{>0}$?

$$\lim_{x \to 1} \frac{b \cdot \ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{b x^{-1}}{2x} = \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

Beispielaufgabe: ·Entw. einer Pop. gegeben durch $x_{n+1} = f(x_n)$. Startwert sei $x_0 = 1/10$ $\Rightarrow$ Nähe von Null

$\Rightarrow$ Entscheiden ob für Reprod.funktion f die Population ausstirbt.

- $f(x) = x + \sin(x)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$ $\Rightarrow$ $a = 0$ ist Fixpunkt
  attraktiv? $\Rightarrow$ $f'(x) = 1 + \cos(x)$ $\Rightarrow$ $|f'(a)| = |1 + \cos(0)| = 2 > 1$
  $\Rightarrow$ abstossend & Pop. stirbt nicht aus!
- $f(x) = \sin(x) - x$ $\Rightarrow$ $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$ $\Rightarrow$ $a = 0$ ist Fixpunkt
  attraktiv? $\Rightarrow$ $f'(x) = \cos(x) - 1$ $\Rightarrow$ $|f'(a)| = |\cos(0) - 1| = 0 < 1$
  $\Rightarrow$ attraktiv & Pop. stirbt aus!

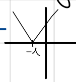
Differentialrechnungen

Differenzierbarkeit

· Funktion f ist differenzierbar falls folgender Grenzwert existiert (beidseitig):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

-> Zshg mit Stetigkeit:
- $f(x)$ diff -> $f(x)$ stetig
- $f(x)$ nicht stetig -> $f(x)$ nicht diff
- $f(x)$ stetig -> $f(x)$ nicht unbedingt diff.

Bsp:  -> in -1 nicht differenzierbar

Ableitung

· mittlere Veränderungsgeschw. von f in $I=[x_0,x_1]$: $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

· momentane Veränderungsgeschw ≙ Ableitung

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

≙ Differentialquotient

Veränderungsrate: $f'(x) / f(x)$

Geradengl. der Tangente & der Normalen

· am Punkt x_0: $y = mx + q$

$$y_t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot x + \underbrace{(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)}_{q}$$

$$y_n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + \left(f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0\right)$$

Linearisierung

- In Umgebung von $P(x_0, y_0)$ gilt:

$$f(x) \sim l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad (\text{falls } x \sim x_0)$$

Mittelwertsatz

- Zwischen x_0 & x gibt es mindestens ein z, bei welchem gilt:

$$f'(z) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \triangleq \text{Sekantensteigung} = \text{mittlere Veränderung}$$

Differenzierungsregeln

Faktorenregel: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ (Konstante)

Summenregel: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel: $(u(v))' = \underbrace{u'(v)}_{\text{äussere}} \cdot \underbrace{v'}_{\text{innere}}$

Variable Basis/Exponenten: $(u^v)'$

$$= (e^{v \ln(u)})' = (v \cdot \ln(u))' \cdot e^{v \cdot \ln(u)} = (v \cdot \ln(u))' \cdot u^v$$

Umkehrfunktion: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\sin(x)$	$\cos(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$	$\sin(x) \cdot \cos(x)$	$\cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\cos^2(x)$	$-2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{(1+x^2)}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		

$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	Partiell
$\ln(x)$	$1/x$	$x > 0$	$f(x,y) = \sin(xy)$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	$a > 0$	$f_x(x,y) = \cos(xy) \cdot y$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$x>0, a>0, a \neq 1$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \pi/2 + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$	

Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Symmetrieachsen
3. Nullstellen
4. Monotonie
5. Extremas, WP, Krümmung
6. Wertebereich
7. Asymptoten

Monotonie

$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ => streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ => streng monoton fallend

$f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ => konstant

Krümmungsverhalten

$f''(x) < 0$: Graph von f ist auf I rechts gekrümmt

$f''(x) > 0$: Graph von f ist auf I links gekrümmt

Extremstellen

· $f'(x) = 0$ -> kritischer Punkt
- $f''(x) < 0$ => Maximum
- $f''(x) > 0$ => Minimum
- $f''(x) = 0$

durch Vorzeichenwechsel bestimmbar ob max. od. min.

- falls $f'(x)$ Vorzeichenwechsel macht: Extrema
- falls $f'(x)$ kein Vorzeichenwechsel: Sattelpunkt

· globales Extrema — 1. bei lokalen Extrema, 2. Intervallgrenzen 3. nicht diff.bare Stellen

-> Für globales Extrema die lokalen Extrema & Funktionswerte an Intervallgrenzen & nicht diffbare Stellen manuell vergleichen.

· $f''(x) = 0$ => Wendepunkt falls Vorzeichenwechsel von $f'(x)$

Taylorpolynome

=> Um eine Funktion an einer Stelle x_0 & dessen nahen Umfeld zu approximieren!

· Taylorpolynom n-ten Grades:

! => je höher n (Grad), desto besser Approximation

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

Koeffizient a_k: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Fehler: $R_n = |f(x) - T_n(x)|$

Für x & x_0 gibt es z mit: $|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!} |(x-x_0)|^{n+1}$

· Fehler $|R_n(x)| < 0.0001$

↳ für diverse n's ausprobieren!

Integralrechnung

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

Stammfunktion

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C;\quad C \in \mathbb{R};\quad F'(x) = f(x)$$

=> Eine Funktion besitzt mehrere Stammfunktionen, die sich um Konst. C unterscheiden

Bestimmtes Integral – Riemannsche Summe

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i}$$

Hauptsatz der Integralrechnung

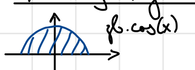
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Rechenregeln

- $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$; $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int (f_1 \pm f_2 \pm \ldots f_n)\,dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx \pm \ldots \int f_n dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

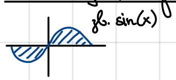
Spezialfall: $a = -b \Rightarrow \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$

·Falls $f(x)$ gerade:



$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^b f(x)\,dx$$

·Falls $f(x)$ ungerade:



$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

Integrationsmethoden

Partielle Integration

$$\boxed{\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx}$$

$\uparrow$ $\downarrow$

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Für rationale Fkt $\frac{P(x)}{q(x)}$

- $\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + c$; $\int \frac{1}{(1+a^2x^2)}dx = \frac{\arctan(ax)}{a} + C$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$; $\int \frac{x}{(1+a^2x^2)}dx = \frac{\ln|1+a^2x^2|}{2a^2} + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$; $\int \frac{x}{1 \cdot x^2 + 2}dx = \frac{\ln|x^2+2|}{2 \cdot 1^2} + c$

–> Falls Exp. in Zähler grösser als Exp im Nenner –> Polynomdivision

Vorgehen: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

① $q(x)$ Faktorisieren –> $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot q_n(x)$

② $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{q_1(x)} + \frac{A_2}{q_2(x)} + \ldots + \frac{A_n}{q_n(x)}$

③ Koeffizientenvergleich: $x^0 -$, $x^1 -$, $x^2 -$ & für $A_1, A_2, \ldots A_n$ auflösen!

③ Integrieren wie oben vermerkt

! Bei Exponenten ≥ 2 von Faktorisierungsprodukt müssen bei PBZ alle Potenzen bei Summe dabei sein.

1. Bsp: $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)}$

2. Bsp: $\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+B_0}{x^2+1}$

3. Bsp: $\frac{2x^3+3x}{(x^2-x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+2)^2}$

Substitution

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C}$$

Vorgehen:

① Wähle $g(x)$ & nenne sie $u(x)$

② Bestimme $g'(x) = u'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)}$

③ Ersetze $g(x) = u(x)$ durch u & dx durch $\frac{du}{u'(x)}$

④ $\int f(u)\,du$ berechnen

⑤ Ersetze u wieder durch $u(x) = g(x)$

⑥ Für bestimmte Integrale setze Grenzen ein

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

=> Man kann auch nicht zurück subst. & Grenzen als $\int_{u(a)}^{u(b)}$ verwenden!

Standardintegrale

$$\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$\int f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)$	$F(x)$
k	$kx + C$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$1/\cos^2(x)$	$\tan(x) + C$
$1/x$	$\ln\|x\| + C$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\| + C$
$1/(x+k)$	$\ln\|x+k\| + C$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x+1}{x-1}\right\| + C$
e^x	$e^x + C$	$\|x\|^a$	$\frac{1}{a+1} \cdot x \cdot \|x\|^a + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$	0	k
$\sin(kx)$	$\frac{-\cos(kx)}{k} + C$	$1/\sin^2(x)$	$-1/\tan(x) + C$
$\cos(kx)$	$\frac{\sin(kx)}{k} + C$	$1/2\sqrt{x}$	$\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$\ln\|a\| \cdot a^x$	a^x
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$\frac{1}{n^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{n}{a}\right) + C$
$\frac{1}{(1+x^2)}$	$\arctan(x) + C$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x)) + C$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x) \cdot \cos(x)) + C$	$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x + C$

Unbestimmte Integrale

· Wenn Grenzen gegen ∞ (2. Art) oder Funktion gegen ∞ (1. Art)

1. Art

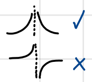
· Funktion hat bei best. x_0 Polstelle: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx;\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$$

·Falls Polstelle 'c' zw. Integralgrenzen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

–> Grenzwert bei C muss existieren!



=> Falls mind. 1 Summand $\lim \int_a^b = \infty$ => dann existiert Integral nicht!

2. Art

–> Integral, welches bis unendlich geht

=> existiert nur falls Grenzwert existiert! –> falls $\pm\infty$, dann ist Integral divergent

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty}\int_a^b f(x)\,dx \neq \pm\infty \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty}\int_a^b f(x)\,dx \neq \pm\infty}$$

· Falls Integral von $-\infty$ zu ∞, immer aufteilen, um schauen ob existiert!

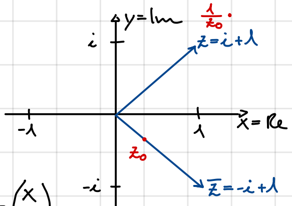
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

· falls Grenzwert $\pm\infty$ konvergiert Integral nicht!

! **Berechnung:** $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty}(F(a) - F(b))$

Komplexe Zahlen

Kartesische Darstellung



$z = x + yi$ — Imaginäre Einheit $i^2 = -1$

$\vec{z} = \binom{x}{y}$

$Re(z) = x$
$Im(z) = y$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ = Betrag ≙ Distanz vom Ursprung

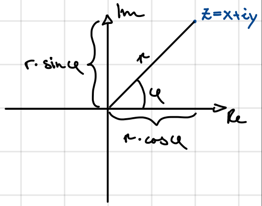
· falls $Re(z) = 0 \Rightarrow z$ - rein imaginär

$\frac{1}{z_0} = \frac{\bar z_0}{z_0 \cdot \bar z_0} = \frac{\bar z_0}{|z_0|^2}$
↳ Konjugation & Streckung/Stauchung

Konjugierte komplexe Zahlen

$\bar z$ zu $z = x+iy \Rightarrow \bar z = x - iy \Rightarrow$ spiegelsymmetrisch zur reellen Achse

Polarform



$z = r \cdot e^{i\varphi}$ $\bar z = r \cdot e^{-i\varphi}$

$\varphi = \arg(z)$ – Argument: mit reeller Achse eingeschlossener Winkel: $-\pi \le \varphi \le \pi$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Bsp: $\frac{2-i}{3-2i} = \frac{(2-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$

Trigonometrische Form

$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\bar z = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

Umrechnungen

· Polarform → kartesische Form

$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \begin{cases} Re(z) = r\cdot\cos(\varphi) \\ Im(z) = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$

$\Rightarrow z = Re(z) + i\, Im(z)$

· Kartesische Form → Polarform

$z = x + iy \quad \rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

· Falls $x>0$ (I. & IV. Quadrant): $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

· Falls $x<0, y\ge 0$ (II. Quadrant): $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

· Falls $x<0, y<0$ (III. Quadrant): $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$

· Falls $x=0, y\ge 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

· Falls $x=0, y<0$: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Grundrechnungen

$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

Kartesische Darstellung	Polarform
Addition/Subtr.	**Addition/Subtr.**
$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$	- nicht möglich
Multiplikation	**Multiplikation**
$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
Division	**Division**
$z_1/z_2 = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$	$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Potenzieren	**Potenzieren**
· sehr schlecht geeignet	$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Für Polar: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$

Potenzen von i:
$i^{4n} = 1$ $i^{4n+1} = i$ $i^{4n+2} = -1$ $i^{4n+3} = -i$

Fundamentalsatz der Algebra

· Jede algebraische Gleichung n-ten Grades ($n \ge 1$) hat genau n (komplexe) Nullstellen!

