Mathematik III

Valentin Baumann

Wichtiger als Gold

PDE

DGL	Allgemeine Lösung
$y'(x) = \lambda y(x)$	$y(x) = Ae^{\lambda x}$
$y''(x) = -\omega^2 y(x)$	$y(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$
$y''(x) = \omega^2 y(x)$	$y(x) = A\sinh(\omega x) + B\cosh(\omega x)$
$y''(x) = \omega^2 y(x)$ (alternative)	$y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$

Diagonalisierung

$$A = TDT^{-1}$$
$$A^n = TD^nT^{-1}$$

Matrixexponential

$$e^{At} = T \cdot e^{Dt} \cdot T^{-1}$$

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle$$
$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ (für Funktionen)}$$

Reelle Fourier-Reihen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$$

Komplexe Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt$$

Fourier Tricks

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0$$

Orthogonale Projektion

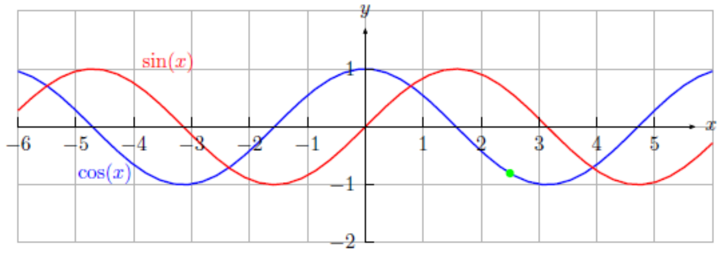
$$z = P(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i e_i, \text{ mit: } c_i = \langle x, e_i \rangle$$

Basics und Formeln

Sinus/Cosinus

sin(x) ist ungerade $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

cos(x) ist gerade $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$



φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

φ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$
Grad	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$
$\sin(\varphi)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos(\varphi)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1

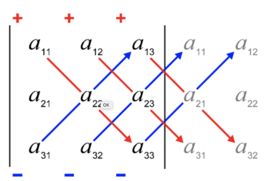
Determinante

Determinante einer 2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = ad - cb$$

Determinante einer 3x3 Matrix

Man addiert also einfach die roten Diagonalen und subtrahiert die blauen.



$\det(A) \neq 0$: regulär $\det(A) = 0$: singulär

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Wichtige Regeln

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Matrix Inverse 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ableitungen

Funktion	Ableitung
k	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
a^x	$\ln(a)a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$1/(1+x^2))$
$\log(\mid x \mid)$	$1/x$

Regeln

Name	Ableitung
Linearität:	$h'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
Produktregel:	$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel:	$h'(x) = (f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))/g^2(x)$
Kettenregel:	$h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Integrale

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
k	$kx + C$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$
$1/x$	$\ln \mid x \mid + C$
$1/(x+k)$	$\ln \mid x+k \mid + C$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$e^{kx}/k + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$
$\sin(kx)$	$-\cos(kx)/k + C$
$\cos(kx)$	$\sin(kx)/k + C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x) + C$
$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x) + C$
$1/(1+x^2)$	$\arctan(x) + C$

Regeln

Partielle Integration

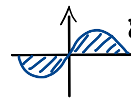
$$\int (f'(x) \cdot g(x))dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int (f(x) \cdot g'(x))dx$$

Top Secret Substitutions-Trick

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln \mid f(x) \mid + C$$

Gerade und Ungerade

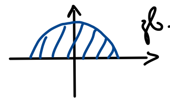
Für **ungerade** Funktionen (Punktsymmetrisch: $f(x) = -f(-x)$)



zB. sin(x)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Für **gerade** Funktionen (Achsensymmetrisch: $f(x) = f(-x)$)



zB. cos(x)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

Verschiedene Funktionen

Ungerade Funktionen

$$\sin(x), x, x^3, \ldots, x^{2n-1}$$

Gerade Funktionen

$$\cos(x), 1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$$

ODE

Wir wollen eine Lösung für folgende Gleichungen finden:

$$y(x)'' + ay(x)' + by(x) = 0, \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{d0}$$

Dazu verwenden wir folgenden Ansatz:
1) Zuerst finden wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Nun unterscheiden wir 3 Fälle:

Fall 1: $(a^2 - 4b > 0) \implies \lambda_1 \neq \lambda_2$ reell

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Fall 2: $(a^2 - 4b = 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2$ reell

$$y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$$

Fall 3: $(a^2 - 4b < 0) \implies \lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ komplex

$$y_H(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

2) Anfangsbedingungen einsetzen, Konstanten C_1 und C_2 finden.

$$y(x_0) = y_H(x_0), \quad y'(x_0) = y'_H(x_0)$$

Mittnachtsformel

$$ax^2 + bx + c \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein Eigenvektor einer Matrix ist ein Vektor, welcher vor und nach der Matrix-Multiplikation dieselbe Richtung hat. Mathematisch:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Rezept

Eigenwerte

Folgende Gleichung nach λ auflösen:

$$\boxed{det(A-\lambda E) = 0}$$

Eigenvektoren

Wir lösen nach $\vec{v}_i$ auf:

$$\boxed{(A-\lambda_i E)\vec{v}_i = \vec{0}}$$

Wir suchen jedoch nur Lösungen für die gilt: $\vec{v}_i \neq \vec{0}$

Tipp: Falls die Matrix $(A-\lambda_i I)$ nach dem Gauss-Algorithmus keine Nullzeile hat, hast du einen falschen Eigenwert oder beim Gauss einen Fehler. (E = Einheitsmatrix)

Beispiel

Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Eigenwert

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 1, -3$$

Eigenvektor

Nun zum ersten Eigenvektor: $\lambda_1 = 1$

$$(A-\lambda_i I)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2-1 \end{bmatrix}\vec{v}_1 = 0$$

Nun benutzen wir den Gauss-Algorithmus:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = \alpha$ können wir frei wählen. Das heisst für x_1 folgt:

$$-x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \alpha$$

Der Eigenvektor ist also:

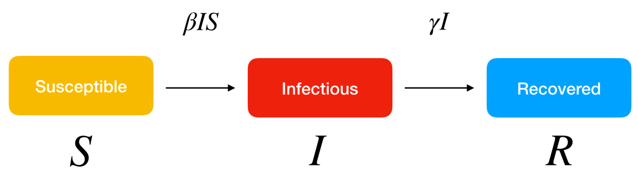
$$v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Mathematische Modelle

Mathematische Modelle haben den Zweck, die Realität mathematisch wiederzugeben und potenzielle Entwicklungen eines Systems zu formulieren.

Compartmental models

Dabei zeichnet man die Compartments als Kästchen und die Änderung der Substanz als Pfeile zwischen den Kästchen. Man schreibt zusätzlich noch wie viel Substanz durch diese Pfeile fliesst.



Man schreibt für jedes Compartment die Ableitung hin und zwar wird jeder ausgehende Pfeil subtrahiert und jeder eingehende Pfeil addiert. In der Grafik oben wäre das:

$$S'(t) = -\beta I(t)S(t)$$

$$I'(t) = +\beta I(t)S(t) - \gamma I(t)$$

$$R'(t) = +\gamma I(t)$$

Nachdem man dieses DGL-System aufgestellt hat, muss man es nur noch lösen.

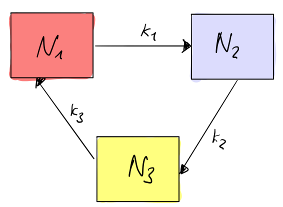
Linear compartmental models

Oftmals verkürzt man bei den linearen Modellen die Schreibweise über den Pfeilen. Das heisst ein Pfeil, der von Compartment N_1 mit der Beschriftung k_1 ausgeht, meint tatsächlich: $k_1 N_1(t)$.

Rezept

1) Schreibe alle die Variabeln der Compartments in einen Vektor.
2) Schreibe die DGL der einzelnen Compartments übereinander, wobei du die Variablen in derselben Reihenfolge ordnest wie im Vektor.
3) Nun kannst du die Koeffizienten der Matrix direkt ablesen.

Beispiel



In diesem Beispiel wären jetzt die Gleichungen:

$$N_1'(t) = -k_1 N_1(t) + k_3 N_3(t)$$

$$N_2'(t) = k_1 N_1(t) - k_2 N_2(t)$$

$$N_3'(t) = k_2 N_2(t) - k_3 N_3(t)$$

Nun kann man die Koeffizienten direkt ablesen.

$$\vec{N}'(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & k_3 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{bmatrix} \cdot \vec{N}(t)$$

Vektorräume

Rezept

Um zu zeigen, dass etwas ein Vektorraum ist, muss man folgende 10 Eigenschaften überprüfen: (Dabei sind x, y Elemente von V und λ, γ sind reelle oder komplexe Zahlen.) ↳ dann ist V ein reeller Vektorraum

1) Abgeschlossen: $x+y$ ist auch in V
2) Assoziativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) Neutrales Element: $x + 0_V = x$
4) Inverses Element: $(-x)+x = 0_V$
5) Kommutativ: $x+y = y+x$
6) Abgeschlossen: λx ist auch in V
7) Assoziativ: $(\lambda \cdot \gamma)\cdot x = \lambda \cdot (\gamma \cdot x)$
8) Neutrales Element: $1 \cdot x = x$
9) Distributiv: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
10) Distributiv 2: $(\lambda+\gamma)\cdot x = \lambda x + \gamma x$

• $0_V \hat{=}$ Nullelement
$0_V \in V$
0_V muss nicht 0 sein → je nachdem wie Operationen definiert
• $-x \hat{=}$ additives Inverses

V eine Menge mit 2 Operationen:
• Vektoraddition: $V \times V \to V$
• Skalare Multiplikation: $\mathbb{R} \times V \to V$
} können beliebig definiert sein

↳ falls nichts gesagt gelten normale Operationen!

Beispiel

Der Vektorraum V besteht aus der Menge:

$$V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 > 0 \right\}$$

Mit der Addition und Multiplikation: → beliebig definiert:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{bmatrix}$$

1) Abgeschlossen: $x+y$ ist auch in V

Falls $\underline{x_1 > 0}$ und $\underline{y_1 > 0}$, dann ist auch $\underline{x_1 y_1 > 0}$ Deswegen ist auch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}$$

in V drin. Damit ist diese Eigenschaft erfüllt.

2) Assoziativ: $(x+y)+z = x+(y+z)$

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{bmatrix}}$$

3) Neutrales Element: $x + 0_V = x$

hier ist $0_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4) Inverses Element: $(-x)+x = \underline{0_V}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ 1/x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x_1 \cdot x_1 \\ 1/x_2 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

5) Kommutativ: $x+y = y+x$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 x_1 \\ y_2 x_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix}}$$

6) Abgeschlossen: λx ist auch in V

Falls $x_1 > 0$, dann ist auch $x_1^\lambda > 0$ für alle λ. Daher ist auch:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{bmatrix}$$

in der Menge V.