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = (x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_n) = 0$

$\Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind Lsg. der Gleichung & Nullstellen

Satz: Falls alle $a_i \in \mathbb{R}$ & z eine Nullstelle, dann auch $\bar z$ Lsg. der Gleichung.

Komplexe Wurzel

$z = \sqrt[n]{a}$ berechnet alle z für die gilt: $z^n = a$

① Wurzel von $c = a + bi$ bestimmen $\Rightarrow z = \sqrt[n]{c}$

② c in Polarform: $c = r \cdot e^{i\varphi}$

③ Da $e^{i\varphi}$ mit 2π periodisch ist gilt: $c = r \cdot e^{i(\varphi + k \cdot 2\pi)}$ wobei $k = 0, 1, \ldots, n-1$

④ Berechne nun $\sqrt[n]{c} = c^{1/n}$:

$$\boxed{z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\varphi_k} \quad \text{mit} \quad \varphi_k = \frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}}$$

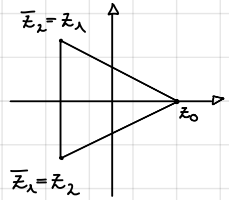
mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Bsp.: $z = \sqrt[2]{15+20i}$; ② $r = \sqrt{15^2+20^2} = 25$ & $\varphi = \arctan\left(\frac{20}{15}\right) = 0.295\pi$

④ $z = \sqrt[2]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{2}\right)} = 5 \cdot e^{i(0.1475\pi + k\cdot\pi)}$ mit $k = 0, 1$

$z_1 = 5 \cdot e^{i0.1475\pi}$; $z_2 = 5 \cdot e^{i1.1475\pi}$

Bem: Die n-ten Wurzeln bilden reguläre n-Ecke



Beispielaufgabe: $z^3 = 8i$; $z_1 = 2e^{i\pi/6}$ & $z_2 = 2e^{-i\pi/2}$

3. Lösung gesucht. $\Rightarrow 2\pi/3 = \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{6}\pi$

$-\frac{\pi}{2} \xleftarrow{-\frac{4\pi}{6}} \pi/6 \xrightarrow{+\frac{4\pi}{6}} \frac{5}{6}\pi \xrightarrow{+\frac{4\pi}{6}} \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}!$

Beispielaufgabe: $z^4 - 4i = 0 \Rightarrow z^4 = 4i \Rightarrow z = \sqrt[4]{4i}$

$\cdot\ 4i = 4 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow \sqrt[4]{4e^{i\pi/2}}$

$z = \sqrt[4]{4} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{4}\right)}$; da 3. Quadrant gesucht: $k = 2$

$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{9\pi/2}{4}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{9\pi}{8}}$

↯ Lösung muss: $-\pi < \varphi \le \pi$: $z = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{7\pi}{8}i}$

Beispielaufgabe EW & Lösungsmenge

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+a}$

i) EW finden

$\cdot \det(A - \lambda E_n) = (1-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - a(1-\lambda) - 0 = 0$

$(1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - a) = 0$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - a) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$; $\lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3-a)}}{2}$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm \frac{\sqrt{4+4a}}{2}$

$\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{1+a}$

ii) $a \in \mathbb{R}$ bestimmen damit $Ax = 0$ eine nicht-triviale Lösung $x \ne 0$ hat.

$\Rightarrow$ hat nicht-triviale Lösung falls $\det(A) = 0 \Rightarrow$ dann ∞-lich viele

$\det(A) = 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$

iii) $a \in \mathbb{R}$ bestimmen, sodass A 2 komplexe EW mit Betrag 3 hat.

$\Rightarrow$ dafür muss $1 + a < 0$, also $a < -1$

$\Rightarrow$ dann ist $-a-1 > 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{1+a} = 2 \pm \sqrt{-(-1-a)}$
$= 2 \pm i\sqrt{-1-a}$

· Mit Betrag $3 = |2 \pm i\sqrt{-1-a}|$

$\sqrt{2^2 + \sqrt{-1-a}^2} = \sqrt{4-1-a} = \sqrt{3-a} = 3$

$\Rightarrow 3 - a = 9 \Rightarrow a = -6$

Lineare Algebra

Vektor

$v \in \mathbb{R}^n$

Spaltenvektor: $v_n = \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_n\end{pmatrix}$ Zeilenvektor: $(v_1\ v_2 \dots v_n)$

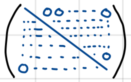
Matrize $(m \times n)$

m: # Zeilen
n: # Spalten

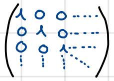
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$

a_{ik}: Matrixelement der i-ten Zeile & k-ten Spalte

- **Quadratische Matrize:** $(n\times n)$ - Matrize
- **Diagonalmatrize:** $(n\times n)$-Matrize)
  - alle ausser Hauptdiagonalelemente = 0
  - $a_{ik}=0$ für alle $i\neq k$

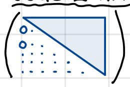


- **Einheitsmatrize:** (E_n) - $(n\times n)$-Matrize
  - Diagonalmatrize mit allen Hauptdiagonalelementen = 1 ($a_{ii}=1$ für alle i)



- **Dreiecksmatrize** $(n\times n$-Matrize)
  - alle Elemente oberhalb (untere Δ-Matrize) od. unterhalb (obere Δ-Matrize) der Hauptdiagonale sind = 0!
  - => falls Hauptdiagonale = 0, dann strikte/echte Δ-Matrize

obere Δ-Matrize:



- **Transponierte Matrize** (A^T)
  - $A=(m\times n) \to A^T=(n\times m)$; Zeilen & Spalten vertauscht
  - Symmetrische Matrize: $A=A^T$ } müssen dafür quadratisch sein
  - orthogonale Matrize: $A^{-1}=A^T$ }

$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}$

Rechenregeln Vektoren

- **Betrag:** $v_n = \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_n\end{pmatrix} \to |v_n| = \sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}$
- **Normierung:** $\tilde v_n = \frac{v_n}{|v_n|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}} \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_n\end{pmatrix}$ $|\tilde v_n|=1$
- **Addition/Subtraktion:** $a \pm b = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_n\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\pm b_1\\ a_2\pm b_2\\ a_n\pm b_n\end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit Skalar:** $\lambda\cdot v_n = \lambda\cdot \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1\\ \lambda v_2\\ \lambda v_n\end{pmatrix}$
- **Skalarprodukt:** $a\cdot b = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_n\end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \dots + a_n\cdot b_n = |a|\cdot|b|\cdot\cos(\varphi)$ $0\le\varphi\le\pi$

Rechenregeln Matrizen

Addition/Subtraktion/Multiplikation mit Skalar

- gleich stellige Elemente von zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert/subtrahiert
- Skalar mit jedem Element multipliziert.

Matrix-Vektor Produkt

$v_m = A\cdot v_n = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ a_{m1}&\cdots&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\cdot v_1 + a_{12}\cdot v_1 + \dots + a_{1n}\cdot v_n\\ a_{21}\cdot v_1 + a_{22}\cdot v_2 + \dots + a_{2n}\cdot v_n\\ a_{m1}\cdot v_1 + a_{m2}\cdot v_2 + \dots + a_{mn}\cdot v_n\end{pmatrix}$

! # Zeilen (n) des Vektors $\overset{!}{=}$ Anzahl Spalten (n) der Matrize

als Funktion: $(m\times n)$ $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $v_n \to A\cdot v_n = v_m$

$(n\times n)$ $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $v_n\to A\cdot v_n$

Entwicklungsmodell: $v_{n+1} = A\cdot v_n$, mit v_n & v_{n+1} Bestände

Matrizenmultiplikation

$A(m\times n)\times B(n\times k) = C(m\times k)$

! # Spalten von A(n) $\overset{!}{=}$ # Zeilen von B(n)

$n\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{pmatrix}\right.$

$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{pmatrix}}_{n} \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} & \cdot & \cdot\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix} = C$

=> Multipliziere i-te Zeile von A mit j-ten Spalte von B & summiere auf!

Allgemein: $A\neq B$

Matrixpotenz

→ Die n-te Potenz einer Matrize ist die n-malige Wiederholte Matrizenmultiplikation:

$A^n = \overbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}^{n\text{-mal}}$ => $(A^0 = E)$ $n\in\mathbb{N}$

Rechenregeln Matrizen

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $(\lambda\cdot\mu)A=\lambda(\mu\cdot A)$
- $A\cdot B\cdot C \neq B\cdot A\cdot C$ (Reihenfolge)
- $A(BC)=(AB)C$
- $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
- $A(B+C)=AB+AC$

- $AB^T = B^T\cdot A^T$
- $A^p\cdot A^q = A^{p+q}$
- $A\cdot E_n = E_n\cdot A = A$
- $A^0=E_n$
- $(A+B)^T = A^T+B^T$
- $(C\cdot A)^T = C\cdot A^T$
- $(A^T)^T=A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

- falls B: λ_1 & λ_2
  $\tilde B$: $\frac{\lambda_1}{4}$ & $\frac{\lambda_2}{4}$:
  $\tilde B = 1/4\, B$ muss nicht gelten, da $\tilde B = \begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{4}&0\\ 0&\frac{\lambda_2}{4}\end{pmatrix}$ auch möglich!
- $\tilde B$ invertierbar

Determinante: – Abbildung, welche einer quadratischen Matrize A eine reelle Zahl zuordnet.

→ $\det(A)\neq 0$: regulär $\det(A)=0$: singulär

$\det(A)=|A|$; $\det: M_{n\times n}\to\mathbb{R}$; $A\mapsto \det(A)$

2x2: $A=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=ad-bc$

3x3: $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\ d&e&f\\ g&h&i\end{pmatrix}$ Hauptdiagonale, –Nebendiagonale

=> $\det(A) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Laplace:

Determinante nach folgender Entw. berechnen:

→ nach i-ter Zeile (i-konstant): $\det(A)=\sum_{k=1}^n a_{ik}\cdot(-1)^{i+k}\cdot D_{ik}$

→ nach k-ter Spalte (k-konstant): $\det(A)=\sum_{i=1}^n a_{ik}(-1)^{i+k}\cdot D_{ik}$

· D_{ik} = Unterdeterminante von A (wobei i-te Zeile & k-te Spalte von A gestrichen werden)

Bsp: $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\ 3&4&0&-2\\ -2&4&1&0\\ -1&3&4&10\end{pmatrix}$ → Entw. nach 4. Spalte (enthält eine Null) => k=4 konstant.

$\det(A)=\sum_{i=1}^n a_{i4}\cdot(-1)^{i+4}\cdot D_{i4} = a_{14}\cdot(-1)^{1+4}\cdot D_{14} + a_{24}\cdot(-1)^{2+4}\cdot D_{24}+\dots$

$= 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}3&4&0\\ -2&4&1\\ -1&3&4\end{vmatrix} + (-2)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&-2&3\\ -2&4&1\\ -1&3&4\end{vmatrix}+\dots$

Rechenregeln für Determinanten

→ lineare Abhängigkeit

- $\det(A)=0$, wenn: → Zeile/Spalte als linear Komb. anderer darstellbar ist
  - alle Elemente einer Zeile/Spalte = 0
  - zwei Zeilen od. Spalten sind gleich oder durch Faktor versch.
- det ändert Vorzeichen falls z.B. bei Gauss Zeilen/Spalten vertauscht
- Multipliziert man Zeile mit Zahl λ, so ändert sich Determinante um λ-fache
  ↳ λ·Spalte/Zeile → $\lambda\cdot\det(A)$
- $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n\cdot\det(A)$ mit n: # Zeilen/Spalten
- $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)=\det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A^n)=\det(A)^n$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A)=\det(A^T)$
- $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$
- $\det(E_n)=1$
- B mit EW λ_1, $\tilde B$ mit EW $\frac{\lambda_1}{4}$ dann $\frac{\det B}{16}=\det\tilde B$

Für Dreiecks- & Diagonalmatrizen:

$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$ (Hauptdiagonale multipliziert)

Inverse Matrize

- Für eine reguläre ($\det(A) \neq 0$) Matrix $A(n \times n)$ existiert genau eine inverse Matrix A^{-1}, sodass gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Entw.-modell: $V_n = A^{-1} \cdot V_{n+1}$

Rechenregeln für Inverse

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $E_n^{-1} = E_n$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

$(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$; k = Skalar $\in \mathbb{R}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Berechnung von A^{-1} mit Unterdeterminante

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot D_{11} & (-1)^{2+1} \cdot D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} \cdot D_{n1} \\ (-1)^{1+2} \cdot D_{12} & (-1)^{2+2} \cdot D_{22} & & (-1)^{n+2} \cdot D_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n} \cdot D_{1n} & (-1)^{2+n} \cdot D_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} \cdot D_{nn} \end{pmatrix}$$

-> mit $(n-1)$reihigen Unterdeterminanten

Berechnung von A^{-1} mit Gauss

Aus n-reihigen regulären Matrizen A & E wird $(A|E)$ gebildet:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Gauss-Verfahren (-> Umformungen) bis $(E|A^{-1})$ entsteht!

Formel für A^{-1} wenn $A(2 \times 2)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Formel für A^{-1} wenn $A(3 \times 3)$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ec \\ fg-di & ai-gc & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrize

$Rg(A) = r$

Def:
- \# Zeilen, welche nicht 0 sind nach Gaussverfahren!
- \# linear unabhängiger Vektoren

Vorgehen:

① el. ZU -> ZSF

② Rang = # nicht nulle Zeilen = $Rg(A) = r$

=> wenn $\det(A_{n \times n}) \neq 0$, dann $Rg(A_{n \times n}) = n$

- Rang bleibt bei Gauss-Verfahren unverändert!

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg(A) = 3$; $\det(A) = 0$

↳ 1 freier Parameter

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$$A \cdot x = c \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$m \mathrel{\hat=}$ # Gleichungen

$n \mathrel{\hat=}$ # Unbekannte

- Falls $m < n$, weil $r < n$ => unterbestimmt => Parameter

$A \cdot x = 0$: Homogenes System -> $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

$A \cdot x = c$: Inhomogenes System -> $c \neq 0$

Gauss-Verfahren

Lineares Gleichungssystem: $Ax = c$

① Schreibe $(A|c)$ -> Zeilenstufenform (Keine 2 Zeilen mit gleich vielen Nullen)

② el. ZU => ZSF

③ System von unten nach oben lösen

④ bei unterbestimmtem System Parameter einführen

↳ Falls z.B. eine Zeile $= 0$ / $Rg(A) < n$

el. ZU $\mathrel{\hat=}$ elementare Zeilenumformungen

NICHT die gleiche Matrize, aber Matrix mit derselben Determinante und gleicher Lösungsmenge im LGS!

$A \rightsquigarrow A^*$

=> Zeilen mit Faktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multiplizieren (Achtung: $\det(A^*) = k \cdot \det(A)$)

=> Zeilen zueinander addieren

=> Zeilen vertauschen (Achtung Vorzeichenwechsel der Determinante)

Bsp: LGS $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ => $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c}$

① => $\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{A|c}$ $\begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array}$ $\overset{②}{\rightsquigarrow}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -8 & -6 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \\ \\ -3\mathrm{II} \end{array}$ $\overset{②}{\rightsquigarrow}$ $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \end{array}$ ↑ lösen

↳ det = Produkt der Diagonalelemente (Achtung: etwaige $(-1)^*$ & λ^*)

③ III: $-2x_3 = -6$ => $x_3 = 3$

II: $-1x_2 - 2 \cdot 3 = 0$ => $x_2 = -6$

I: $x_1 + 2(-6) + 3 \cdot 3 = 2$ => $x_1 = 5$

Bsp: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 11 & 5 & 35 \end{array}\right)$ $|{-1}$ $|{-3}$ $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$ $|{-1}$ $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

↳ Immer erfüllt, auch falls $(0\,0\,0|c)$

wähle $x_3 = t$; $t \in \mathbb{R}$

II: $2x_2 + 2t = 8$ -> $x_2 = 4 - t$

I: $x_1 + 3(4-t) + t = 9$ -> $x_1 = 2t - 3$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 4-t \\ t \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit eines LGS

homogen $\vec{c} = 0$; inhomogen $\vec{c} \neq 0$

(m×n)-LGS

- homogenes (m,n)-System (hier trifft $Rg(A) = Rg(A|c)$ immer zu!)
  - $r = Rg(A) = n$ = # Unbekannte → eine triviale Lösung $x = 0$
  - $r = Rg(A) < n$ → ∞ viele Lsg. mit $(n-r)$-# Parametern
- inhomogenes (m,n)-System
  - $Rg(A) = Rg(A|c) = r$
    - $r = n$ → genau 1 Lsg.
    - $r < n$ → ∞ viele Lsgn. mit $n-r$ fr. Parameter
  - $Rg(A) \neq Rg(A|c)$ → Keine Lösung

(n×n)-LGS

- inhomogenes (n,n)-System
  - $\det(A) \neq 0$ — $r = n$ → genau 1 Lsg. → eindeutige Lsg. für $c \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1} \cdot c$!
  - $\det(A) = 0$
    - $Rg(A) = Rg(A|c) = r < n$ → ∞ viele Lsg. mit $(n-r)$-# Parametern
    - $Rg(A) \neq Rg(A|c)$ → Keine Lsg.
- homogenes (n,n)-System
  - $\det(A) \neq 0$ → eine triviale Lsg. $x = 0$
  - $\det(A) = 0$ → ∞ viele Lsgn. (inkl. triviale Lösung)

-> da wenn $Rg(A) = n$ & $\det \neq 0$ <—> A invertierbar

=> $A \cdot x = c$ genau 1 Lsg mit $x = A^{-1} \cdot c$

Hermetische Matrize

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $A = \bar{A}^T$

- Matrize ist symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale; wobei aber für alle Elemente gilt: $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ (komplex konjugiert)
- Hauptdiagonale nur reelle Zahlen

=> Wenn alle Einträge reell: symmetrisch

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -3i \\ 2-i & 2 & 5 \\ 3i & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Bemerkungen: (zu hermetisch/symm. Matrize)

- Alle Einträge auf Diagonalen sind reell
- Determinante ist reell
- Alle n EW sind reell
- zu k-fachen EW gehören k lin. unabhängige EV
- Es gilt genau n lin. unabh. EV

Linearität

- $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sind linear unabhängig falls einzige Lösung von:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist $\lambda_i = 0$!

- wenn mind. 1 Koeffizient $\alpha_i \neq 0$, sind Vektoren linear abhängig

Linearkombination (LK):

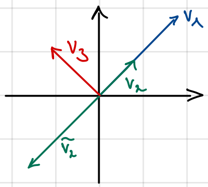
ω heisst LK von $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$ falls:

$$\omega = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

$\rightarrow$ Sind alle n EV $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig, dann ist jeder Vektor ω eine LK von $v_1, v_2, \dots v_n$!

Linearität geometrisch

- v_1, v_2; $v_1, \tilde{v}_2$; $v_2, \tilde{v}_2$ sind linear abhängig
- v_1, v_3 sind linear unabhängig



Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Rang gibt max. # linear unabh. Spaltenvektoren an.

- $(m \times n)$-Matrix:
  - $\rightarrow Rg(A) = r = n \Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit
  - $\rightarrow Rg(A) = r < n \Rightarrow$ lineare Abhängigkeit
- $(n \times n)$-Matrix
  - $\rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit
  - $\rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ lineare Abhängigkeit

$\Rightarrow$ zB.: 3 Vektoren sind linear abhängig falls die Determinante der Matrix aus den 3 Vektl. $= 0$ ist.

$$\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow Rg(A) = n$$
$$\det(A) = 0 \Longleftrightarrow Rg(A) < n$$

Eigenwerte & Eigenvektoren

Falls $\boxed{A \cdot v = \lambda \cdot v}$ mit $v \neq 0$ & $\lambda \in \mathbb{R}$

dann heisst:

1. λ Eigenwert (EW) von A
2. $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor (EV) von A zum EW λ

Berechnung der Eigenwerte

$(n \times n)$-Matrize

- charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$

EW sind die NS davon $\Longleftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda E_n) = 0}$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 0 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

Bem: Bei Dreiecksmatrizen sind die Elemente der Hauptdiagonale die Eigenwerte!

Berechnung der EV:

$(n \times n)$-Matrize

Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i ist der Lösungsvektor dieses homogenen linearen Systems:

$\boxed{(A - \lambda_i E_n) v_i = 0}$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n)$ $\rightarrow$ könnte auch alles hier einsetzen

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$

- EV_1: $A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \\ 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I. } v_1 = v_1 \\ \text{II. } 2v_1 + 3v_2 = v_2 \rightarrow v_2 = -v_1 \end{cases}$

mit $t \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{matrix} v_1 = t \\ v_2 = -t \end{matrix}\right\}$ EV_1: $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- EV_2: $A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I. } 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 3v_1 \\ \text{II. } 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = 3v_2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \rightarrow v_1 = 0 \\ \rightarrow v_2 \text{ beliebig (wird weggekürzt)} \end{matrix}$

mit $s \in \mathbb{R} \rightarrow v_2 = s, v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A - \lambda E_n) v = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Bsp: Sei $v_n = B^n \cdot v_0$; dann konvergiert für jeden v_0 die Folge der Vektoren v_n gegen Nullvektor. $\Rightarrow |\lambda_1|; |\lambda_2|$; etc. anschauen & sehen ob >1; <1 oder $=1$!

Entwicklungsmodelle mit Vektoren & Matrizen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}}_{\text{Zustand zum ZP } k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}}_{\text{Entwicklungsmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}}_{\text{Zustand zum ZP } k}$$

$v_{n+1} = A \cdot v_n \quad | \cdot A^{-1}$

$v_n = A^{-1} \cdot v_{n+1}$

Eigenschaften von EW

- λ ein EW von A zum EV $\vec{v}$ $\Rightarrow 1/\lambda$ ein EW von A^{-1} zum EV $\vec{v}$
- Falls alle n EW versch. sind $\Rightarrow$ existieren n untersch. EV, welche linear unabhängig sind.
- Falls ein EW k-fach auftritt $\Rightarrow$ mind. ein, höchstens k linear abhängige EV
- Falls $\lambda_k = x + iy$ ein komplexer EV ist, so ist $\overline{\lambda_k} = x - iy$ ebenfalls ein EW
- Für eine hermetische oder symmetrische n-reihige Matrize sind alle n EW reell & es gibt genau n linear unabh. EV
- Falls v ein EV von A zum EW $\lambda \Rightarrow \alpha \cdot v$ ein EV von A zum EW λ

Diagonalisierbarkeit einer Matrize

- $A(n \times n)$ diagonalisierbar, wenn: $\underbrace{D}_{\text{Diagonalmatrize}} = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Berechnung:

1. EW λ_i berechnen
2. EV v_i zu allen λ_i bestimmen
3. $D \rightarrow$ Diagonale mit den λ_i: $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$
4. Spaltenvektoren von T sind die EV von A

(Falls Diagonalmatrize existiert, gilt: $A^n = T \cdot D^n T^{-1}$)

Bsp. aufgabe Matrize $A = (\vdots\vdots\vdots)$ gegeben & ein EW λ_1 gegeben.

$\Rightarrow$ Einfach die anderen EW's ausrechnen & λ_1 als Kontrolle verwenden.

Bsp-aufgabe $\Rightarrow$ siehe Seite der komplexen Zahlen.