7) Assoziativ: $(\lambda \cdot \gamma)\cdot x = \lambda \cdot (\gamma \cdot x)$

$$(\lambda \cdot \gamma) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^{(\lambda\cdot\gamma)} \\ x_2^{(\lambda\cdot\gamma)} \end{bmatrix}}$$

$$\lambda \cdot \left(\gamma \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1^\gamma \\ x_2^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1^\gamma)^\lambda \\ (x_2^\gamma)^\lambda \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^{(\lambda\cdot\gamma)} \\ x_2^{(\lambda\cdot\gamma)} \end{bmatrix}}$$

8) Neutrales Element: $1 \cdot x = x$

$$1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

9) Distributiv: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

$$\lambda \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 y_1)^\lambda \\ (x_2 y_1)^\lambda \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^\lambda y_1^\lambda \\ x_2^\lambda y_2^\lambda \end{bmatrix}}$$

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^\lambda \\ y_2^\lambda \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^\lambda y_1^\lambda \\ x_2^\lambda y_2^\lambda \end{bmatrix}}$$

10) Distributiv 2: $(\lambda+\gamma)\cdot x = \lambda x + \gamma x$

$$(\lambda + \gamma) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^{(\lambda+\gamma)} \\ x_2^{(\lambda+\gamma)} \end{bmatrix}}$$

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^\gamma \\ x_2^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\lambda x_1^\gamma \\ x_2^\lambda x_2^\gamma \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} x_1^{(\lambda+\gamma)} \\ x_2^{(\lambda+\gamma)} \end{bmatrix}}$$

Unterraum

Rezept

Da ein Unterraum immer eine Teilmenge eines Vektorraumes ist, sind einige der 10 Eigenschaften des Vektorraumes bereits gegeben. Daher muss man nur noch drei Dinge zeigen:

1) Es existiert ein Null-Element: $x + 0_V = x$
2) U ist abgeschlossen: Also $x+y$ muss ebenfalls in U liegen
3) U ist abgeschlossen: Also λy muss ebenfalls in U liegen

• Sei V ein VR. $U \subset V$ heisst Untervektorraum (UR) von V falls definierte Vektoraddition & Skalare Multiplikation gelten!

Beispiel

Ist U ein Unterraum von V, dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$?

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

$\mathbb{R}^2$ ist eine 2D-Ebene. Der Unterraum besteht also aus allen Punkte auf der x-Achse. Also $\vec{x} = [x_1, 0]^T$

1) Es existiert ein Null-Element, nämlich: $0_V = [0,0]^T$, denn:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Die Summe zweier Vektoren liegt wieder im Unterraum:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Ein Vektor multipliziert mit einer reellen Zahl liegt wieder im Unterraum

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Erzeugendensystem

Jeder Vektorraum hat ein sogenanntes Erzeugendensystem. Ein Erzeugendensystem ist eine Menge von Vektoren, wobei man mit Linearkombinationen dieser Vektoren jedes Element im Vektorraum erreichen kann. Im Erzeugendensystem können Vektoren auch linear abhängig sein! Das bedeutet also auch immer, dass die Anzahl Vektoren im Erzeugendensystem grösser oder gleich sein muss wie die Anzahl Dimensionen des Vektorraumes.

$$\boxed{\#Elemente \geq \#Dimension}$$

Beispiel

Im $\mathbb{R}^2$ wär zum Beispiel ein Erzeugnedensystem:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Im Vektorraum der Polynome von Grad 2 wäre ein Erzeugendensystem:

$$\{1, x-1, x^2-1\}$$

Basis

Eine Basis ist einfach ein Erzeugendensystem bei dem **alle** Vektoren linear unabhängig sind. Das bedeutet also auch immer, dass die Anzahl Vektoren in der Basis genau gleich sein muss wie die Anzahl Dimensionen des Vektorraumes.

$$\boxed{\#Elemente = \#Dimension}$$

Beispiel

Das heisst, dieses Beispiel wäre **keine Basis**, da die Vektoren linear abhängig sind:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

=> für Rang berechnen & lineare Abhängigkeit, siche:
- "Rang einer Matrise" auf Seite ...
- "Linearität" auf Seite ...

Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ wäre zum Beispiel:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Im Vektorraum der Polynome von Grad 2 wäre dieses Erzeugendensystem auch eine Basis:

$$\{1, x-1, x^2-1\}$$

Man kann nicht mit 2 davon den dritten erzeugen.

Denn alle Elemente sind linear unabhängig.

Polynome als Vektorraum

Polynome können auch Vektoren sein. Das ist vielleicht am Anfang etwas irritierend, aber eigentlich ist es gar nicht so schwierig. Der Trick ist das Polynom: $a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ in eines Spaltenvektor zu schreiben. Das heisst, wir listen einfach die Koeffizienten auf.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Beispiele

Das Polynom: $x^2 + 2x + 3$ wäre also:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ist $\{1+x^2, x-1, x+x^2\}$ eine Basis? Wandeln wirs doch einfach in Spaltenvektoren um:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Nun können wir einfach diese drei Vektoren in eine Matrix stecken und deren Rang berechnen und sehen sofort, dass nur zwei Vektoren linear unabhängig sind. Es ist also keine Basis.

$\mathscr{L}_A$ Lösungsraum

Um Studenten zu verwirren braucht es natürlich noch eine unnötig komplizierte Schreibweise, wie wir diese Lösungen eines DGL-Systems notieren. Also anstatt einfach zu schreiben, dass unsere allgemeine Lösung: Allgemeine Lösung des DGL-Systems $y'(x) = A \cdot y(t)$

$$\vec{y}(x) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots$$

lautet, schreiben wir stattdessen, das unser Lösungsraum lautet:

$$\mathscr{L}_A = \{t \mapsto v_1 e^{\lambda_1 t}, t \mapsto v_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots\}$$

Das finden Mathematiker einfach geiler so.

Bsp: $y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-1/2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für welche Anfangsdaten ($y(0)$) verschwindet $y(t)$ & konvergiert Entw. gegen Null? (mit $t \to \infty$)

$\to \lim_{t\to\infty} y(t) = C_1 v_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0!$

$\Rightarrow y(0) = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diagonalisierung

Bei der Diagonalisierung findet man zur Matrix A zwei Matrizen D und T, so dass $A = TDT^{-1}$. Dabei ist D eine Diagonalmatrix, hat also nur Elemente auf der Diagonalen.

Rezept

Wir wollen:

$$\boxed{A = TDT^{-1}}$$

1) Berechne die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von A

2) Überprüfe, ob die Eigenvektoren linear unabgängig sind. Falls nicht ist keine Diagonalisierung möglich. (Tipp: Falls die Eigenwerte verschieden sind, sind die Eigenvektoren immer linear unabhängig.)

3) Schreibe die EW auf die Diagonale der D Matrix auf.

4) Schreibe die Eigenvektoren **in derselben Reihenfolge** spaltenweise in die Matrix T

Bemerkung: Für T gibt es nicht nur eine richtige Matrix, da es ja immer unendlich viele Eigenvektoren gibt.

Trick

Jede hermitesche Matrix ist diagonalisierbar!

Hermitesch

$A = A^H$ Hermittransponieren ist dasselbe wie normales Transponieren, einfach, dass alle Einträge noch komplex-konjugiert werden.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \end{bmatrix}, \quad A^H = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Eine hermitesche Matrix wäre also:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix}, \quad A^H = \begin{bmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$$

Tipp: Jede reelle und symmetrische Matrix ist auch hermitesch.

Beispiel

Wir wollen folgende Matrix diagonalisieren:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1) Berechne die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von A

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2) Die Eigenvektoren sind linear unabhängig. (EW verschieden)

3) Die Diagonalmatrix D lautet also: (EW auf Diagonale)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4) Die T-Matrix lautet also:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = TDT^{-1}$ wäre in diesem Fall:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

Matrixexponential

Simpel gesagt, gibt dir 'e hoch eine Matrix' wieder eine Matrix zurück. Diese Matrix hat jedoch eine spezielle Eigenschaft, nämlich ist sie die Ableitung nach t: $\boxed{(e^{At})' = Ae^{At}}$

So hat jedes DGL-System: $\vec{y}(t)' = A\vec{y}(t)$ die Lösung: $\boxed{\vec{y}(t) = e^{At} \cdot \vec{y}_0}$

Rezept

Bei der Berechnung des Matrixexponentials gibt es grundsätzlich zwei ganz unterschiedliche Fälle: → siehe Diagonalisierbarkeit (z.B. ob hermitesch)

Die Matrix ist diagonalisierbar

Für Rezept siehe: Matrixexponential - Diagonalisierung

Die Matrix ist nicht diagonalisierbar

Für Rezept siehe: Matrixexponential - Jordanblöcke oder Vertauschbar

Matrixexponential - Diagonalisierung

Rezept

Um das Matrixexponential e^{At} einer diagonalisierbaren Matrix A zu berechnen, gehe wie folgt vor:

1) Diagonalisiere die Matrix, also berechne T und D

2) Berechne e^{Dt}, indem Du alle λ_i auf der Diagonalen mit $e^{\lambda_i t}$ ersetzt.

3) Berechne nun:

$$\boxed{e^{At} = T \cdot e^{Dt} \cdot T^{-1}}$$

Beispiel

Wir wollen folgende Matrix diagonalisieren:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Diagonalisieren: (siehe Diagonalisierung)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Diagonalelemente ersetzen:

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

→ falls = 0 ⇒ $e^{0t} = 1$!

3) Berechne: $e^{At} = T \cdot e^{Dt} \cdot T^{-1}$

siehe Seite 1!

Inverse der Matrise

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}}^{}$$

$$e^{At} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{-3t} + 3e^t & e^t - e^{-3t} \\ 3e^t - 3e^{-3t} & 3e^{-3t} + e^t \end{bmatrix}$$

$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

sin(x) ist ungerade $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

cos(x) ist gerade $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

Matrixexponential - Vertauschbar

Rezept

Es gibt einen Trick, den man anwenden kann, wenn zwei Matrizen vertauschbar sind. Also, wenn $AB = BA$ gilt. Dann und **nur dann** ist:

$$\boxed{e^{Ct} = e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}}$$

1) Die Matrix muss dazu folgende Form haben:

· C ist gegeben & nicht diagonalisierbar aber von der Form:

$$C = \begin{bmatrix} a & b & 0 & .. & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ : & & \ddots & a & b \\ 0 & .. & .. & 0 & a \end{bmatrix}$$

2) Teile die Matrix auf:

$$= A + B = \begin{bmatrix} a & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & a & \ddots & & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & : \\ : & & \ddots & a & 0 \\ 0 & .. & .. & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & b & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ : & & \ddots & 0 & b \\ 0 & .. & .. & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Schreib' pro forma die Begründung auf: A und B sind vertauschbar, da A im Grunde nur die Einheitsmatrix multipliziert mit einer Konstanten ist. Es kommt nicht darauf an, ob wir eine Einheitsmatrix von hinten oder von vorne multiplizieren. $BA = AB$

↳ Deshalb darf ich Verwenden: $e^{Ct} = e^{At} \cdot e^{Bt}$, wobei $C = A + B$

4) Verwende nun: $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ (E = Einheitsmatrix)

$$e^{At} = e^{at} \cdot E, \qquad e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & bt & \frac{(bt)^2}{2} & .. & \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & bt & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(bt)^2}{2} \\ : & & \ddots & 1 & bt \\ 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ auf Nebendiagonalen sind die Summanden des Taylor-Polynoms!