Anwendung von EV und EW

=> Konvergenzverhalten eines $(n\times n)$ Populationsmodells

$V_{n+1} = A\cdot V_n$

a) Startvektor $\vec{V_0}$ des Modells ist ein EV von A zum EW λ:

-> Falls $|\lambda|<1$: $\lim_{n\to\infty}\vec{V_n} = \lim_{n\to\infty}\lambda^n\cdot V_0 = 0$ Populationen sterben aus

-> Falls $|\lambda|>1$: $\lim_{n\to\infty}\vec{V_n} = \lim_{n\to\infty}\lambda^n\cdot V_0 = \infty$ Populationen wachsen unbegrenzt

b) $\vec{V_1}$ ein EV zu EW λ_1, $\vec{V_2}$ ein EV zu EW λ_2

V_0 = Startvektor mit: $V_0 = \alpha\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\vec{V_2}$

α & β je nachdem wie man V_0 aus V_1 & V_2 kombinieren kann!

$$\Rightarrow V_1 = A\cdot V_0 = A(\alpha\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\vec{V_2}) = \alpha\lambda_1\vec{V_1} + \beta\lambda_2\vec{V_2}$$
$$\vdots$$
$$V_n = \alpha\cdot\lambda_1^n\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\lambda_2^n\cdot\vec{V_2}$$

• Falls $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$: $\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot\lambda_1^n\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\lambda_2^n\cdot\vec{V_2})$
$= 0\cdot\vec{V_1} + 0\cdot\vec{V_2} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ => Pop's sterben aus

• Falls $\lambda_1=1$, $|\lambda_2|<1$: $\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot\lambda_1^n\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\lambda_2^n\cdot\vec{V_2})$
$= 1\cdot\vec{V_1} + 0\cdot\vec{V_2} = \alpha\cdot\vec{V_1}$ => Pop's erreichen GGW $\vec{V_n} = \alpha\cdot\vec{V_1}$

• Falls $\lambda_1>1$, $|\lambda_2|<1$: $\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot\lambda_1^n\cdot\vec{V_1} + \beta\cdot\lambda_2^n\cdot\vec{V_2})$
$= \infty\vec{V_1} + 0\cdot\vec{V_2} = \begin{pmatrix}\infty\\\infty\end{pmatrix}$ => Populationen wachsen unbegrenzt.
- in Richtung $\vec{V_1}$

• Falls $|\lambda_1|>|\lambda_2|$: für jedes $\vec{V_0}$: $\vec{V_0} = \alpha\cdot\vec{V_1} + \beta\vec{V_2}$ nähert sich $\vec{V_1}$
Folge: $\left(\frac{\vec{V_n}}{|\vec{V_n}|}\right)$ konvergiert gegen EV $\frac{\vec{V_1}}{|\vec{V_1}|}$ => Pop's erreichen GGW
$\vec{V_n} = k\cdot\vec{V_1}$
je nach dem was λ_1 ist: $k = \alpha\cdot\lambda_1^n$

Vorausgesetzt die EV sind linear unabhängig; Startvektor wird als LK ausgedrückt.

Bsp: Populationsentwicklung

Betrachte Räuber-Beute Population

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\-3/5 & 13/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

Was passiert mit der Population?

a) $(x_0,y_0) = (4,3)$ b) $(x_0,y_0) = (5,5)$

Nach vielen generationen $(n\to\infty)$?

1/ Finde die EW

$$\det\begin{pmatrix}1/5-\lambda & 2/5\\-3/5 & 13/10-\lambda\end{pmatrix} = (1/5-\lambda)(13/10-\lambda) - (-3/5)\cdot 2/5$$
$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-1/2)$$
$$\Rightarrow \text{EW: } \lambda = \{1, 1/2\}$$

2/ Finde die EV: $Av=\lambda v \Leftrightarrow (A-\lambda E)v=0$

$\lambda=1$: $(A-1E)v=0$ $\left(\begin{array}{cc|c}-4/5 & 2/5 & 0\\-3/5 & 3/10 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=-1/2$: $(A-\frac{1}{2}E)v=0$ $\left(\begin{array}{cc|c}-3/10 & 2/5 & 0\\-3/5 & 8/10 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow v=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

3/ a) $V_n = A^n V_0$ mit $V_0 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$V_n = A^{n-1}\cdot A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\left(A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)$

$= A^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 A^{n-1}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

...

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

=> Population stirbt aus

b) $V_n = A^n V_0$ mit $V_0 = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

Jeder Vektor ist schreibbar als Linearkombination aus EV!

$V_0 = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$V_n = A^n\left(\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

$V_n = A^n\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $Av=\lambda v$

$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + (1)^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} 0\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$V_n = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ -> Population sinkt auf dieses Niveau!

Beispielaufgabe:

Sei $V_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$; $V_{n+1} = A\cdot V_n$

$A = \begin{pmatrix}1/2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$; $EV = \begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}$ => b finden

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1/2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\,b+1\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix}$ => $\lambda=1$

=> $1/2\,b+1 = b$ -> $b=2$

· Geben Sie Startvektor $V_0 \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, sodass V_0, V_1, V_2 zu Nullvektor $V_\infty = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ konvergiert.

① EW finden Da Dreiecksmatrix sind EW: $\lambda=1/2$ & $\lambda=1$

② EV finden EV linear unabhängig

- Von oben: EV zu EW=1 ist $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

EW=1/2: $(A-\lambda\cdot E)v = 0$

$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = 0$ => x_1 kann beliebig sein, $y_1 = 0$!

- EV zu EW=1/2 ist $v_2 = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

③ Konvergenz testen

=> da nur $EW_2 = 1/2 < 1$, stirbt Pop. nur aus (& konvergiert gegen $V_\infty = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$) falls $V_0 = EV_2$ von $EW_2 = 1/2$ ist!

=> $V_0 = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$; $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Bsp.-aufgabe: $B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/2\\0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$; $V_{n+1} = B\cdot V_n$

· Für was für V_0 stirbt Pop aus?

$\Rightarrow B^n\cdot V_0 = \begin{pmatrix}2^n x\\0.5^2 y\\0.5^2 z\end{pmatrix}$ => damit dieser Vektor mit $n\to\infty$ gegen 0 geht muss $x=0$ sein!

=> $V_0 = \begin{pmatrix}0\\t\\s\end{pmatrix}$; $s,t\in\mathbb{R}$

Differentialgleichungen

Grundlagen:

! Konstante C beim integrieren nicht vergessen

- Ordnung: höchst auftretende Ableitung
- stationäre Lösung: $y'(x)=0$; keine Lösung $\Rightarrow y_0$!
- linear: gesuchte Funktion darf nicht als Potenz vorliegen. → Ist in linearer Form

Lösen einer DGL, durch:

- einfache Integration
- Trennung der Variablen/Separationsmethoden ⇒ DGL 1. Ordnung (homogene Lösung von)
- Variation der Konstanten ⇒ inhomogene lineare DGL 1. Ordnung
- Charakteristisches Polynom & Partikulärer Ansatz ⇒ lineare DGL 2. Ordnung

lineare DGL 1. Ordnung

allgemeine Form: $y'(x)=p(x)\cdot y(x)+q(x)$

$q(x)=0$: homogene lineare DGL 1. Ordnung

$q(x)\neq 0$: inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

Allg. Lösung für homogene lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x)=p(x)\cdot y(x) \Rightarrow \boxed{y(x)=K\cdot e^{P(x)}}$ mit $P(x)=\int p(x)\,dx$

(entstanden durch Trennung der Variablen/Separationsmethode)

Allg. Lösung für inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x)=p(x)\cdot y(x)+q(x) \Rightarrow \boxed{y(x)=(K_0(x)+C)e^{P(x)} \quad \text{mit } K_0(x)=\int q(x)\, e^{-P(x)}\,dx}$

$y(x)=y_{homogen}+y_{partikuläre\ Lösung}$

(entstanden durch Variation der Konstanten)

Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung mit Konstanten Koeffizienten

$y'(x)=a\cdot y(x)+b \Rightarrow \boxed{y(x)=K\cdot e^{ax}-\frac{b}{a}}$

wobei stationäre Lösung: $y(x)=-\frac{b}{a}$

Separierbare DGL – DGL (linear & nicht-linear)

$y'(x)=h(x)\cdot g(y(x)) \Rightarrow \boxed{y(x)=G^{-1}(H(x)+c) \quad G(y(x))=H(x)+C}$

wobei $G(y)$ Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$

Bei AWP:

setze in vollständige Lösung y_0 & x_0 ein & löse nach c auf.

⇒ Schreibe Lösung für AWP vollständig!

Variation der Konstanten

– inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x)=p(x)\cdot y(x)+q(x)$; $y(x_0)=y_0$ (für AWP)

① Finde allg. homogene Lösung der DGL.

$\Rightarrow y(x)=K\cdot e^{P(x)}$

② Ersetze K mit K(x). Dieses werden wir so auswählen/berechnen, dass $y(x)=K(x)e^{P(x)}$ die ganze DGL erfüllt

③ Setze $y(x)=K(x)e^{P(x)}$ in inhomogene DGL ein & leite ab:

$$\Rightarrow y'(x)=\left(K(x)e^{P(x)}\right)'=\overbrace{p(x)}^{p(x)}\cdot\overbrace{K(x)e^{P(x)}}^{y(x)}+\overbrace{q(x)}^{q(x)}$$

$$K'(x)e^{P(x)}+\cancel{K(x)\cdot p(x)\cdot e^{P(x)}}=\cancel{p(x)\cdot K(x)e^{P(x)}}+q(x)$$

$$K'(x)e^{P(x)}=q(x)$$

④ Für K(x) auflösen.

$$\Rightarrow K(x)=\int K'(x)\,dx=\int q(x)\cdot e^{-P(x)}\,dx+C$$

⑤ Setze K(x) nun in homogene Lösung ein für die allg. inhomogene Lösung:

$$y(x)=\underbrace{\int q(x)e^{-P(x)}\,dx\cdot e^{P(x)}}_{y_p(x)}+\underbrace{C\cdot e^{P(x)}}_{y_h(x)}$$

Funktionsschaar.

⑥ Falls vorhanden, setze nun AWP $y(x_0)=y_0$ in Lösung ein & finde Konstante C!

Bsp: $y'(x)=x\cdot y(x)+x$

① Betrachte $y'(x)=x\cdot y(x)$; $P(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow y(x)=K\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

② $y(x)=K(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

③ $y'(x)=\left(K(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}\right)'=x\cdot K(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}+x$

$K'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}+\cancel{K(x)\cdot x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}=\cancel{x\cdot K(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}+x$

④ $K(x)=\int x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ $\quad u=-\frac{x^2}{2}$, $u'=\frac{du}{dx}=-x \Rightarrow du=-x\,dx$

$K(x)=-\int e^u\,du=-e^u \Rightarrow K(x)=-e^{-\frac{1}{2}x^2}+C$

⑤ $y(x)=\left(C-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)e^{\frac{1}{2}x^2}$

$y(x)=Ce^{\frac{1}{2}x^2}-1$

⑥ Nun könnte man mit AWP für C lösen!

Trennung der Variablen/Separationsmethode

- DGL 1. Ordnung ggf. homogener Teil.

$y'(x)=h(x)\cdot g(y(x))$; $y(x_0)=y_0$ (für AWP)

① Bestimme $h(x)$ & $g(y(x))$

② Schreibe $y'(x)=\frac{dy(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx}=h(x)\cdot g(y(x))$

③ Bringe alle Ausdrücke mit y(x) auf eine Seite & die mit x auf die andere:

$$\Rightarrow \frac{1}{g(y(x))}\,dy(x)=h(x)\,dx$$

(Möglicherweise gibt es eine Konstante/stationäre Lösung für die gilt: $g(y(x))=0$; schauen wir am Schluss an)

④ Integriere beide Seiten:

$$\Rightarrow \int\frac{1}{g(y(x))}\,dy(x)=\int h(x)\,dx$$

$$\Rightarrow G(y(x))=H(x)+c$$

Falls nötig:
Substitution: $u=y(x)$
$\Rightarrow \frac{du}{dx}=y'(x)=\frac{dy(x)}{dx} \Rightarrow du=dy(x)$
· Integrieren & Rücksubstitution: $G(u)=G(y(x))$

⑤ nach y(x) auflösen & zusätzliche stationäre Lösung mit $g(y(x))=0$ kontrollieren. → dann ist $y'(x)=0$

⑥ Falls vorhanden, setze nun AWP $y(x_0)=y_0$ ein Lösung ein & finde Konstante C!

⇒ dann braucht es keine stat. Lösungsangabe falls das AWP dieses $g(y(x))=0$ nie erreicht (da fester Anfangswert)

Bsp: $y'(x)=x\cdot(y(x))^2$

① $g(y)=y^2$; $h(x)=x$

② $\frac{dy(x)}{dx}=x\cdot(y(x))^2$

③ $\frac{dy(x)}{(y(x))^2}=x\cdot dx$

④ $\int\frac{1}{(y(x))^2}\,dy(x)=\int x\,dx \Rightarrow \int\frac{1}{u^2}\,du=\frac{1}{2}x^2+c$

$-u^{-1}=\frac{1}{2}x^2+c$

$-\frac{1}{y(x)}=\frac{1}{2}x^2+c$

⑤ $y(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+c}$

⑤ $g(y(x))=0$ falls $(y(x))^2=0$ & das ist falls $y(x)=0$

→ Die 2 Lösungen: allg. Lösung & stationäre Lösung der DGL

Bsp: $y'(x)=\frac{e^{2x}}{y(x)}$

① $g(y)=\frac{1}{y(x)}$; $h(x)=e^{2x}$

② $\frac{dy(x)}{dx}=\frac{1}{y(x)}\cdot e^{2x}$

③ $y(x)\cdot dy(x)=e^{2x}\,dx$

④ $\int y(x)\,dy(x)=\int e^{2x}\,dx$

$\frac{1}{2}y^2(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c$

⑤ $y(x)=\pm\sqrt{e^{2x}+C}$

(falls kein AWP, stationäre Lösung:
$g(y(x))=0$ falls $\frac{1}{y(x)}=0 \Rightarrow$ passiert falls $y(x)\to\infty$
⇒ keine stationäre Lösung!

⑥ AWP: $y(0)=-1 \Rightarrow y(x)<0$

$y(0)=-\sqrt{e^0+C}=-1$

$1+C=1 \Rightarrow C=0$

$y(x)=-\sqrt{e^{2x}}=-e^x$

→ $g(y)=0$ falls $y(x)=0$, doch das wird für alle x nie erreicht!

Durch Substitution lösbare DGL

$y' = f(ax+by+c)$ Subst. $u = ax+by+c$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Subst. $u = \frac{y}{x}$

① Führe angegebene Substitution durch

② Integrieren / Lösen der neuen DGL 1. Ordnung für Hilfsfunktion u durch Trennung der Variablen

③ Rücksubstitution und auflösen nach y

Bsp: ① $y' = 1 + 2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)$ Subst.: $u = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \underline{y = x\cdot u}$

$\Rightarrow y' = x\cdot u' + u$

· $y' = u + x\cdot u' = 1 + 2u$

$xu' = 1 + u$

② Trennung der Variablen

$x\cdot\frac{du}{dx} = 1 + u \quad \Rightarrow \int \frac{1}{1+u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \ln(1+u) = \ln(x) + c \quad \Rightarrow u + 1 = c_1\cdot x$

$\Rightarrow u = c_1\cdot x - 1$

③ Rücksubstitution

$y = u\cdot x = x(c_1\cdot x - 1) = \underline{\underline{c_1 x^2 - x}}$

Stationäre Lösung & Stabilität

· stationäre Lösung falls $y'(x) = 0$ —> Im Richtungsfeld das $y' = F(x,y)$ mit  !

- falls $\boxed{y' = f(y) \Rightarrow 0 = f(y_S)}$ mit y_S-stationäre Lösung

· f(y) nach y ableiten & y_S einsetzen:

· $f'(y_S) < 0 \Rightarrow y_S$ stabil

· $f'(y_S) \geq 0 \Rightarrow y_S$ instabil

· zB: falls Frage: $\lim_{x\to\infty} y(x) = \ldots$, dann schauen, welche Werte ... wegen y_S's in Frage kommen & dann schauen, welches y_S stabil ist.

Beispielaufgabe: Stationäre Lösung & Richtungsfeld

DGL mit konstanten Koeffizienten: $y'(x) = -2y(x) + b$

· Richtungsfeld mit horizontalen bei $y = 3$.

$\Rightarrow y(x) = 3 \;;\; y'(x) = 0 \qquad 0 = -2\cdot 3 + b \qquad \underline{\underline{b = 6}}$

$y'(x) = y^2(x) - 1/4$; Stat. Lösung gesucht!

$0 = y^2(x) - 1/4$

$y^2(x) = 1/4 \quad \Rightarrow \underline{y(x) = \pm 1/2}$

Richtungsfeld einer DGL

· Methode um qualitatives Verhalten von Lösungen einer DGL zu beschreiben, ohne Lösung zu kennen.

—> Manche DGL kann man nicht analytisch lösen & man muss die Lösung numerisch approximieren. Bsp: $y'(x) = x^{y(x)}$

gegeben: $y'(x) = F(x, y(x)) \triangleq$ Steigung im Punkt $(x, y(x))$

—> Sei y(x) eine Lösung der DGL, so ist im Punkt x_0 die Steigung $y'(x_0)$ also $F(x_0, y(x_0)) = F(x_0, y_0)$.

=> Wir kennen $y(x_0)$ zwar nicht, können aber $y'(x_0) = F(x_0, y(x_0))$ für alle möglichen Werte von $y(x_0)$ ausrechnen.

· Richtungsfeld der DGL ist ein Graph in dem für jede Koordinate (x,y) die Steigung F(x,y) zuordnen!

=> Mögliche Lösungen der DGL müssen in jedem Punkt die gleiche Steigung haben wie das Richtungsfeld

Euler-Verfahren (zur Konstruktion einer Lsg.)

$y'(x) = F(x,y)$ mit $y_0 = y(x_0)$

· Richtungsfeld gibt an jedem Punkt die Steigung der Tangente der möglichen DGL-Lösung an!

$\Rightarrow \ell(x) = y_0 + F(x_0, y_0)(x - x_0)$

Konstruktion:

1. gl. der Tangente: $\ell(x) = y_0 + F(x_0, y_0)(x - x_0)$

↳ Tangente ℓ approximiert Lsg. f in Nähe x_0: $\ell(x) \sim f(x)$

2. Ein Stück 'h' entlang der Tangente gehen: $x_0 \to x_0 + h = x_1$

$\Rightarrow \ell(x_1) = \ell(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)((x_0 + h) - x_0)$

$\ell(x_1) = y_0 + F(x_0, y_0)\cdot h$

$\ell(x_1) = y_1 \sim f(x_1) \Rightarrow$ Wert für $f(x_1)$ gefunden

—> Man verwendet Tangente um nächsten Punkt $f(x_1)$ zu approximieren

3. Wiederhole Punkt 2 immer wieder:

—> Man verwendet neue Tangente des nächsten Punktes um Punkt 3 ($f(x_2)$) zu approximieren, etc, etc.

=> approximative Lösung der DGL!

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1})\cdot h \quad \to y_n \sim f(x_n)}$$

Stationäre Lösung & Fixpunkte

· x_∞ ist genau dann ein Fixpunkt von f wenn N_∞ eine stationäre Lösung der DGL ist.

Exponentiell

DGL: $N'(t) = r\cdot N(t)$

Lösung: $N(t) = N_0\cdot e^{t}$ (linear) $N_\infty = 0$

Diskretes Analogon: $N_{n+1} = (r+1)N_n$ $x_\infty = 0$

Beschränkt

DGL: $N'(t) = r(K - N(t))$

Lösung: $N(t) = (N_0 - K)e^{-rt} + K$ $N_\infty = K$

Diskretes Analogon: $N_{n+1} = N_n + r(K - N_n)$ $x_\infty = K$

Logistisch

DGL: $N'(t) = r\cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

Lösung: $N(t) = \frac{N_0\cdot K}{N_0 + (K - N_0)\cdot e^{-rt}}$ $N_\infty = 0, K$ $x_\infty = 0, K$

Diskretes Analogon: $N_{n+1} = (r+1)N_n - \frac{r}{K}\cdot N_n^2$

Gompertz

DGL: $N'(t) = r\cdot N(t)\cdot\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$ $N_\infty = K$

Lösung: $N(t) = K\cdot e^{\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)\cdot e^{-rt}\right)}$ $x_\infty = K$

Diskretes Analogon: $N_{n+1} = N_n\left(1 + r\cdot\ln\left(\frac{K}{N_n}\right)\right)$

Zusammenfassung Wachstumskurven

	Asymptote	WP	N''
Exp.	—	—	>0
Beschr.	N=K	—	<0
Logist.	N=K	K/2	>0, <0
Gompertz	N=K	K/e	>0, <0

Lineare DGL 2. Ordnung

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = g(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- $g(x) = 0$: homogen
- $g(x) \neq 0$: inhomogen

Lösung einer homogen lin. DGL 2. Ordnung

$1y'' + ay' + by = 0$

↳ 1. Koeffizient muss $=1$ sein!

① charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

-> löse nach λ_1, λ_2 auf

1) $(a^2 - 4b > 0) \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2) $(a^2 - 4b = 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\alpha \cdot x} + x \cdot C_2 e^{\alpha \cdot x} = e^{\alpha \cdot x}(C_1 + x \cdot C_2)}$$

3) $(a^2 - 4b < 0) \Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2};\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\qquad \lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha \cdot x}(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))}$$

② Anfangsbedingungen einsetzen und so C_1 & C_2 finden.

$$y(x_0) = y_H(x_0)$$
$$y'(x_0) = y_H'(x_0)$$

=> 2 Gleichungen für 2 Unbekannte

③ Endresultat hin schreiben!

Bsp: $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

① charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y_H(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

② $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$$y(0) = 0 = C_1 e^{-2\cdot 0} + C_2 e^{-0} \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = 1 = -2C_1 e^{-2\cdot 0} - C_2 e^{-0} \Rightarrow -2C_1 - C_2 = 1$$

$$2C_2 - C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$
$$C_1 = -1$$

$$\Rightarrow y(x) = -e^{-2x} + e^{-x} = e^{-x} - e^{-2x}$$

Lösung einer inhomogenen lin. DGL 2. Ordnung

$$y_{alle} = y_{homogen} + y_{sp}$$

① $y_{homogen}$ – lösen wie zuvor beschrieben

② y_{sp} – lösen mit folgenden Ansätzen:

$g(x)$	Ansatz $y_p(x)$
e^{cx}	$C_3 e^{cx}$
$ax^2 + bx + c$	$C_{30}x^2 + C_{31}x + C_{32}$
$\sin(cx)$ od. $\cos(cx)$	$C_3 \sin(cx) + C_4 \cos(cx)$

=> Falls Ansatz für $y_p(x)$ schon in homogener Lösung vorkommt: multipliziere Ansatz in $y_p(x)$ mit x!

③ Ansatz in DGL einsetzen & Konstante C_3, C_4, etc. finden:

$$y_p''(x) + a y_p'(x) + b y_p(x) = g(x)$$

④ Resultat: $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

⑤ Mit Anfangsbedingungen C_1 & C_2 finden:

$$y(x_0) = y_H(x_0) + y_p(x_0)$$
$$y'(x_0) = y_H'(x_0) + y_p'(x_0)$$

⑥ Endresultat aufschreiben

Beispielaufgabe: AWP gegeben, nun y_0 finden damit genau 1 WP.

$$y'(x) = (y(x) - 2)(y(x) - 4)\ ;\ y(0) = y_0$$

① stat. Lösungen finden: $\cdot\ y'(x) = 0$ für $\underbrace{y(x) = 2}_{a}$ & $\underbrace{y(x) = 4}_{b}$

② 2. Ableitung & $y''(x) = 0$ berechnen:

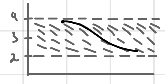
$$y'' = y'(y-4) + (y-2)y' = 2y'(y-3)$$

$\Rightarrow y''(x) = 0$ bei $y = 3, y = 4$ & $y = 2$

③ WP identifizieren: => WP gibt es bei $y = 3$

④ y' (Monotonie) untersuchen auf zB. $y \in \,]a, b[$:

Mit $y'(x) = (y(x) - 2)(y(x) - 4)$ ist Lösungskurve streng monoton fallend.



=> Lösung genau 1 WP wenn $y_0 \in [3, 4[$.

Beispielaufgabe: Mit welchen (x_0, y_0) ist Lösungsfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

$y(x) = \frac{1}{5x^2 + C}$ => alle gegebenen Möglichkeiten ausprobieren

=> hier muss $C > 0$ sein.

Beispielaufgabe: $y'(x)(1 - y(x)) + y(x) = a(1 - y(x))$

- Für jedes $a \in \mathbb{R}$, hat die DGL unendlich viele Lösungen
- Nicht für alle a's mind. 1 stat. Lösung! (für $a = -1$ keine)

↳ $y'(x)(1 - y(x)) + y(x) = -1 + y(x)$

$y'(x)(1 - y(x)) + 1 = 0$ => für stat. Lösung: $y'(x) = 0$

$\Rightarrow 0 + 1 \neq 0$ ↯

- für $a = 2$ ist Lösungsfunktion f der DGL mit AW $y(0) = 2$ monoton wachsend.

$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{y(0)}{1 - y(0)} + a = -\frac{2}{1-2} + 2 = 4 > 0 \quad ✓$$

Systeme linearer DGL

· versch. DGL 1. Ordnung: $* \begin{cases} y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{cases}$

$*$ schreiben als: $y'(t) = A \cdot y(t)$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};\quad y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Allgemein: Sei λ ein EW zum EV v von A, das heisst, es gilt $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Dann ist $y(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot v$ eine Lösung des DGL-Systems $y' = A \cdot y$

Lösung von $y' = A \cdot y$

nxn $\quad A = (n \times n)$ Matrix; $y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$

① Berechne EW λ_i von A

② Berechne EV v_i von A

$\Rightarrow y(x) = e^{\lambda_i x} \cdot v_i$ ist eine Lösung für $i = 1, 2, \dots, n$

③ Überprüfe ob alle EV linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Falls alle EW verschieden sind, sind auch alle EV linear unabhängig.