5) Das Resultat lautet also: $e^{At} \cdot e^{Bt}$

$$e^{(A+B)t} = e^{at} \begin{bmatrix} 1 & bt & \frac{(bt)^2}{2} & .. & \frac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & bt & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(bt)^2}{2} \\ : & & \ddots & 1 & bt \\ 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel

1) Die Matrix hat die richtige Form:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Wir teilen die Matrix auf:

$$= A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Abschreiben: A und B sind vertauschbar, da A im Grunde nur die Einheitsmatrix multipliziert mit einer Konstanten ist. Es kommt nicht darauf an, ob wir eine Einheitsmatrix von hinten oder von vorne multiplizieren. $BA = AB$

4) Verwende nun: $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \cdot E, \qquad e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & 2t & \frac{(2t)^2}{2} \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Das Resultat lautet also: $e^{At} \cdot e^{Bt}$

$$e^{Ct} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 2t & \frac{(2t)^2}{2} \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ alle Einträge mit e^{3t} multiplizieren!

Matrixexponential - Jordanblöcke

Rezept

Wir lassen die Berechnung der T-Matrix weg. Nun haben wir nicht mehr $A = TDT^{-1}$, sondern D wird zur Jordanmatrix J:

$$A = T \cdot J \cdot T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$$

1) Diese Jordan-Matrix besteht aus vielen Jordanblöcken auf der Diagonalen. Weil diese Blöcke eben nur auf der Diagonalen sind, ist das Exponential der Matrix einfach das Exponential der Blöcke.

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & 0 \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}$$

2) Diese Blöcke haben immer dieselbe Form, also auch ihr Exponential, wir kennen diese Form bereits aus dem Vertauschungstrick.

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ : & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & .. & .. & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & .. & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & : \\ : & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ : & & \ddots & 1 & t \\ 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Wie man diese Blöcke wählt, kommt auf die Vielfachheit des Eigenwertes an und wie viele Eigenvektoren zu diesem Eigenwert dazugehören. Der Grundsatz ist simpel: Für jeden Eigenvektor gibt es einen Jordanblock. Am klarsten wird das anhand von ein paar Beispielen:

Beispiel

Sagen wir, wir haben zur Matrix A die Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ und zu diesen Eigenwerten haben wir die Eigenvektoren: v_1 zu λ_1 und v_2 zu λ_2. $\lambda_1 = 2$ sei ein 3-facher EW und $\lambda_2 = 3$ ein 2-facher EW. In diesem Fall müsste die J-Matrix wie folgt aussehen: (Für jeden EV ein Jacobiblock)

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Wenn man nun e^{Jt} berechnen will, kann man das blockweise tun.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; e^{tJ_1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}/2 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; e^{tJ_2} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & t^2e^{2t}/2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = T \, e^{Jt} \, T^{-1}}$$

vgl: $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$e^{Ct} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & b \cdot t e^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

Tricks für Blockmatrizen

Wenn man eine Matrix hat, die aus Blöcken auf Diagonalen und sonst nur aus nullen besteht, darf man das Matrixexponential, die Inverse und A^n auch blockweise berechnen.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{A_1^{-1}} & & & \\ & \boxed{A_2^{-1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k^{-1}} \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \boxed{A_1^n} & & & \\ & \boxed{A_2^n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k^n} \end{bmatrix} \qquad e^{tA} = \begin{bmatrix} \boxed{e^{tA_1}} & & & \\ & \boxed{e^{tA_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{e^{tA_k}} \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A besteht aus zwei Blöcken:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ und } A_2 = [3]$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = [1/3]$$

$$e^{tA_1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \quad e^{tA_2} = [e^{3t}]$$

Um nun die Inverse oder das Matrixexponential zu berechnen, muss man nur noch die Blöcke zusammensetzen.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Lin. DGL-Systeme - Matrixexponential

Rezept

Man hat ein DGL-System:

$$\dot{\vec{y}}(x) = A\vec{y}(x) \text{ und } \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

Dieses DGL-System hat einfach die Lösung:

$$\boxed{\vec{y}(x) = e^{At} \cdot \vec{y}_0}$$

Beispiel

Wir wollen folgendes DGL-System lösen:

$$\dot{\vec{y}}(x)=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\3&-2\end{bmatrix}}_{A}\cdot\vec{y}(x)\qquad \vec{y}(0)=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}}_{\text{Anfangswert}:\,[0,4]^T}$$

1) Das Matrixexponential lautet:

$$e^{At}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t}+3e^{t} & e^{t}-e^{-3t}\\ 3e^{t}-3e^{-3t} & 3e^{-3t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

2) Nun berechnen wir einfach

$$\vec{y}(x)=\overbrace{\frac{1}{4}\begin{bmatrix}e^{-3t}+3e^{t} & e^{t}-e^{-3t}\\ 3e^{t}-3e^{-3t} & 3e^{-3t}+e^{t}\end{bmatrix}}^{e^{At}}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}}^{\vec{y}(0)}=\begin{bmatrix}e^{t}-e^{-3t}\\ 3e^{-3t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

Variation der Konstanten (Advanced)

Mit der Variation der Konstanten kann man auch eine Lösung finden, falls ein sogenannter Störterm $\vec{g}(t)$ zur DGL dazugehört:

$$\boxed{\vec{y}\,'(t)=A\vec{y}(t)+\vec{g}(t)}$$

Das lässt sich dann ganz einfach mit einer Formel lösen.

Rezept

Die Formel für die Lösung lautet:

$$\boxed{\vec{y}(t)=e^{At}\vec{y}_0+\int_0^t e^{(t-\tau)A}\vec{g}(\tau)d\tau}$$

Integration in jeder Komponente!

Dabei ist der erste Summand die 'homogene Lösung' und der zweite Summand die 'partikuläre Lösung'.

Bemerkung: Das Integral ist in jeder Koordinate einzeln. → Beispiel

Beispiel

$$y'=\overbrace{\begin{bmatrix}-3&0\\0&-4\end{bmatrix}}^{A}y+\overbrace{\begin{bmatrix}1\\e^{5t}\end{bmatrix}}^{\vec{g}(t)},\qquad y_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

hom.: $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-3t}&0\\0&e^{-4t}\end{bmatrix}$

alle t's mit t−τ ersetzen!

part.: $$\int_0^t e^{(t-\tau)A}g(\tau)d\tau=\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-3(t-\tau)}&0\\0&e^{-4(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\e^{5\tau}\end{bmatrix}d\tau$$

t nicht τ ersetzen

$$=\begin{bmatrix}\int_0^t e^{-3(t-\tau)}d\tau\\ \int_0^t e^{-4(t-\tau)}e^{5\tau}d\tau\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\\ \frac{1}{9}(e^{5t}-e^{-4t})\end{bmatrix}$$

t-fest, τ-variabel

hom.: $$e^{At}\vec{y}_0=\begin{bmatrix}e^{-3t}&0\\0&e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-3t}\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}e^{-3t}\\0\end{bmatrix}}_{\text{hom.}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\\ \frac{1}{9}(e^{5t}-e^{-4t})\end{bmatrix}}_{\text{part.}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(1-e^{-3t})+e^{-3t}\\ \frac{1}{9}(e^{5t}-e^{-4t})\end{bmatrix}$$

Integral-Tricks

Für $n,m\in\mathbb{N}$:

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt=0,\quad \text{falls: } m\neq n$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt=\frac{T}{2},\quad \text{falls: } m=n$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt=0,\quad \text{falls: } m\neq n$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt=\frac{T}{2},\quad \text{falls: } m=n$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)dt=0,\quad \text{immer!}$$

$$\cos(n\pi)=(-1)^n,\quad \sin(n\pi)=0$$

$$\cos(n\frac{\pi}{2})=0,\quad \text{falls n ungerade;}$$

$$\cos(n\frac{\pi}{2})=(-1)^{n/2},\quad \text{falls n gerade}$$

$$\sin(n\frac{\pi}{2})=(-1)^{(n-1)/2},\quad \text{falls n ungerade;}$$

$$\sin(n\frac{\pi}{2})=0,\quad \text{falls n gerade}$$

Skalarprodukt

Man schreibt:

$$\langle x,y\rangle$$

Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$: (Normales Gymi Skalarprodukt)

$$\langle x,y\rangle=\sum x_iy_i$$

Im Vektorraum der Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$\boxed{\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx}$$

Das Skalarprodukt hat immer folgende Eigenschaft (bilinear):

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$$

Norm

Man schreibt:

$$\|x\|$$

Euklidische Norm: Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$: (Normale Gymi-Norm)

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum x_i^2}$$

P-Norm: Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum x_i^p}$$

Norm einer Funktion: Im VR der Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$:

Bsp. um $k(x)=x^3$ zu normen:

$$\boxed{\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}$$

$$\Rightarrow \tilde{k}(x)=\frac{k(x)}{\|k(x)\|_2}=\frac{x^3}{\left(\int_{-1}^{1}x^6dx\right)^{1/2}}=\frac{x^3}{\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)^{1/2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot x^3$$

Orthonormalbasis

Eine Orthonormalbasis ist eine Basis, bei der alle Basisvektoren zueinander orthonormal sind. Also es gilt für alle Vektorpaare:

$$\langle x,y\rangle=0,\qquad \|x\|=\|y\|=1$$

Wichtig

1) Jeder Vektorraum hat eine Orthonormalbasis

2) Falls $e_1,\ldots,e_n$ eine Orthonormalbasis ist, dann lässt sich jedes Element im Vektorraum ausdrücken durch:

$$v=\sum_{i=0}^{n}c_ie_i$$

Trick

Diese c_i kann man dann immer **(nur bei Orthonormalbasis!)** mit dem Skalarprodukt berechnen:

$$\boxed{c_i=\langle v,e_i\rangle}$$

Reelle Fourier-Reihen

$$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)}$$

Das heisst im Klartext: Wir addieren einfach Sin/Cos von verschiedenen Frequenzen mit verschiedenen Amplituden:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(t)+b_1\sin(t)+a_2\cos(2t)+b_2\sin(2t)+\ldots$$

T ist die Periode und T_0 der Start der Periode. Die a_n und b_n kann man dann einfach mit der Formel berechnen.

Rezept

$$\boxed{a_0=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(t)\,dt}$$

$$\boxed{a_n=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt}\quad (a_n)_{n\geq 0}$$

$$\boxed{b_n=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt}\quad (b_n)_{n\geq 1}$$

Tipps

Eine **ungerade** Funktion $\Longrightarrow$ um (0,0) punkt-symmetrisch $\Longrightarrow$ Alle $a_n=0$ ↳ bzgl. sin

Eine **gerade** Funktion $\Longrightarrow$ um y-Achse achsen-symmetrisch $\Longrightarrow$ Alle $b_n=0$ ↳ bzgl. cos

Komplexe Fourier-Reihen

Jede periodische Funktion lässt sich als Summe von Sinus- und Cosinus-Termen schreiben. Diese Sin/Cos-Terme lassen sich wiederum als e^{ix} Terme ausdrücken.

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{2\pi}{T}nt}}$$

↳ möglich. n≠…

Das heisst im Klartext: Wir addieren einfach e^{ix} Terme von verschiedenen Frequenzen mit verschiedenen Amplituden:

$$f(t)=c_0+c_{-1}e^{-it}+c_1e^{it}+c_{-2}e^{-i2t}+c_2e^{i2t}+\ldots$$

T ist die Periode und T_0 der Start der Periode. Die c_n kann man dann einfach mit der Formel berechnen.

Rezept

$$\boxed{c_n=\frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt}$$

Für **reelle** Funktionen ist $c_n=(c_{-n})^*$ (komplex konjugiert)

Umwandlung zu reellen Fourier-Reihen

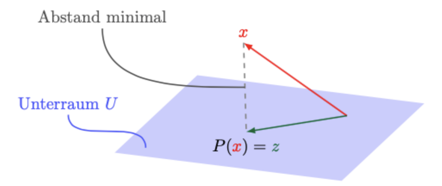
Für die Umwandlung sollte man sich folgende Formeln auf die Zusammenfassung schreiben: C_{-n} ist komplex konjugiert von C_n

$$a_n=c_n+c_{-n},\quad b_n=i(c_n-c_{-n}),\quad a_0=2c_0$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\quad c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n),\quad c_0=\frac{a_0}{2}$$

Orthogonale Projektion

Wenn man ein Element x hat, welches nicht im Unterraum U liegt, dann kann man eine Projektion $z=P(x)$ machen. **Dieses z ist immer das Element in U mit der kleinsten Distanz zu x.**



In diesem Fall wäre jetzt $x\in\mathbb{R}^3$ und $U=\mathbb{R}^2$. Wie man dann die Projektion z berechnet, sehen wir gleich.

Rezept

1) Falls $e_1,\ldots,e_n$ eine Orthonormalbasis des Unterraumes U ist, dann lässt sich jedes Element im Vektorraum ausdrücken durch:

$$z=P(x)=\sum_{i=0}^{N}c_ie_i$$

2) Diese c_i kann man dann mit dem Skalarprodukt berechnen:

$$c_i=\langle x,e_i\rangle$$

Bemerkung: Dieses Verfahren funktioniert auch, wenn wir Funktionen als Vektoren verwenden.

Beispiel

1) Wir haben analog zum Bild oben einen Vektor $x\in\mathbb{R}^3$, den wir auf den Unterraum $\mathbb{R}^2$ projezieren. Berechnen wir die Projektion $z=P(x)$. Die Basis von U sei:

$$U=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

1) Wenn wir z (die Projektion) in dieser Basis ausdrücken:

$$z=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\0\end{bmatrix}$$

2) Sei nun x gegeben und wir wollen die Konstanten c_i finden:

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad c_i = \langle v, e_i \rangle \Big/ c_i = \langle x, e_i \rangle$$

$$c_1 = \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 4$$

$$c_2 = \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 6$$

Die Projektion z ist nun der Punkt in U mit der kleinsten Distanz zu x!
$z = [4,6,0]^T$.
Wenn man das skizziert, sieht man, dass z in der Tat der nächste Punkt zu x ist.

Linearisierung

Um etwas über das Verhalten der nicht-linearen DGL Systemen nahe an einen Punkt y_∞ zu sagen, kann man das DGL-System linearisieren. Was man eigentlich macht, ist, man approximiert die Funktion mit einer linearen Funktion in der Nähe einer stationären Lösung.

Rezept

Gegeben: Ein DGL-System: $\vec{y}' = F(\vec{y})$, das man linearisieren soll:

1) Berechne: $\vec{y}_\infty$; die stationären Lösungen: $0 = F(\vec{y}_\infty)$

2) Berechne die Jacobi-Matrix:

$$A = DF(\vec{y}_\infty) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(\vec{y}) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} f_1(\vec{y}) \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(\vec{y}) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} f_2(\vec{y}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_n(\vec{y}) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_n(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} f_n(\vec{y}) \end{bmatrix} (\vec{y} = \vec{y}_\infty)$$

3) Die Linearisierung lautet dann:

$$\boxed{\vec{y}' = A(\vec{y} - \vec{y}_\infty)}$$

4) Die Linearisierung darf nur verwendet werden, falls das Grobmann-Hartmann-Theorem erfüllt ist. **Das heisst nur falls alle: $Re(\lambda_i) \neq 0$ (λ_i = EW von A)**

Stabilität

Um damit nun die Stabilität von einem System $\vec{y}' = F(\vec{y})$ zu beurteilen, muss man nur die Eigenwerte von A berechnen.

1) Falls **alle** Eigenwerte im Realteil negativ sind $(Re(\lambda_i) < 0)$
$\Longrightarrow$ **stabil**

2) Falls mind. ein Eigenwert im Realteil positiv ist $(Re(\lambda_i) > 0)$
$\Longrightarrow$ **instabil**

3) Falls mind. ein Eigenwert im Realteil Null ist $(Re(\lambda_i) = 0)$
$\Longrightarrow$ **keine Aussage**

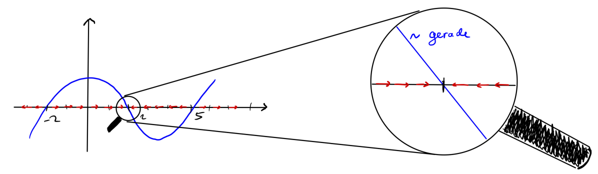
Bemerkung:

-Falls $F(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist A eine Konstante, also EW = A.
-Falls der eine EW positiv und der andere negativ ist, nennt man das: **Sattelpunkt**.

Intuition

Eine Linearisierung kann man sich wie eine Annäherung der Funktion mit einer Gerade vorstellen. Wenn man ganz nahe an einer stationäre Lösung dran ist, dann kann man dies mit einer Gerade annähern.

$$y' = F(y) = (y+2)(y-2)(y-5)$$



1) Die stationären Lösungen sind: $y_\infty = -2, 2, 5$. Wir betrachten $y_\infty = 2$.

2) Berechne die Jacobi-Matrix: (Hier eine Konstante)

$$A = \frac{\partial}{\partial y} f(y) = 3y^2 - 10y - 4 = -12 \quad \text{(denn: } y_\infty = 2)$$

$\hat{=} \lambda_i$

3) Die Linearisierung lautet also:

$\to Re(\lambda_i) < 0$
$\to$ stabil!

$$y' = -12(y-2)$$

Spur und Determinanten Trick (wichtig)

Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix A (geschrieben: Tr(A)) ist einfach die Summe ihrer Diagonalelemente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Hätte als Beispiel die Spur: Tr(A) $= 1 + 2 + 3 = 6$

Trick

Meistens interessieren uns die konkreten Eigenwerte gar nicht. Es ist lediglich interessant, ob die Eigenwerte positiv, negativ oder null sind. Denn damit lässt sich bereits die Stabilität beurteilen.
· für (2x2)-Matrizen

1. Berechne die Spur (Tr(A)) und Determinante (det(A)) der Matrix.

2. Fallunterscheidung:

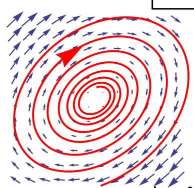
2.1) $det(A) = 0 \Longrightarrow$ **keine Aussage.** Mindestens ein EW ist Null.

2.2) $det(A) < 0 \Longrightarrow$ **Sattelpunkt**
(Vorzeichen der EW sind verschieden)

2.3) $det(A) > 0 \Longrightarrow$ Betrachte die Spur:

3.1) $Tr(A) > 0 \Longrightarrow$ **instabil** (Beide EW positiv)
3.2) $Tr(A) < 0 \Longrightarrow$ **stabil** (Beide EW negativ)
3.3) $Tr(A) = 0 \Longrightarrow$ **keine Aussage möglich**

$\Rightarrow$ z.B.

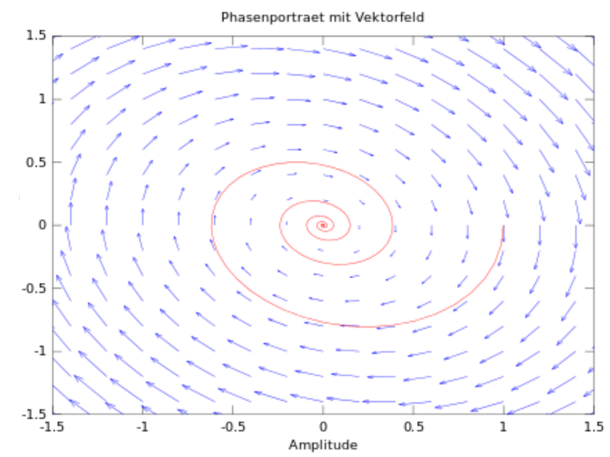


$DG(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$

· $\lambda_i = a \pm ib$ sind komplex
· $a > 0$, damit instabil
$\left(\begin{array}{l} a>0 \to \text{Lösung entfernt sich mit } t \to \infty \\ b \neq 0 \to \text{spiralförmig!} \end{array} \right)$

Stabilität optisch Abschätzen

Auch falls man eine Funktion $F(\vec{y}): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat, kann man sie dennoch optisch abschätzen. Man muss sie nur als Vektorfeld plotten und sich dann wieder eine Ameise vorstellen, die den Pfeilen folgt. Die rote Strecke wäre in diesem Fall der Pfad der Ameise.



Einführung PDE

Bei normalen Differentialgleichungen wird ja immer nach einer Funktion gesucht, die von einer einzigen unabhängigen Variablen (meistens t=Zeit) abhängt. Von dieser unabhängigen Variablen hängen dann eine oder mehrere veränderliche Grössen ab. Zum Beispiel die Konzentration $C(t)$ eines Medikaments in einem Organ oder die Grösse einer Räuber- und einer Beutepopulation.

Die Funktionen, die man in PDEs sucht, können jedoch von mehreren unabhäbgigen Variabeln abhängen. Für PDEs gibt es keine allgemeine Lösungsmethode, deswegen werden wir später noch für die wichtigsten Arten von PDEs Lösungsmethoden lernen.