④ Dann:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \cdot v_n}$$

2x2 $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$

Für ③ & ④ Betrachte EW λ_1, λ_2 von A mit rel.[?] EV v_1, v_2

1) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ & $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \cdot v_2}$$

2) Falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R}$

· wenn v_1, v_2 linear unabh.:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot v_1 + C_2 e^{\alpha x} v_2}$$

· wenn v_1, v_2 nicht linear unabh.

$\Rightarrow$ Verwende DGL 2. Ordnung od. Ansatz Substitution

3) Falls $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$ $\qquad \lambda_1 = \alpha + \beta i;\ v_1 \in \mathbb{C}^2$; $\lambda_2 = \alpha - \beta i;\ v_2 \in \mathbb{C}^2$

$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} \cdot v_1 + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x} \cdot v_2 = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta i x} \cdot v_1 + C_2 e^{-\beta i x} \cdot v\right)}$$

Für reelle Darstellung:

$$\boxed{y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(K_1 \cdot \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)) \\ e^{\alpha x}(L_1 \cdot \cos(\beta x) + L_2 \sin(\beta x)) \end{pmatrix}}$$

Ansatz Substitution

– wenn EV linear abhängig

$y' = A \cdot y$: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

① Löse 1. Gleichung nach y_2 auf & leite ab y_2'

② Setze y_2 & y_2' in 2. Gleichung ein

↳ Wir erhalten charakt. Polynom: Für λ_1, λ_2 lösen

③ allg. homogene Lösung für y_1

↳ Mit Fällen von 2. Ordnung!

④ Mit y_1 & y_1' in 1. Gleichung & für allg. homogene Lösung von y_2 lösen

⑤ Mit Anfangsbedingungen C_1 & C_2 finden

⑥ Resultat: $y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

lineare DGL 2. Ordnung

Qualitatives Lösungsverhalten

Im Richtungsfeld/Vektorfeld:

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

· $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ stabil $\Rightarrow$ Kurve nach Innen

· $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ instabil $\Rightarrow$ Kurve nach aussen

· $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow$ Sattelpunkt $\Rightarrow$ Kurve erreicht Zentrum nicht

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

· $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow$ stabil $\Rightarrow$ Spirale nach Innen

· $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow$ instabil $\Rightarrow$ Spirale nach aussen

· $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow$ Zentrum $\Rightarrow$ Ellipse um Zentrum

· oder mit obiger Variante

$y_1' = 6y_1 - 4y_2$
$y_2' = -3y_1 + 2y_2 \rightarrow y_1 = \frac{2y_2 - y_2'}{3}$ & $y_1' = \frac{2y_2' - y_2''}{3}$

$$\frac{2y_2' - y_2''}{3} = 6\left(\frac{2y_2 - y_2'}{3}\right) - 4y_2$$

$$2y_2' - y_2'' = 12y_2 - 6y_2' - 12y_2 \Rightarrow y_2'' - 8y_2' = 0$$

Lineare DGL 2. Ordnung → (2x2)-System v. DGL

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$$

$$\begin{cases} y'(x) = y'(x) \\ y''(x) = -a y'(x) - b y(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'(x) = A \cdot y(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

(2x2)-DGL-System → lineare DGL 2. Ordnung

Bsp: $\begin{cases} \text{I} & y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) \\ \text{II} & y_2'(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$

I: $2y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) \Rightarrow y_2(x) = \frac{y_1'(x) - y_1(x)}{2}$

$\Rightarrow y_2'(x) = \frac{y_1''(x) - y_1'(x)}{2}$

II $\Rightarrow \underbrace{\frac{y_1''(x) - y_1'(x)}{2}}_{y_2'(t)} = 3y_1(x) + 2\underbrace{\left(\frac{y_1'(x) - y_1(x)}{2}\right)}_{y_2(t)}$

$$y_1''(x) - y_1'(x) = 6y_1(x) + 2y_1'(x) - 2y_1(x)$$

$$y_1''(x) - 3y_1'(x) - 4y_1(x) = 0 \Rightarrow \text{charakt. Polynom}$$

Bsp: $\begin{cases} y_1'(x) = a \cdot y_1(x) + b \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = c \cdot y_1(x) + d\, y_2(x) \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{y''(x) = (a+d) \cdot y'(x) - \det(A) \cdot y(x)}$$

mit $\det(A) = ad - bc$

Bsp.-Aufgabe: $y'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} y(t)$ mit $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$; $y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$

Hinweis: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind EV der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

· allgemeine Lösung: $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 8$; $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

· $y(t) = ?$ für $t \to \infty$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 + 2C_2 \\ C_1 + 3C_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C_1 = 0$; $C_2 = 1 \Rightarrow y(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ stabilisiert sich nach $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

↳ egal welches t!

· 2. Komponente y_2 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die DGL 2. Ordnung: $y_2''(x) - 8y'(x) = 0$

$$y''(x) = (6+2)y'(x) - (6 \cdot 2 - (-3)(-4)) \cdot y(x) = 8y'(x) + 0$$

$$\Rightarrow y''(x) - 8y'(x) = 0 \quad ✓$$

Integralrechnung II - Exkurs

Mittelwert einer Funktion
- f stetig auf I=[a,b]

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$ ≙ arithmetischer Mittelwert

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx$$

Polarkoordinaten:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

Volumen eines Rotationskörpers
(Rotation um x-Achse)

$$\boxed{V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Mantelfläche/Oberfläche eines Rotationskörpers

$$\boxed{A_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{(f'(x))^2+1}\,dx}$$

Bsp: $f: \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

- Inhalt der Fläche unter G_f ist ∞
- Volumen des Rotationskörpers ist π
- Oberfläche " " ist ∞

Flächeninhalt zw. zwei Funktionsgraphen

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$ mit f(x)- obere Funktion f_o, g(x)- untere Funktion f_u

$$|A| = \int_a^b f_o(x)\,dx - \int_a^b f_u(x)\,dx = \int_a^b (f_o(x)-f_u(x))\,dx$$

=> falls sich Funktion $f(x)$ & $g(x)$ schneiden muss man bei Schnittstellen $(s_1, s_2 \ldots)$ Grenzen setzen:

$$|A| = \pm\int_a^{s_1}(f(x)-g(x))\,dx \pm \int_{s_1}^{s_2}(f(x)-g(x))\,dx \pm \int_{s_2}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

- falls $f(x) \to f_o(x)$ dann $+$
- falls $f(x) \to f_u(x)$ dann $-$

} Damit sich die Fläche kummuliert.

Populationsanalytisch:

$g(t)$ - Geburten
$s(t)$ - Sterbefälle
=> Zuwachs: $g(t) - s(t)$

$F(t)$ gibt den Pop-Bestand an zur Zeit t.

- $F'(t) = g(t) - s(t)$ -> Zuwachs zur Zeit t
- $$\boxed{\int_{T_1}^{T_2} F'(t)\,dt = F(T_2) - F(T_1) = \int_{T}^{T_2} (g(t)-s(t))\,dt}$$

↳ Zuwachs zwischen $t=T_1$ & $t=T_2$!

$$\Rightarrow F(T_1) = F(T_0) + \int_{T_1}^{T_2} F'(t)\,dt$$

Mehrdimensionale Analysis

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Funktion f mit:

$f: D \to \mathbb{R}, \; x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

andere Schreibweise: $(x,y) \mapsto f(x,y) = z = 2x + 3y$

Definitionsbereich: Mögliche Werte für (x,y)

Bsp: $f(x,y) = \sqrt{x} + y \to y \in \mathbb{R}, x \geq 0 \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

Wertebereich: alle mögliche $z = f(x,y)$

Bsp: $f(x,y) = x^2 + y^2 = z \to z \geq 0 \Rightarrow W_f = [0, \infty]$

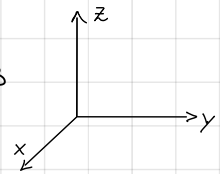
Darstellung/Graph

- Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $G_f \Rightarrow G_f$ nur für $n \leq 2$ zeichenbar
- G_f mit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist Fläche im Raum $\mathbb{R}^3$.

=> Punkt auf Fläche falls: $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

=> Über dem Punkt (x_0,y_0) in xy-Ebene liegt Punkt (x_0, y_0, z_0) mit $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\} \in \mathbb{R}^3$$



=> Punkt auf dem Graph hat Koordinate: $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Besondere Funktionen

-> **lineare Funktionen**: Ebene im Raum

$z = f(x,y) = ax + by + c$

yz-Ebene -> $x=0$; xy-Ebene -> $z=0$; xz-Ebene -> $y=0$

-> **Halbkugel**: Radius R, $C(x_M, y_M, z_M)$

- Kugel: $(x-x_M)^2 + (y+y_M)^2 + (z-z_M)^2 = R^2$?
- obere/untere Halbkugel:

$$f(x,y) = z = z \pm \sqrt{z_M^2 - ((x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 + z_M^2 - R^2)}$$

Niveaulinien

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine feste Höhe von G_f. Alle Punkte $(x,y) \in D$, welche gleiche z-Koordinate: $f(x,y) = c$ liefern liegen auf einer Kurve in der (x,y)-Ebene.
Diese definieren Niveaulinie/-kurve/Höhenlinie zu c!

Berechnung:

① Löse $f(x,y) = c$ nach y auf (gibt oft mehrere Lösungen)
② Zeichne die Funktionen $y(x)$ auf xy-Ebene auf.

Bsp1: $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x,y) = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$
-> Kreis mit Radius 4!

Bsp2: $f(x,y) = 2x + y, \; c = 2 \Rightarrow 2x + y = 2 \Rightarrow y = -2x + 2$

Partielle Ableitungen

gegeben: $(x,y) \to f(x,y)$

- nach jeweiliger Variable ableiten & die anderen als Konstanten behandeln

$$\boxed{f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}} \quad \Bigg| \; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0,y_0)$$

$$\boxed{f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} \quad \Bigg| \; \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0} = f_y(x_0,y_0)$$

-> Falls limes existiert, heisst f partiell diff-bar nach x/y in (x_0,y_0)
-> Falls f partiell diff-bar für jedes (x_0,y_0) dann heisst f diff-bar

höhere Ableitungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} f_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} & f_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y} \\[2ex] f_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y) & \end{array}}$$

Bem: Falls die Ableitungen n-ter Ordnung existieren & stetig sind so spielt Reihenfolge der Diffschritte keine Rolle

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

Extrema

① Finde kritische Punkte von $f(x,y)$: (notwendiges Kriterium)

$\boxed{f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0}$ => Punkt (x_0,y_0) heisst kritischer Punkt

② $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ existieren & sind stetig

③ Berechne für jeden kritischen Punkt ($P=(x_0,y_0)$) D:

$$\boxed{D = f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - \left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2}$$

- $D>0$: => lokales Extrema
  - $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ => Maximum
  - $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ => Minimum
- $D<0$: => Sattelpunkt
- $D=0$: => keine Entscheidung möglich

④ Ränder & nicht-diff.bare Stellen überprüfen!

Globales Extremum

1) bei lokalem Extremum
2) Punkte auf dem Rand oder Ecken
3) Punkte wo $f(x,y)$ nicht differenzierbar

=> für gl. Extrema, alle diese Punkte separat untersuchen & manuell vergleichen!

Tangentialebene

· f ist in Nähe von (x_0,y_0) durch $\ell(x)$ approximiert.

$$\boxed{z = \ell(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

Tangentialebene ist dann:

$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ell(x,y)=z\}$ tangent zu:

$G_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y)=z\}$

Bem: Bei kritischen Punkten ($f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$) von f gilt: $\ell(x,y)=f(x_0,y_0)=$ Konstant.

—> horizontale Tangentialebene

Verallgemeinerte Kettenregel

Bisher: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y)\mapsto f(x,y)$

—> oft sind x & y abhängig von Parameter: $x=x(t)$; $y=y(t)$

· manchmal auch von mehreren Parametern: $x=x(t,s)$; $y=y(t,s)$ abhängig

Ein Parameter

$\gamma: t \mapsto (x(t), y(t))$

$f(\gamma(t)) = F: \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$; $f: (x(t),y(t)) \mapsto f(x(t),y(t))$

—> $f(x(t),y(t)) = f(\gamma(t)) = F(t)$

$$\boxed{F'(t) = f(\gamma(t))' = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\text{äussere Abl.}}\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{\text{innere Abl.}} = \begin{bmatrix} f_x(x(t),y(t)) \\ f_y(x(t),y(t))\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{bmatrix} \begin{matrix}\text{- nach } x \\ \text{- nach } y\end{matrix}}$$

$$F'(t) = f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

=> gleiches gilt auch falls x & y verknüpft sind.