Beispiel ODE

$$y'(t) = -4y(t), \quad y(0) = 1$$

Das y(t) ist nur von einer Variabel t abhängig, also ist es ein ODE (= Ordinary Differential Equation). Die Lösung wäre in diesem Fall: (nur von t abhängig)

$$y(t) = e^{-4t}$$

Beispiel PDE

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x,t) + c \cdot \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = 0, \quad y(x,0) = f(x)$$

Das y(t) ist nun von zwei Variabeln t und x abhängig, also ist es ein PDE. Die Lösung wäre in diesem Fall: (von t und x abhängig)

$$y(x,t) = f(x - ct)$$

Wäre jetzt z.B. $f(x) = e^{-x^2}$, dann könnte man $y(x,t)$, wie folgt zeichnen:

$$y(x,t) = e^{-(x-ct)^2}$$

① EW: $det(A - \lambda E)$

$\Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4}\right)$

· damit $a > 0 \Rightarrow \beta > 0$
· damit $\beta \neq 0 \Rightarrow \beta < 2$

$\Rightarrow \underline{0 < \beta < 2}$

Wichtige Ansätze

DGL	Allgemeine Lösung
$y'(x) = \lambda y(x)$	$y(x) = Ae^{\lambda x}$
$y''(x) = -\omega^2 y(x)$	$y(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$
$y''(x) = \omega^2 y(x)$	$y(x) = A\sinh(\omega x) + B\cosh(\omega x)$

Sinh, Cosh

Der Sinus-Hyperbolicus und Cosinus-Hyperbolicus sind wie folgt definiert:

$$\boxed{\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}$$

$$\boxed{\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})}$$

Daraus folgen ein paar wichtige Eigenschaften, die man kennen sollte:

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

Aber noch wichtiger:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh(0) = 0 \\ \cosh(0) = 1 \end{array}}$$

Wieso dieser Ansatz

Wieso schreibt man denn nun die dritte Gleichung aus der Tabelle mit cosh und sinh, anstatt mit $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$?

Der Grund dafür ist, dass es einfacher ist, wenn man die Anfansbedingungen einsetzt.

Sollte die Anfangsbedingung gegeben sein: $y(0) = 0$, setzt man das ein:

$$y(0) = A\sinh(0) + B\cosh(0) = B = 0$$

$$y(x) = A\sinh(x)$$

Das ist wesentlich einfacher, als mit $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ die Konstanten zu berechnen!

Operatoren

Gradient

Alle partiellen Ableitungen in allen Variabeln in einem Vektor

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \dots \end{bmatrix}$$

Divergenz

$$div(\vec{F}(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 \quad (+\dots)$$

Laplace Operator

Die Summe aller zweiten Ableitungen in allen Variabeln

$$\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} \quad (+\dots)$$

Bsp: · Darauf achten, dass für Y periodische Lösungen auftreten: $Y'' = -\omega^2 Y \to$ Lösung so harmonische Funktion

Fourier-Methode

Mit dieser Methode kann man viele PDE's lösen. Diese Methode wird auch oft als 'Separation der Variablen' bezeichnet. Eine solche Aufgabe kommt fast garantiert an der Prüfung.

Rezept (Beispiel 1)

Machen wir es anhand von einem Beispiel:

$$u_{xx} = -u_t, \quad \text{und: } \underbrace{u(x,0) = \sin(2x)}_{\text{AB}}, \underbrace{u(0,t) = u(\pi,t) = 0}_{\text{RB}}$$

1) Separation der Variabeln:

1.1) Schreibe die Gleichung auf:

$$u(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

1.2) Setze u(x,t) in die DGL ein
:

$$(f(x)g(t))_{xx} = -(f(x)g(t))_t$$

$$f''(x)g(t) = -f(x)g'(t)$$

1.3) Umformen und $-\omega^2$ definieren (immer):

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g'(t)}{g(t)} = \text{konstant} := -\omega^2$$

1.4) ODE nach f(x) lösen:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\omega^2 \Longrightarrow f''(x) = -\omega^2 f(x)$$

Von der Tabelle

$$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

1.5) Randbedingungen einsetzen und Sätzchen abschreiben:
Da $u(0,t) = u(\pi,t)$ für alle t gilt, macht nur eine Lösung Sinn, wo: $f(0) = f(\pi) = 0$. $\to$ dann ist $u(x,t) = f(x) \cdot g(t) = 0$, egal für welches t!

$$f(0) = 0 = A\cos(0) + B\sin(0) \Longrightarrow: A = 0$$

Neu: $\boxed{f(x) = B\sin(\omega x)}$

Damit die zweite Randbedingung, $f(\pi) = 0$, immer erfüllt ist, müssen wir unsere Wahl von ω einschränken. Würde man $B = 0$ setzen, gäbe das $f(x) = 0$, also keine nützliche Lösung. $\to$ Darf nicht immer $f(x) = 0$ sein!

$$f(\pi) = 0 = B\sin(\omega\pi) \Longrightarrow \boxed{\omega_n = n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

Die Frage ist nun, für welche ω ist $\sin(\omega\pi) = 0$. Für alle ganzzahligen natürlich.

1.6) Nun machen wir denselben Chabis noch für g(t) mit den gefundenen ω_n

$$-\frac{g'(t)}{g(t)} = -\omega_n^2$$

$$g'(t) = \omega_n^2 g(t) \Longrightarrow \boxed{g(t) = C_n e^{\omega_n^2 t}}$$

Aus der Tabelle

Vgl.: $y'(t) = \omega^2 y(t) \Rightarrow y(t) = Ae^{\omega^2 t}$

2) Superposition/ Fourier-Reihe

Wie wir gesehen haben, gibt es sehr viele Lösungen für f(x) und g(t). Nämlich für jedes n eine. Deswegen schreiben wir alles nochmals auf:

2.1) Zusammenfassen:

$\longrightarrow f(x) = B_n \sin(\omega_n x)$
$\longrightarrow g(t) = C_n e^{\omega_n^2 t}$
$\longrightarrow \omega_n = n = 0, 1, 2, \ldots$

2.2) Zusammensetzen:
Es gibt also diese Lösungen: (Die Konstanten: $B_n C_n$ werden durch b_n ersetzt.) $\to$ Je nachdem ob sin od. cos, damit gleich wie bei Fourier-Reihen.

$$u_n(x,t) = f(x)g(t) = B_n C_n \sin(nx)e^{n^2 t} = b_n \sin(nx)e^{n^2 t}$$

2.3) Lösung:
Die vollständige Lösung besteht aus der Zusammensetzung aller dieser Lösungen:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_n b_n \sin(nx)e^{n^2 t}}$$

2.4) Anfangsbedingung:
Um die spezifische Lösung zu finden, setzen wir die Anfangsbedingungen ein:

$$u(x,0) = \sum_n b_n \sin(nx)e^{n^2 0} = \sum_n b_n \sin(nx)$$

2.5) Fourierreihe, um b_n zu finden:
Im allerletzten Schritt gilt es, die b_n zu finden. Diese sind meistens einfach die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedinung. In unserem Fall ist $u(x,0) = \sin(2x)$. Es sind also alle Fourierkoeffizienten null, ausser: $b_2 = 1$. Damit wäre die Lösung der PDE:

$\to$ $n = 2$ & $b_2 = 1$ einsetzen:

$$u(x,t) = \sum_n b_n \sin(nx)e^{n^2 t} = \sin(2x)e^{4t}$$

$\to$ Man macht einen Vergleich! Man weiss:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)}$$

& so ist diese AB nur erfüllt falls alle $b_n = 0$ ausser b_2, denn es ist $u(x,0) = \sin(2x)$. Und da der Koeffizient vor dem sinus 1 ist, ist $b_2 = 1$

AB: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nx) \cdot e^0 = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nx) = f(x) = 37$

$$f(x) = \begin{cases} -37 & \text{falls } -\pi < x \leq 0 \\ 37 & \text{falls } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$ $\to$ ungerade Fortsetzung

$\Rightarrow f(x)$ so ungerade & Fourier-Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \sin(kx)$

$$b_k = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}} \sin(kx)f(x)dx = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}} \sin(kx)f(x)dx$$ $\to$ gerade nun!

$$= \frac{74}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)dx = \frac{74}{\pi k}(1 - \cos(k\pi)) = \begin{cases} \frac{148}{\pi k} & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{148}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

ungerade Stetige Fortsetzung

Bsp: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin(nx)e^{-n^2 t}$; $n \in \mathbb{N}$

(AB): $u(x,0) = 37$ für $0 < x < \pi$

$\Rightarrow$ AB auf Intervall $0 < x < \pi$ als ungerade Funktion 2π-periodisch fortsetzen.

Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \sin(nx) = f(x) = \frac{148}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin((2n+1)x)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{148}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin((2n+1)x) \cdot e^{-(2n+1)^2 t}$$

$\Rightarrow$ 1. Term von $u(x,t)$: $k = 0$: $\frac{148}{\pi} \sin(x)e^{-t}$

Beispiel 2

Noch ein Beispiel:

$$u_{xx} = u_{tt}$$

RB: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

AB: $u(x,0) = \sin(2x) + 2\sin(4x), u_t(x,0) = 3\sin(3x) + \sin(5x)$

1) Separation der Variablen:

1.1) Schreibe die Gleichung auf:

$$u(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

1.2) Setze u(x,t) in die DGL ein
: In unserem Fall:

$$(f(x)g(t))_{xx} = (f(x)g(t))_{tt}$$

$$f''(x)g(t) = f(x)g''(t)$$

1.3) Umformen und $-\omega^2$ definieren (immer):

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)} = \text{konstant} := -\omega^2$$

1.4) ODE nach f(x) lösen:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\omega^2 \Longrightarrow f''(x) = -\omega^2 f(x)$$

aus der Tabelle

$$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

1.5) Randbedingungen einsetzen und Sätzchen abschreiben:
Da $u(0,t) = u(\pi,t)$ für alle t gilt, macht nur eine Lösung Sinn, wo: $f(0) = f(\pi) = 0$. Daher suchen wir ein $f(x)$, welches diese Eigenschaft erfüllt.

Neu: $\boxed{f(x) = B\sin(\omega x)}$

$$f(0) = 0 = A\cos(0) + B\sin(0) \Longrightarrow: A = 0$$

Damit die zweite Randbedingung, $f(\pi) = 0$, immer erfüllt ist, müssen wir unsere Wahl von ω einschränken. Würde man $B = 0$ setzen, gäbe das $f(x) = 0$, also keine nützliche Lösung.

$$f(\pi) = 0 = B\sin(\omega\pi) \Longrightarrow \boxed{\omega_n = n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

Die Frage ist nun, für welche ω ist $\sin(\omega\pi) = 0$. Für alle ganzzahligen natürlich.

1.6) Nun machen wir denselben Chabis noch für g(t) mit den gefundenen ω_n

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = -\omega_n^2$$

$$g''(t) = -\omega_n^2 g(t) \Longrightarrow \boxed{g(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)}$$

$\to$ aus der Tabelle

2) Superposition/ Fourier-Reihe

Wie wir gesehen haben, gibt es sehr viele Lösungen für f(x) und g(t). Nämlich für jedes n eine. Deswegen schreiben wir alles nochmals auf:

2.1) Zusammenfassen:

$\longrightarrow f(x) = B_n \sin(\omega_n x)$
$\longrightarrow g(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)$
$\longrightarrow \omega_n = n = 0, 1, 2, \ldots$

2.2) Zusammensetzen:
Es gibt also diese Lösungen: (Die Konstanten: $B_n C_n$ und $B_n D_n$ werden durch a_n bzw. b_n ersetzt.)

$$u_n(x,t) = f(x)g(t) = a_n \sin(nx)\cos(nt) + b_n \sin(nx)\sin(nt)$$

2.3) Lösung:
Die vollständige Lösung besteht aus der Zusammensetzung aller dieser Lösungen:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_n a_n \sin(nx)\cos(nt) + b_n \sin(nx)\sin(nt)}$$

2.4) Anfangsbedingung:
Um die spezifische Lösung zu finden, setzen wir die Anfangsbedingungen ein:

$$u(x,0) = \sum_n a_n \sin(nx)\cos(n0) + b_n \sin(nx)\sin(n0) = \sum_n a_n \sin(nx)$$

$$u_t(x,0) = \sum_n -na_n \sin(nx)\sin(n0) + nb_n \sin(nx)\cos(n0) = \sum_n nb_n \sin(nx)$$

2.5) Fourierreihe, um a_n, b_n zu finden:
Im allerletzten Schritt gilt es, die a_n und b_n zu finden. Diese sind meistens einfach die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedinung. In unserem Fall bestehen die Anfangsbedinungen aus Sinus-Funktionen, also machen wir einfach einen Koeffizientenvergleich:

$$u(x,0) = \sum_n a_n \sin(nx) = \sin(2x) + 2\sin(4x)$$

$$\Longrightarrow a_n = 0, \text{ausser: } a_2 = 1, a_4 = 2$$

$$u_t(x,0) = \sum_n nb_n \sin(nx) = \underset{3 \cdot 1}{\overset{}{3}} \sin(3x) + \underset{5 \cdot 1/5}{\sin}(5x)$$

$$\Longrightarrow b_n = 0, \text{ausser: } b_3 = 1, b_5 = 1/5$$

Bemerkung: Da in der Summe: $nb_n \sin(nx)$ steht, müssen wir dieses n miteinbeziehen. Also für n = 3:

$$3b_3 \sin(3x) = 3\sin(3x) \Longrightarrow b_3 = 1$$

Setzen wir die Koeffizienten in die Lösung ein, gibt uns das:

$$u(x,t) = \sum_n a_n \sin(nx)\cos(nt) + b_n \sin(nx)\sin(nt) =$$

$$\sin(2x)\cos(2t) + 2\sin(4x)\cos(4t) + \sin(3x)\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5x)\sin(5t)$$

Beispiel 3

Noch ein Beispiel:

AB RB

$u_{xx}=d\cdot u_t$, und: $u(x,0)=x$, $u(0,t)=u(1,t)=0$

1) Separation der Variablen:

1.1) Schreibe die Gleichung auf:

$$u(x,t)=f(x)\cdot g(t)$$

1.2) Setze u(x,t) in die DGL ein

: In unserem Fall:

$$(f(x)g(t))_{xx}=d\cdot(f(x)g(t))_t$$

$$f''(x)g(t)=d\cdot f(x)g'(t)$$

1.3) Umformen und $-\omega^2$ definieren (immer):

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=d\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}=\text{konstant}:=-\omega^2$$

1.4) ODE nach f(x) lösen:

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-\omega^2\Longrightarrow f''(x)=-\omega^2 f(x)$$

aus der Tabelle

$$f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$$

1.5) Randbedingungen einsetzen und Sätzchen abschreiben:

Da $u(0,t)=u(1,t)$ für alle t gilt, macht nur eine Lösung Sinn, wo: $f(0)=f(1)=0$. Daher suchen wir ein $f(x)$, welches diese Eigenschaft erfüllt.

neu: $\boxed{f(x)=B\sin(\omega x)}$

$$f(0)=0=A\cos(0)+B\sin(0)\Longrightarrow: A=0$$

Damit die zweite Randbedingung, $f(1)=0$, immer erfüllt ist, müssen wir unsere Wahl von ω einschränken. Würde man $B=0$ setzen, gäbe das $f(x)=0$, also keine nützliche Lösung.

$$f(1)=0=B\sin(\omega)\Longrightarrow\boxed{\omega_n=\pi n=0,\pi,2\pi,3\pi,\dots}$$

Die Frage ist nun, für welche ω ist $\sin(\omega)=0$. Für alle ganzzahligen Vielfachen von π.

1.6) Nun machen wir denselben Chabis noch für g(t) mit den gefundenen ω_n

$$d\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}=-\omega_n^2$$

aus Tabelle

$$g'(t)=-\frac{\omega_n^2}{d}g(t)\Longrightarrow\boxed{g(t)=C_n e^{-\frac{\omega_n^2}{d}t}}$$

2) Superposition/Fourier-Reihe

Wie wir gesehen haben, gibt es sehr viele Lösungen für f(x) und g(t). Nämlich für jedes n eine. Deswegen schreiben wir alles nochmals auf:

2.1) Zusammenfassen:

- $\longrightarrow f(x)=B_n\sin(\omega_n x)$
- $\longrightarrow g(t)=C_n e^{-\frac{\omega_n^2}{d}t}$
- $\longrightarrow \omega_n=\pi n=0,\pi,2\pi,\dots$

2.2) Zusammensetzen:

Es gibt also diese Lösungen: (Die Konstanten: B_nC_n werden durch b_n ersetzt.)

$$u_n(x,t)=f(x)g(t)=B_nC_n\sin(n\pi x)e^{-\frac{\overbrace{\pi^2n^2}^{\omega_n^2}}{d}t}=b_n\sin(n\pi x)e^{-\frac{\pi^2n^2}{d}t}$$

2.3) Lösung:

Die vollständige Lösung besteht aus der Zusammensetzung aller dieser Lösungen:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_n b_n\sin(n\pi x)e^{-\frac{\pi^2n^2}{d}t}}$$

2.4) Anfangsbedingung:

Um die spezifische Lösung zu finden, setzen wir die Anfangsbedingungen ein:

$$u(x,0)=\sum_n b_n\sin(n\pi x)e^{-\frac{\pi^2n^2}{d}0}=\sum_n b_n\sin(n\pi x)$$

2.5) Fourierreihe, um b_n zu finden:

Im allerletzten Schritt gilt es, die b_n zu finden. Diese sind meistens einfach die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedinung. Man macht immer die ungerade stetige Fortsetzung. Das heisst, wenn man etwas auf dem Intervall [0,a] hat, dann berechnet man die Fourierreihe auf [-a,a] der ungeraden Fortsetzung. In unserem Fall:

da es das sin ist & so ungerade.

$f(x)=x$ auf dem Intervall [-1,1]

Da die Funktion ungerade ist, sind alle $a_n=0$ und es bleiben nur noch die b_n

• $T=2$ da $[-1,1]$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(x)\sin(n2\pi/Tx)dx=\int_{-1}^{1}x\sin(n\pi x)dx$$

ungerade · ungerade = gerade!

$$=2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \text{ (da der Inhalt des Integrals gerade ist)}$$

↳ Deshalb darf ich $\int_{-1}^{1}=2\cdot\int_0^1$!

$$=2\left([x\cdot-\cos(n\pi x)/n\pi]_0^1-\int_0^1 1\cdot-\cos(n\pi x)/n\pi dx\right)$$

$$=2\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(n\pi x)dx\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(-\cos(n\pi)+[\sin(n\pi x)/n\pi]_0^1\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}(-\cos(n\pi)+\sin(n\pi)/n\pi)$$

$\sin(n\pi)=0$ und $\cos(n\pi)=(-1)^n$ für alle ganzzahligen n.

$$b_n=\frac{-2(-1)^n}{n\pi}$$

Damit wäre die Lösung der PDE:

$$u(x,t)=\sum_n b_n\sin(nx)e^{-\frac{\pi^2n^2}{d}t}=\sum_n\frac{-2(-1)^n}{n\pi}\sin(nx)e^{-\frac{\pi^2n^2}{d}t}$$

Beispiel 4

Noch ein Beispiel, diesmal mit anderen Variablen: u(x,y)

RB AB

$\Delta u=0$, und: $u(x,0)=u(0,y)=u(1,y)=0$, $u(x,1)=x\cdot(1-x)$

1) Separation der Variablen:

1.1) Schreibe die Gleichung auf:

$$u(x,y)=f(x)\cdot g(y)$$

1.2) Setze u(x,y) in die DGL ein

: In unserem Fall:

Laplace-Operator

$$\Delta(f(x)g(y))=0\Longrightarrow(f(x)g(y))_{xx}+(f(x)g(y))_{yy}=0$$

$$f''(x)g(y)=-f(x)g''(y)$$

1.3) Umformen und $-\omega^2$ definieren (immer):

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-\frac{g''(y)}{g(y)}=\text{konstant}:=-\omega^2$$

1.4) ODE nach f(x) lösen:

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-\omega^2\Longrightarrow f''(x)=-\omega^2 f(x)$$

aus der Tabelle

$$f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$$

1.5) Randbedingungen einsetzen und Sätzchen abschreiben:

Da $u(0,y)=u(1,y)$ für alle y gilt, macht nur eine Lösung Sinn, wo: $f(0)=f(1)=0$. Daher suchen wir ein $f(x)$, welches diese Eigenschaft erfüllt.

Neu: $\boxed{f(x)=B\sin(\omega x)}$

$$f(0)=0=A\cos(0)+B\sin(0)\Longrightarrow: A=0$$

Damit die zweite Randbedingung, $f(1)=0$, immer erfüllt ist, müssen wir unsere Wahl von ω einschränken. Würde man $B=0$ setzen, gäbe das $f(x)=0$, also keine nützliche Lösung.

$$f(1)=0=B\sin(\omega)\Longrightarrow\boxed{\omega_n=\pi n=0,\pi,2\pi,3\pi,\dots}$$

Die Frage ist nun, für welche ω ist $\sin(\omega)=0$. Für alle ganzzahligen Vielfachen von π.