· gleich lösen & am Schluss y od. x durch Verknüpfung ersetzen

Zwei Parameter

$F(t) = f(\gamma(s,t))$ $\qquad \gamma(s,t) = [x(s,t), y(s,t)]$

$$\boxed{F_s(s,t) = \nabla f(\gamma(s,t))\cdot\gamma_s(s,t) = \begin{bmatrix} f_x(x(s,t),y(s,t)) \\ f_y(x(s,t),y(s,t))\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_s(s,t) \\ y_s(s,t)\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{F_t(s,t) = \nabla f(\gamma(s,t))\cdot\gamma_t(s,t) = \begin{bmatrix} f_x(x(s,t),y(s,t)) \\ f_y(x(s,t),y(s,t))\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_t(s,t) \\ y_t(s,t)\end{bmatrix}}$$

Implizite Differentiation

Tangente der Niveaulinie in (x_0,y_0)

Niveaulinie!

=> oft nicht einfach Funktion nach y aufzulösen

↳ hiermit muss man nicht nach y auflösen

gegeben: Funktion in impliziter Schreibweise: $F(x,y)=0$

① Finde Punkt $P=(x_0,y_0)$. (Muss auf $F(x,y)=0$ liegen)

↳ oft gegeben

② Ableitung am Punkt P / Steigung der Tangente von G_f in (x_0,y_0):

$$\boxed{y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}}$$

③ Mit $P=(x_0,y_0)$ & $y'(x_0)$ die Gleichung der Tangente vollständig finden.

Gebietsintegral

① Zeichne das Gebiet und finde anhand von der Zeichnung die obere & untere Grenze der x-Achse

od. Finde Schnittpunkte der Funktionen, welche Gebiet begrenzen

$x: [a,b]$

② Finde in Abhängigkeit von x obere & untere Grenze von y: $[f_u(x), f_o(x)]$ —> Funktionen

③ Berechne Integral:

äusseres Integral nach x

Inneres Integral nach y (x const.)

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

—> zuerst innere Abl. nach y & dann äussere Abl. nach x

—> Entspricht Integral über $\boxed{B = \{(x,y) \mid a\le x\le b,\ f_u(x)\le y\le f_o(x)\}}$

Spezialfall Flächeninhalt/-berechnung $f(x,y)=1$ $\qquad \boxed{|B| = \iint_B 1\,dA}$

Intuition:

· Wenn $f(x,y) \triangleq$ Temperatur dann ist Gebietsintegral geteilt durch Fläche des Gebiets die Durchschnittstemp.

· Wenn $f(x,y) \triangleq$ Höhe dann ist Gebietsintegral das Volumen zw. Oberfläche & xy-Ebene.

Gebietsintegral in Polarkoordinaten

—> falls schwierig mit kartesischen Koordinaten

① Finde (z.B. durch Zeichnung) obere & untere Grenze des Winkels $\varphi: [\varphi_1, \varphi_2]$

② Finde in Abhängigkeit von φ die innere & äussere Grenze von r $[r_i(\varphi), r_a(\varphi)]$ => Randkurven!

③ Setze für $x=\cos(\varphi)$ & $y=\cos(\varphi)$ & multipliziere Funktion mit r!

④ Berechne Integral

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r\cdot f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))\,dr\,d\varphi}$$

Integrationsbereich: $\boxed{B = \{(\varphi,r) \mid \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2;\ r_i(\varphi)\le r\le r_a(\varphi)\}}$

Flächenintegral in Polar: $\boxed{|B| = \iint_B r\,dr\,d\varphi}$

Volumenintegral

① Finde obere & untere Grenze der x-Achse: $[a,b]$

② Finde in Abhängigkeit von x obere & untere Grenze von y: $[f_u(x), f_o(x)]$

③ Finde in Abhängigkeit von x & y obere & untere Grenze von z: $[h_u(x,y), h_o(x,y)]$

④ Berechne Integral (nach z, dann y, dann x):

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{h_u(x,y)}^{h_o(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}$$

$$B = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b;\ f_u(x) \le y \le f_o(x);\ h_u(x,y) \le z \le h_o(x,y)\}$$

Spezialfall Volumenberechnung

$f(x,y,z) = 1$

$$\boxed{Vol(B) = \iiint_B 1\,dV}$$

Bem: Falls h_o, h_u, f_o, f_u Konstanten sind (nicht von x od. y abhängen), kann man das Integral tauschen:

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

Intuition:

- Wenn $f(x,y,z)$ Dichte des Körpers am jeweiligen Punkt (x,y,z) dann ist Volumenintegral die Gesamtmasse des Körpers. => zB. Schwamm, der unterschiedl. feucht ist
  -> feuchter (grosses $f(x,y,z)$); weniger nass (kleines $f(x,y,z)$)

Volumenintegral in Zylinderkoordinaten

1. $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$; $r_i(\theta) \le r \le r_a(\theta)$ & $h_u(x,y) \le z \le h_o(x,y)$
2. $$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta} \int_{r_i(\theta)}^{r_a(\theta)} \int_{h_u(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta))}^{h_o(r\cdot\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta))} r \cdot f(r\cos(\theta), r\cdot\sin(\theta), z)\,dz\,dr\,d\theta$$

Volumen: $Vol(B) = \iiint_B r\,dV$

Volumenintegral in Kugelkoordinaten

1. $0 \le \theta \le 2\pi$; $0 \le \phi \le \pi$; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
   => $a \le r \le b$; $\alpha \le \theta \le \beta$; $\gamma \le \phi \le \delta$
2. $$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \int_a^b r^2 \sin\theta\, f(r\cos\phi \sin\theta;\ r \sin\phi \sin\theta;\ r\cos\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Volumen: $Vol(B) = \iiint_B r^2 \cdot \sin\theta\,dV$

Vektoranalysis

Parametrisierung

· Parabel: $y = a(x-d)^2 + e$ mit $S(d,e)$

- Kleines Teilchen, welches Position im Laufe der Zeit ändert
  $\gamma(t): I \to \mathbb{R}^2 \quad I = [a,b]$
- Input ist Zeitintervall $I = [a,b]$ (oft $[0,1]$)
- als Output gibt Funktion die Position des Teilchens abhängigen von t im Zeitintervall $[a,b]$
  => $v(t) = \gamma'(t)$ wäre dann Geschw. des Teilchens

Fall 1: Intervall frei wählbar

Gerade: x_1 - Anfangspunkt; x_2 - Endpunkt; Intervall $[a,b]$
=> Wähle: $a = 0$ & $b = 1$ $\quad \gamma(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$

Kreis: Mittelpunkt - x_m; Startwinkel - ϕ_1; Endwinkel - ϕ_2; Radius - r
Intervall $[a,b]$
=> Wähle: $a = \phi_1$ & $b = \phi_2$ $\quad \gamma(t) = x_m + \begin{bmatrix} r\cdot\cos(t) \\ r\cdot\sin(t) \end{bmatrix}$

Funktion f(x): $x = t$; $y = f(x)$; Intervall $[a,b]$
=> Wähle a = Startwert x-Achse
b = Endwert x-Achse $\quad \gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$

Parametrisierung umkehren – rückwärts laufen zu lassen

$t \to a+b-t$ => Bsp: $t^3 \to (a+b-t)^3$

mit a&b - gewählten Parametrisierungsgrenzen

Fall 2: Intervall nicht frei wählbar

Gerade: $\gamma(t) = x_1 + \frac{t-a}{b-a}(x_2 - x_1)$

Kreis: $\gamma(t) = x_m + \begin{bmatrix} r\cdot\cos(\phi_1 + \frac{t-a}{b-a}(\phi_2 - \phi_1)) \\ r\cdot\sin(\phi_1 + \frac{t-a}{b-a}(\phi_2 - \phi_1)) \end{bmatrix}$

-> hier egal ob $\phi_1 > \phi_2$! => Richtung automatisch

Funktion f(x): $y = f(x)$; Startwert auf I: x_1; Endwert auf I: x_2

$\gamma(t) = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{t-a}{b-a}(x_2 - x_1) \\ f(x_1 + \frac{t-a}{b-a}(x_2 - x_1)) \end{bmatrix}$

-> hier egal ob $x_1 > x_2$ => Richtung automatisch

Parametrisierung umkehren – rückwärts laufen zu lassen

$t \to a+b-t$

mit a&b - gewählten Parametrisierungsgrenzen

Kurven

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^{2,3} \qquad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$

Betrag: $|\gamma(t)| = \sqrt{(\gamma_1(t))^2 + (\gamma_2(t))^2}$ | **Ableitung:** $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$

Kurvenintegral

=> summiert Funktionswerte von $f(x)$ über Linie γ auf!

① Finde Parametrisierung von $\gamma(t)$

② Berechne Ableitung nach dt von $\gamma(t)$: $\to \gamma'(t)$

③ Berechne Vektorlänge dieser Ableitung $\quad \boxed{f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))}$
$|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + \ldots}$

④ Berechne Integral: $\boxed{\int_\gamma f(x)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt}$

Intuition: für $f(x,y)$ ist es die Fläche der "Mauer" zwischen Pfad $\gamma(t)$ & Oberfläche $f(x,y)$

Regel: · Wenn Pfad γ sich in Teilpfade γ_1 & γ_2 aufteilen lässt, gilt für Integral:

$$\int_\gamma f(x)\,ds = \int_{\gamma_1} f(x)\,ds + \int_{\gamma_2} f(x)\,ds$$

Längenberechnung: $f(x,y\ldots) = 1 \Rightarrow f(\gamma(t)) = 1$
$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

Vektorfeld

- Eine Funktion, mit gleich vielen Inputs wie Outputs
  $K(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

Wir ordnen jedem Punkt einen Vektor mit Richtung & Betrag zu.

Interpretation: Kraftfeld; Flüssigkeitsfeld; Magnetfeld

Bsp: $K(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$

1. Funktion $K: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} K_1(x,y) \\ K_2(x,y) \end{pmatrix}$
   => ebenes Vektorfeld
2. Funktion $K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} K_1(x,y,z) \\ K_2(x,y,z) \\ K_3(x,y,z) \end{pmatrix}$
   => räumliches Vektorfeld

Gradientenfeld

· Vektorfeld, wenn man an jedem Punkt den Gradienten von $f(x,y..)$ berechnet: $\nabla f(x,y,...)$

$$\boxed{\text{grad } f(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}}$$

Konservatives Vektorfeld

· Gradientenfeld welches aus einer Potentialfunktion $f(x)$ entstanden ist. $K(x) = \nabla f(x)$

Vektorfeld konservativ? $\boxed{K = (K_1, K_2) = (f_x, f_y)}$!

Ja, wenn: $$\boxed{\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial K_2(x,y)}{\partial x}}$$

Potentialfeld finden

$K(x,y) = (K_1(x,y), K_2(x,y))$

① Überprüfe ob $K(x,y)$ konservativ: $\boxed{K_{1y}(x,y) = K_{2x}(x,y)}$

② Bestimme:

$$f_1(x,y) = \int K_1(x,y)\,dx \qquad f_2(x,y) = \int K_2(x,y)\,dy$$

③ Vergleiche alle Summanden von f_1 & f_2

④ Addiere zu $f_1(x,y)$ alle Summanden von $f_2(x,y)$ dazu, welche nicht in $f_1(x,y)$ vorhanden sind

⑤ Integrationskonstante nicht vergessen (+C)

Eigenschaften von konservativen Vektorfeldern

1. Es existiert Potentialfunktion f so, dass $K = \nabla f$
2. $\int_\gamma K\,d\gamma$ ist unabhängig von γ (Anfangs- & Endpunkt wichtig)
3. $\int_\gamma K\,d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$
4. $\oint_\gamma K\,d\gamma = 0$ für alle geschlossenen Pfade
5. $K_{1y} = K_{2x}$

$\Rightarrow \int_\gamma K\,d\gamma \rightarrow$ Linienintegral im Vektorfeld

↳ checken ob konservativ

· oder mit Satz von Green!