1.6) Nun machen wir denselben Chabis noch für g(y) mit den gefundenen ω_n

$$-\frac{g''(y)}{g(y)}=-\omega_n^2$$

Tabelle

$$g''(y)=\omega_n^2 g(y)\Longrightarrow g(y)=C_n\sinh(\omega_n y)+D_n\cosh(\omega_n y)$$

Da wir nun noch eine vierte Randbedingung haben, müssen wir diese an dieser Stelle berücksichtigen.

dann ist $u(x,0)=0$ für alle x's!

$$u(x,0)=0\Longrightarrow g(0)=0$$

$$g(0)=C_n\sinh(0)+D_n\cosh(0)=D_n=0$$

Also kriegen wir für g(y):

Neu

$$\boxed{g(y)=C_n\sinh(\omega_n y)}$$

2) Superposition/Fourier-Reihe

Wie wir gesehen haben, gibt es sehr viele Lösungen für f(x) und g(y). Nämlich für jedes n eine. Deswegen schreiben wir alles nochmals auf:

2.1) Zusammenfassen:

- $\longrightarrow f(x)=B_n\sin(\omega_n x)$
- $\longrightarrow g(y)=C_n\sinh(\omega_n y)$
- $\longrightarrow \omega_n=\pi n=0,\pi,2\pi,3\pi,\dots$

2.2) Zusammensetzen:

Es gibt also diese Lösungen: (Die Konstanten: B_nC_n werden durch b_n ersetzt.)

$$u_n(x,y)=f(x)g(y)=B_nC_n\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)=b_n\sin(n\pi x)\sinh(\overbrace{\omega_n}^{n\pi}y)$$

2.3) Lösung:

Die vollständige Lösung besteht aus der Zusammensetzung aller dieser Lösungen:

$$\boxed{u(x,y)=\sum_n b_n\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)}$$

2.4) Anfangsbedingung:

Um die spezifische Lösung zu finden, setzen wir die letzte Randbedingung ein:

$$u(x,1)=\sum_n b_n\sinh(n\pi)\sin(n\pi x)$$

2.5) Fourierreihe, um b_n zu finden:

Im allerletzten Schritt gilt es, die b_n zu finden. Diese sind meistens einfach die Fourierkoeffizienten der Anfangsbedinung. Man macht immer die ungerade stetige Fortsetzung. Das heisst, wenn man etwas auf dem Intervall [0,a] hat, dann berechnet man die Fourierreihe auf [-a,a] der ungeraden Fortsetzung. In unserem Fall:

$f(x)=x(1-x)$ auf dem Intervall [0,1] und $f(x)=x(x+1)$ auf dem Intervall [-1,0]

Da die Funktion ungerade ist, sind alle $a_n=0$ und es bleiben nur noch die b_n:

$F_n=b_n\cdot\sinh(n\pi)$

$$\cancel{b_n}\,F_n=\frac{2}{T}\int_{T_0}^{T_0+T}f(x)\sin(n2\pi/Tx)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)dx$$

$$=2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx \text{ (da der Inhalt des Integrals gerade ist)}$$

$$=\frac{4}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)$$

Jetzt fehlt nur noch ein Koeffizientenvergleich:

$$u(x,1)=\sum_n b_n\sinh(n\pi)\sin(n\pi x)=\sum_n\overbrace{\frac{4}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)}^{F_n}\sin(n\pi x)$$

↳ b_n scheint auch $\sinh(n\pi)$ zu eliminieren!

$$b_n=\frac{F_n}{\sinh(n\pi)}\Longrightarrow b_n=\frac{4}{n^3\pi^3}\frac{1-(-1)^n}{\sinh(n\pi)}$$

Damit wäre die Lösung der PDE:

$$u(x,y)=\sum_n b_n\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

$$=\sum_n\frac{4}{n^3\pi^3}\frac{1-(-1)^n}{\sinh(n\pi)}\sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

Inhomogene Randbedingungen

Meistens wird an der Prüfung ein Ansatz gegeben sein. Sollte man keinen haben und falls man inhomogene Randbedingungen hat, so kann man das PDE in ein homogenes PDE umwandeln, in dem man:

1) Man hat die RB: $u(0,t) = u_0$ und $u(L,t) = u_L$ mit AB: $u(x,0) = f(x)$
2) Man definiert: $v(x,t) = u(x,t) - u_0 + \frac{x}{L}(u_0 - u_L)$
3) Man passt die Anfangsbedingungen an. AB: $\cdot\, v(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$

$$v(x,0) = f(x) - u_0 + \frac{x}{L}(u_0 - u_L) := F(x)$$

4) Man löst die selbe PDE für $v(x,t)$ mit homogenen RB: $v(0,t) = 0$ und $v(L,t) = 0$
5) Man berechnet das Endresultat $u(x,t)$ aus $v(x,t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + u_0 - \frac{x}{L}(u_0 - u_L)$$

Beispiel

$$u_{xx} = -u_t, \quad \text{und: } u(x,0) = \sin(2x) + 10,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 10$$

$$v(x,t) = u(x,t) - 10 + \frac{x}{\pi}(10 - 10) = u(x,t) - 10$$

Homogene PDE:

$$v_{xx} = -v_t, \quad \text{und: } \underbrace{v(x,0) = \sin(2x)}_{\text{AB}},\ \underbrace{v(0,t) = v(\pi,t) = 0}_{\text{RB}}$$

$\to \sin(2x) + 10 - 10$
$= \sin(2x)$

Hat die Lösung:

$$v(x,t) = \sin(2x)e^{4t}$$

Lösen wie oben!

Somit ist das Endresultat:

$$u(x,t) = v(x,t) + 10 - \frac{x}{\pi}(10 - 10) = \sin(2x)e^{4t} + 10$$

Harmonische Funktionen

Harmonische Funktionen sind ganz einfach Funktionen, die $\Delta u(x,y) = 0$ erfüllen. Jedoch haben harmonische Funktionen Eigenschaften, welche man unbedingt für die Prüfung kennen sollte.

Mittelwerteigenschaft

Der Funktionswert in der Mitte eines Kreises entspricht dem Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand dieses Kreises. Mathematisch ausgedrückt:

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_\gamma u(x,y)ds}$$

Wobei γ einen Kreis mit Radius R um den Punkt (x_0, y_0) parametrisiert.

Maximumsprinzip

Das Maximum einer harmonischen Funktion wird immer nur auf dem Rand des Definitionsbereiches angenommen. Sollte trotzdem im Inneren ein Maximum angenommen werden, so geht das nur, falls u(x,y) konstant ist.

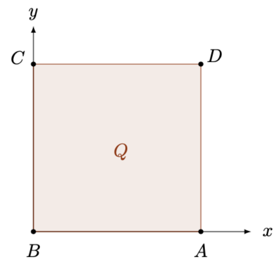
Minimumsprinzip

Das Minimum einer harmonischen Funktion wird immer nur auf dem Rand des Definitionsbereiches angenommen. Sollte trotzdem im Inneren ein Minimum angenommen werden, so geht das nur, falls u(x,y) konstant ist.

Beispiel

Wir sollen hier das Maximum und das Minimum finden.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{auf } AB, BC, AD, \\ u = x(1-x) & \text{auf } CD. \end{cases}$$

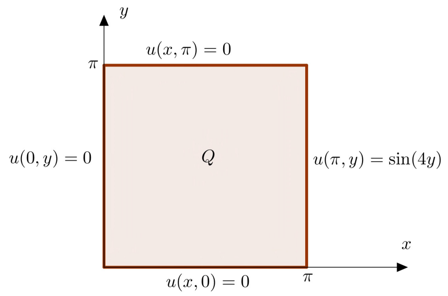


Das Maximumsprinzip/Minimumsprinzip sagt uns, dass das Max./Min. auf dem Rand angenommen wird. Wir suchen also zuerst nach dem Maximum auf dem Rand.

1) Alle Ränder sind 0 ausser CD, untersuchen wir also CD.
2) Die Werte auf dem Rand CD folgen der Parabel $x(1-x)$, welche ihr Maximum bei $x = \frac{1}{2}$ annimmt.
3) Daher ist klar, dass das Maximum an diesem Punkt angenommen wird: $(1/2,\ 1)$

Nun suchen wir nach dem Minimum.
1) Alle Ränder sind 0 ausser CD, untersuchen wir also CD.
2) Die Werte auf dem Rand CD folgen der Parabel $x(1-x)$, werden also nie kleiner als 0, da $x \in [0,1]$ Minimum.
3) Daher ist klar, dass das ~~Maximum~~ an allen Punkten angenommen wird, wo u = 0 ist. Also auf allen Rändern ausser CD.
↳ Da es auch auf CD kein Wert gibt unter 0!

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{auf } Q \\ u(0,y) = 0 & \text{für } 0 < y < \pi \\ u(x,0) = 0 & \text{für } 0 < x < \pi \\ u(x,\pi) = 0 & \text{für } 0 < x < \pi \\ u(\pi,y) = \sin(4y) & \text{für } 0 < y < \pi \end{array}$$



· Funktion u ist eine harmonische Funktion. Das Maximumprinzip sagt nun aus, dass das Maximum auf dem Rand von Q angenommen wird.

① auf 3 Seiten ist $u = 0$, auf 4. Seite gilt $u(\pi, y) = \sin(4y)$ für $y \in [0, \pi]$.

② Kritische Punkte suchen: $u_y(\pi, y) = 0$

$u_y = 0 \Rightarrow 4\cos(4y) = 0 \Rightarrow y \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$ mit $y \in [0, \pi]$

$\Rightarrow$ Einsetzen in $u(\pi, y)$:

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) = 1 \text{ und } \sin(\frac{3\pi}{2}) = \sin(\frac{7\pi}{2}) = -1.$$

$\Rightarrow$ Maximalwert 1 erreicht bei: $(\pi, \pi/8)$ & $(\pi, 5\pi/8)$

Begriffe

Begriff	Bedeutung oder Kapitel
Basis	→ siehe Basis
Determinante	det(A) = Produkt der Eigenwerte
gerade	→ siehe Basics und Formeln
Harmonisch	$\Delta u = 0$, → siehe Harmonische Funkt.
Induzierte Norm	$\sqrt{\langle x,y \rangle}$
Jacobi-Matrix	→ siehe Linearisierung
Jordan-Matrix	J Matrix, → siehe Jordanblöcke
Maximumsprinzip	→ siehe Harmonische Funkt.
Minimumsprinzip	→ siehe Harmonische Funkt.
Mittelwerteigenschaft	→ siehe Harmonische Funkt.
Norm	→ siehe Norm
ODE	Ordinary-Differential-Equation
Orthogonal	Skalarprodukt = $\langle x,y \rangle = 0$
Orthonormal	Orthogonal + Normiert ($\|\| x \|\| = 1$)
Orthonormalbasis	→ siehe Orthonormalbasis
PDE	Partial-Differential-Equation
Seperation der Var.	→ siehe Fourier-Methode (1.)
Skalarprodukt	→ siehe Skalarprodukt
Spur	Tr(A) = $\sum$ Diagonalelemente
Superposition	→ siehe Fourier-Methode (2.)
ungerade	→ siehe Basics und Formeln

Nicolas Adam, 8. Januar 2021

Wichtige Gleichungen - Eulersche Formeln

· $\cos(\pi n) = (-1)^n$; $\sin(n\pi) = 0$

· $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$

$\to e^{i\pi} = \cos(\pi) = -1$

$(-1)^n \cdot (-1)^n = 1$

$\to e^{i\pi n} = \cos(\pi n) = (-1)^n$

$e^{-i\pi n} = \cos(-\pi n) = (-1)^n$

· $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ | $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ | $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \cdot \sinh(y)$

$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \cosh(y)$

Wichtige Tricks & Tipps

· immer gerade & ungerade im Kopf haben.