Bsp: Sei $K(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$; Sei γ eine Kurve in (x,y)-Ebene von $(0,1)$ bis $(3,6)$

Berechne Arbeit $\int_\gamma K\,d\gamma$

① $K_{1y} = 0 = K_{2x} \Rightarrow$ konservatives Vektorfeld

② unbestimmte Integrale: $f_1(x,y) = \int K_1(x,y)\,dx = x^2$

$f_2(x,y) = \int K_2(x,y)\,dy = y^2$

③ & ④ $f(x,y) = x^2 + y^2 + C$

⑤ $\int_\gamma K\,d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(3,6) - f(0,1)$

$= (3^2 + 6^2 + C) - (0^2 + 1^2 + C) = \underline{44}$

mit: · $\gamma(b) \rightarrow f(x_b, y_b) \rightarrow$ Funktionswert bei Punkt $(x_0, y_0) = b$

Divergenz

– zB. Mass wie viel Flüssigkeit an einem Punkt dazukommt od. verschwindet

$$\boxed{\text{div}(K(x)) = \nabla \cdot K(x)}$$

$$\boxed{\text{div}(K(x,y,z)) = \frac{\partial K_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial K_2(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial K_3(x,y)}{\partial z} = K_{1x} + K_{2y} + K_{3z}}$$

↳ In 2 Dimensionen analog einfach ohne z & K_3!

Rotation

– zB. Mass wie sehr sich Flüssigkeit um ein Punkt dreht.

$$\boxed{\text{rot}(K(x,y)) = \nabla \times K(x)}$$

· In 2D sagt uns Rotation wie schnell sich Flüssigkeit gegen den Uhrzeigersinn dreht.

$$\boxed{\text{rot}(K(x,y)) = \frac{\partial K_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial K_1(x,y)}{\partial y} = K_{2x} - K_{1y}}$$

In 3D ein Vektor der uns Rotationsachse angibt

$$\nabla \times K(x,y,z) = \begin{bmatrix} K_{3y} - K_{2z} \\ K_{1z} - K_{3x} \\ K_{2x} - K_{1y} \end{bmatrix}$$

Bsp: $K(x,y) = \left(-y - \frac{x}{2};\ x - \frac{y}{2}\right)$; $(0,0)$

Divergenz: $\nabla \cdot K(x,y) = \frac{\partial(-y - \frac{x}{2})}{\partial x} + \frac{\partial(x - \frac{y}{2})}{\partial y} = -y - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}$

$= \underline{-1}$

Rotation: $\text{rot}(K(x,y)) = \frac{\partial(x - \frac{y}{2})}{\partial x} - \frac{\partial(-y - \frac{x}{2})}{\partial y} = 1 - \frac{y}{2} + 1 - \frac{x}{2}$

$= \underline{2}$

Kurvenintegral eines Vektorfelds/Kurven-Arbeits-Integral

· Arbeit, welches von Teilchen in Vektorfeld verrichtet wird

① Finde Parametrisierung von $\gamma(t)$

② Berechne die Ableitung nach dt von $\gamma(t) \rightarrow \gamma'(t)$

③ Berechne: $$\boxed{\int_\gamma K\,d\gamma = \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$ oft gegeben!

$\Rightarrow$ lässt sich in Teilpfade aufteilen

Für x, dy von K, das $\binom{x}{y}$ von $\gamma(t)$ einsetzen!

$$\boxed{K(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} K_1(\gamma(t)) \\ K_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}}$$

Satz von Green

$\Rightarrow$ Nur in 2D Vektorfeld

· Trick um gewisse Weg-Arbeits-Integralberechnungen zu vereinfachen. $\Rightarrow$ Manchmal möchte man lieber Gebietsintegral berechnen.

(K muss nicht konservativ sein)

$$\boxed{\oint_\gamma K(x,y)\,d\gamma = \iint_B \text{rot}(K(x,y))\,dA}$$

Nur falls:
1. $\gamma(t)$ Rand von B im Gegenuhrz. parametrisiert
2. $\gamma(t)$ eine geschlossene Kurve ist
3. $\gamma(t)$ sich nicht kreuzt od. Sprünge macht
4. es sich um Kurven-Arbeits-Integral handelt.

Ebenes Flussintegral

– zB. wie viel Flüssigkeit durch den mit γ parametrisierten Rand fliesst. (an best. Punkt)

↳ lässt sich in Teilpfade aufteilen!

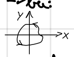
① Parametrisierung von $\gamma(t)$

② Berechne Ableitung nach dt von $\gamma(t) \rightarrow \gamma'(t)$

③ Vertausche Einträge von $\gamma'(t)$ & füge danach unten ein Minus hinzu

↳ Normalenvektor $$\boxed{\vec{n}(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}}$$ → Rechtehandregel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix}$ zu finden damit Fluss pos.

→ bei:



$n_3 = 1$

④ Berechne:

(K gegeben)

$$\boxed{\int_\gamma K \cdot n\,ds = \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \begin{bmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{bmatrix} dt}$$

Gesamtmenge Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch γ

$$\oint_\gamma K \cdot n\,ds = \int_a^b (K \cdot n)(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\boxed{= \int_a^b \begin{pmatrix} K_1(\gamma(t)) \\ K_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ -y'(t) \end{pmatrix} dt}$$

· $\oint_\gamma K \cdot n\,ds > 0 \Rightarrow$ mehr in Richtung $\vec{n}$

" $< 0 \Rightarrow$ mehr entgegen von $\vec{n}$

" $= 0 \Rightarrow$ gleich viel

Ebener Satz von Gauss
(K muss nicht konservativ sein)

· vereinfacht Flussintegral

$$\boxed{\oint_{\gamma} K(x,y)\cdot n\, ds = \iint_B div(K(x,y))\, dA}$$

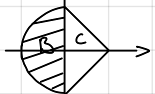
Nur falls:
1. $\gamma(t)$ Rand von B im gegenuhrz. parametrisiert
2. $\gamma(t)$ eine geschlossene Kurve ist
3. $\gamma(t)$ sich nicht kreuzt od. Sprünge macht
4. es sich um ebenes Flussintegral handelt.

rechte Seite: Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit in B durch Quellen erzeugt wird/durch Senken verschwindet

linke Seite: Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Randkurve $\gamma = \partial B$ fließt.

Beispielfrage: Gebiete beschreiben

=> Innere Funktionen verwenden!



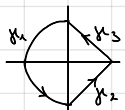
B in Polar Koordinaten: $B=\{(r,\varphi) \mid \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}; 0\le r\le 1\}$

C in kartesischen Koordinaten: $C=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1; -1+x\le y\le 1-x\}$

Gebietsintegral ausrechnen: $\iint_C h(x,y)\,dA$ mit $h(x,y)=1-y$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_{-1+x}^{1-x} 1-y\; dy\,dx$$

Beispielfrage: Parametrisierung



· $\gamma_3(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$, $t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

· $\gamma_3(t)$ umgekehrt: $\gamma_3 = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-t)\\ \sin(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\pi-t)\\ \sin(2\pi-t)\end{pmatrix}$

Trick Kurven-Arbeits-Integral

siehe S.19, Mitte, oben für 1.

=> Parametrisierung, resp. Weg ist egal!

1. Prüfen ob Vektorfeld konservativ; Potentialfunktionen finden; $\oint_\gamma = f(b)-f(a)$
2. Geradlinige Verbindung zw. den 2 Punkten parametrisieren & Kurvenintegral berechnen!

Beispielaufgabe: Flussintegral & Ebener Satz von Gauss

Sei $K(x,y)=\begin{pmatrix}8x-2xy\\ -y^2+a\cdot y\end{pmatrix}$ Gebiet aus *

① i) Bestimme a sodass $\oint_\gamma K\cdot n\, ds=0$.

$$\oint_\gamma K\cdot n\,ds = \iint_B div(K(x,y))\,dA = \iint_B 8-2y-2y+a\,dA = (8+a)\iint_B 1\,dA = 0$$

$\Rightarrow$ Da $\iint_B 1\,dA \ne 0$ muss $\underline{a=-8}$

ii) Bestimme a sodass $\oint_\gamma K\cdot n\,ds = \pi+2$

$(8+a)\iint_B 1\,dA = \pi+2$; mit $\iint_B 1\,dA = \frac{\pi}{2}+1$ $(A_{Kreis}+A_{Dreieck})$

$\Rightarrow (8+a)(\frac{\pi}{2}+1)=\pi+2 \Rightarrow 8+a=\frac{\pi+2}{\frac{\pi}{2}+1}=2 \Rightarrow \underline{a=-6}$

② | -> Flächen mit Integral rechnen

γ_1: $\{(r,\varphi) \mid \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}; 0\le r\le 1\}$

$\gamma_2 \& \gamma_3$: $\{(x,y) \mid 0\le x\le 1; -1+x<y\le 1-x\}$

$$\iint_B 1\,dA = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi + \int_{0}^{1}\int_{-1+x}^{1-x} 1\,dx\,dy = \dots$$

Beispielaufgabe: Gebietsintegral in Polarkoord. umwandeln

siehe S.17 unten rechts für ① & ②

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\}$; $\iint_B \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

③ Setze für $x=\cos(\varphi)$ & $y=\cos(\varphi)$ & multiplziere Funktion mit r!

$1\le r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\le 4 \Rightarrow 1\le r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}\le 4$

$\Rightarrow 1\le r^2\le 4 \Rightarrow \underline{1\le r\le 2}$; Kreis: $\underline{0\le\varphi\le 2\pi}$

④ Berechne Integral

$$\boxed{\iint_B f(x,y)\,dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\cdot f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi))\,dr\,d\varphi}$$

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r}\,dr\,d\varphi$$

... etc.

Beispielaufgabe: Kurvenintegral von Vektorfeld längs γ

Sei: $\vec{K}(x,y)=\begin{pmatrix}y\\ 3x\end{pmatrix}$; $\gamma(t)=\begin{pmatrix}-t\\ \cos^2(t)\end{pmatrix}$; $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

↳ von Parametrisierung!

=> Formel für Kurvenintegral: $\boxed{\int_\gamma K\,d\gamma = \int_a^b K(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt}$

① Finde $\boxed{K(\gamma(t))=\begin{pmatrix}K_1(\gamma(t))\\ K_2(\gamma(t))\end{pmatrix}}$: $K(\gamma(t))=\begin{pmatrix}\cos^2(t)\\ -3t\end{pmatrix}$

② Finde $\gamma'(t)$: $\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-1\\ -2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

③ Finde a & b : a ≙ untere Grenze $=-\frac{\pi}{2}$; b ≙ obere Grenze $=\frac{\pi}{2}$

③ Einsetzen: $\int_\gamma K\,d\gamma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{pmatrix}\cos^2(t)\\ -3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\end{pmatrix}dt$

... etc.

Beispielaufgabe: $F(x,y)=x^2-y^2-3xy+1$

=> Kurve in der (x,y)-Ebene sei gegeben durch die Bedingung $F(x,y)=0$!

i) Finde Schnittpunkte der Kurve mit Geraden $y=-x-1$

· Einsetzen: $x^2-(-x-1)^2-3x(-x-1)+1=0$

$x^2-(x^2+2x+1)+3x^2+3x+1 = 3x^2+x = x(3x+1)=0$

$x_1=0; y=-0-1=-1 \Rightarrow (0,-1) \mid x_2=-\frac{1}{3}; y=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}$

ii) Finden sie Tangente an die Kurve im Punkt (0,-1)

$y'(0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2\cdot 0+3}{-2(-1)-0} = -\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+q \Rightarrow$ mit (0,-1): $\underline{y=-\frac{3}{2}x-1}$

Beispielaufgabe Ebenes Flussintegral

$K(x,y)=\begin{pmatrix}2x+2xy\\ -y^2+x\end{pmatrix}$; Teilstück eines Gebiets: $\gamma_3(t)=\begin{pmatrix}2-t\\ 2-t\end{pmatrix}$; $0\le t\le 2$

$$\int_{\gamma_3} K\cdot n\cdot ds = \int_0^2 \begin{pmatrix}2(2-t)+2(2-t)^2\\ -(2-t)^2+(2-t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(2-t)'\\ -(2-t)'\end{pmatrix}dt$$

$$=\int_0^2\begin{pmatrix}2t^2+10t+12\\ -t^2+3t-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}dt = \int_0^2 -3t^2+13t-14\,dt = \underline{-10}$$

=> Ganzes Gebiet ist aus γ_1, γ_2 & γ_3 zusammengesetzt.

Gesamt: $\oint_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} K\cdot n\cdot ds = \int_{\gamma_1} K\cdot n\cdot ds + \int_{\gamma_2} K\cdot n\cdot ds + \int_{\gamma_3} K\cdot n\cdot ds$