$\to \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \begin{cases} f(x) \text{ gerade} \to 2 \cdot \int_0^1 f(x)dx \\ f(x) \text{ ungerade} \to 0 \end{cases}$

ungerade · ungerade = gerade
ungerade · gerade = ungerade

· immer schauen ob etw. einem Fourier-Koeffizienten gleicht.

Bsp: $\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x) \cdot f(x)dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T} nx)dx = a_n$

· falls es ODE zu lösen gibt immer auf essentielle DGL Lösungen achten:

Bsp. $4y'' + y = 0$
$y'' = -\frac{1}{4}y$
$y = C_1\sin(\frac{1}{2}x) + C_2\cos(\frac{1}{2}x)$

Essentielle DGL Lösungen

$y'(x) = \lambda y(x) \to y(x) = e^{\lambda x}y(0)$
$y''(x) = \omega^2 y(x) \to y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$
$y''(x) = -\omega^2 y(x) \to y(x) = C_1\sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x)$

Bsp. $u(x,y) = \frac{\sinh(x\sqrt{\varepsilon^2 + 1})}{\sinh(\pi\sqrt{\varepsilon^2 + 1})}\sin(y)$

Für $\varepsilon = 0$ ist die Lösung $u(x,y)$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass dann auf Q die Ungleichung $u(x,y) \le \frac{x}{\pi}$ gilt.

Hinweis. Die rechte Seite der Ungleichung ist ebenfalls harmonisch.

Der Laplace Operator ist ein Linearoperator. Da $u(x,y)$ und $\frac{x}{\pi}$ harmonisch sind, ist auch deren Differenz wieder harmonisch. Wir definieren deshalb

$g(x,y) = u(x,y) - \frac{x}{\pi}$.

Diese Funktion nimmt, da sie harmonisch ist, ihr Maximum auf den Rand an. Einsetzen ergibt

$$\max(g(x,y)) = \max(u(x,y) - \frac{x}{\pi}) = 0$$

auf dem Rand. Das heisst, die Funktion ist kleiner auf Q als auf dem Rand, wo deshalb

$$g(x,y) \le 0$$

und somit

$$u(x,y) \le \frac{x}{\pi}.$$

Mathe III – Valentin Baumann

lineare Modelle

$\boxed{y' = Ay + B}$

→ falls alle Koeffizienten konstant & A invertierbar

· stationäre Lösung: $\boxed{y_\infty = -A^{-1}B}$

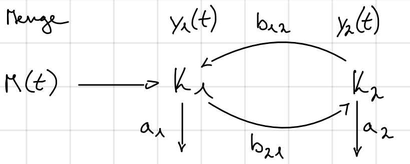
· Homogene Lösung: $y' = Ay$

$\rightarrow y_{hom}(t) = e^{At}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$

· allg. Lösung: $\boxed{y(t) = y_\infty + e^{At}\cdot\lambda}$

Compartement Models

Bsp1:



$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= M(t) - a_1 y_1(t) - b_{21}y_1(t) + b_{12}y_2(t)\\ y_2'(t) &= -a_2 y_2(t) + b_{21}y_1(t) - b_{12}y_2(t)\end{aligned}\right\} y'(t) = Ay(t) + B$$

$$A = \begin{pmatrix} -(a_1+b_{21}) & b_{12}\\ b_{21} & -(b_{12}+a_2)\end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} M(t)\\ 0\end{pmatrix}$$

Bsp2: $\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{b} \boxed{\text{Leber}}$

· $y_1(t) = -by_1(t)$; $y_1(0) = y_{1,0}$ → als $y'(t) = A\cdot y(t)$ schreiben

$y_2(t) = by_1(t)$; $y_2(0) = 0$ mit $y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$; $y'(t) = \begin{pmatrix}y_1'(t)\\ y_2'(t)\end{pmatrix}$

↳ Matrix erstellen: $A = \begin{pmatrix}-b & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$

① & ②: EV von A: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ mit EW: $-b, 0$

③ → EV linear unabhängig!

④ $y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-bt}\\ -C_1e^{-bt} + C_2\end{pmatrix} = C_1e^{-bt}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2e^{0t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

RIS-Modell

Modellannahmen:

· Krankheit ist von begrenzter Dauer

· Jeder Kranke wird wieder gesund

· überstandene Krankheit führt zu lebenslanger Immunität

· Population ist isoliert (keine Zu-, Abwanderung & keine Todesfälle)

$$\left.\begin{aligned} S(t) &= \#\ \text{Ansteckbare zur Zeit } t\\ I(t) &= \#\ \text{Infizierte zur Zeit } t\\ R(t) &= \#\ \text{Geheilte zur Zeit } t\end{aligned}\right\} \text{Gesamtpopulation}$$

· $S'(t) = -cI(t)S(t)$

· $I'(t) = cI(t)S(t) - \omega I(t)$ — Heilungs-koeffizient

· $R'(t) = \omega I(t)$

d.h. an S kann man ablesen wann I maximal

· Höhepunkt der Epidemie: $S(t_{max}) = \omega / c$

↳ ergibt sich aus $I'(t) = 0$!

· $S(t) > \frac{\omega}{c}$: $I(t)$ wächst ; $S(t) < \frac{\omega}{c}$: $I(t)$ schrumpft

$$I'(t) = rI(t)\left(1 - \frac{I(t)}{K}\right)$$

wobei $r = cN_0 - w$ und $K = N_0 - \frac{w}{c}$, falls $cN_0 - w \neq 0$ (falls $cN_0 - w = 0$, ist $I'(t) = -cI^2(t)$).

Die Fixpunkte erhalten wir durch Nullsetzen der linken Seite der DGL, also $I' = 0$, was genau für $I_{\infty,1} = 0$ und $I_{\infty,2} = K$ erfüllt ist. Dies sind insbesondere konstante / stationäre Lösungsfunktionen.

Im folgenden betrachten wir die nicht-trivialen Fälle, wo $I_0 \notin \{0, K\}$ gilt und erinnern uns, dass $I(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ gelten muss.

Wir erinnern uns, dass $r = cN_0 - w$, also ist $\mathcal{R}_0 = \frac{cN_0}{w} > 1$ genau dann, wenn $r > 0$ und $\mathcal{R}_0 < 1$ genau dann, wenn $r < 0$. Man beachte, dass im Fall $\mathcal{R}_0 < 1$ gilt $K = N_0 - \frac{w}{c} < 0$, und falls $\mathcal{R}_0 > 1$, so auch $K > 0$.

Es folgt nun:

i) Falls $\mathcal{R}_0 > 1$ gilt $K > 0$ und $r > 0$. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle.

- Falls $I_0 > K > 0$, so folgt aus (1) unter Berücksichtigung der zusätzlichen Bedingungen für I, dass $I'(t) < 0$ für alle t gilt. Also ist $I(t)$ monoton fallend und konvergiert somit zum Fixpunkt K.
- Falls $0 < I_0 < K$, so folgt aus (1), dass $I'(t) > 0$ für alle t gilt. Also ist $I(t)$ monoton wachsend und konvergiert somit zum Fixpunkt K.

In beiden Fällen haben wir also $\lim_{t\to\infty} I(t) = K$.

ii) Falls $\mathcal{R}_0 < 1$ gilt $K < 0 < I_0$ und $r < 0$. Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Bedingungen für I, können wir aus (1) schliessen, dass $I'(t) < 0$ für alle t gilt. Insbesondere ist $I(t)$ monoton fallend und konvergiert somit zum (einzigen) Fixpunkt 0, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$.

Im Fall $\mathcal{R}_0 < 1$ stirbt die Krankheit also auf lange Sicht immer aus, im Fall $\mathcal{R}_0 > 1$ erhalten wir ein *endemisches Equilibrium*, was bedeutet, dass auf lange Sicht eine konstante Zahl K der N_0 Individuen infiziert sein wird.

Vektorräume

V eine Menge mit 2 Operationen:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ \text{Vektoraddition: } V \times V \to V\\ &\cdot\ \text{Skalare Multiplikation: } \mathbb{R} \times V \to V\end{aligned}\right\} \text{können beliebig definiert sein.}$$

Untervektorraum

Bsp2:

Ist U ein Unterraum von V, dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$?

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 1\}$$

Da $\mathbb{R}^2$ eine 2D-Ebene ist, besteht dieser Unterraum aus allen Punkten auf der Geraden parallel zur x-Achse. Also $\vec{x} = [x_1, 1]^T$

1) Es existiert **KEIN** Null-Element, denn: $0_V = [0, 1]^T$:

Null-Element ist eineg. alle Variablen auf 0 fallsnormal (auf 1 zb. wenn Operationen wie oben def. sind.

$$\begin{bmatrix} x_1\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\\ 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1\\ 1\end{bmatrix}$$

Damit ist klar, U ist kein Unterraum

Jordan Normalfunktion JNF

Sei $A \in M_{n\times n}$. Dann existiert $T \in M_{n\times n}$, so dass $T^{-1}AT = J$ eine Jordan-Blockdiagonalmatrix ist.

Matrixexponential: Jordanblöcke

Bsp2:

Sagen wir, wir haben zur Matrix die Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ und zu diesen Eigenwerten haben wir die Eigenvektoren: v_{11} und v_{12} zu λ_1 und v_2 zu λ_2. $\lambda_1 = 2$ sei ein 3-facher EW und $\lambda_2 = 3$ ein 2-facher EW. Jetzt haben wir 3 EV anstatt zwei. In diesem Fall müsste die J-Matrix wie folgt aussehen: (Für jeden EV ein Jacobiblock, die einzelne 2 zählt auch als Block)

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

→ auf Diagonale sind die EW von A!

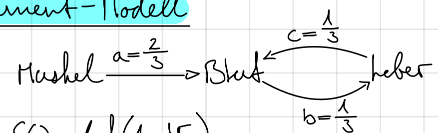
Wenn man nun e^{Jt} berechnen will, kann man das blockweise tun. $J_2 = 2, e^{J_2 t} = e^{2t}$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}; e^{tJ_1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}; e^{tJ_3} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t}\\ 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$$

Nun kann man e^{Jt} einfach berechnen, indem man alle die Blöcke zusammensetzt:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$$

Bsp. 3-Kompartiment-Modell



· Beschreiben mit $y' = Ay$

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0\\ 2/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

1. EW: $\det(A - \lambda E)$

$= (-2/3 - \lambda)(-1/3 - \lambda)^2 - 1/9(-2/3 - \lambda) = -\lambda^3 - 4/3\lambda^2 - 4/9\lambda$

$= -\lambda(\lambda^2 + 4/3\lambda + 4/9) = -\lambda(\lambda + 2/3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = -2/3$

$\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0\\ 2/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0\\ 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix} \Rightarrow x \overset{!}{=} 0$ & $y = z$, $v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

→ mit $\lambda_{2,3} = -2/3$ erhält man $v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

· $T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0\\ 0 & -2/3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = J$

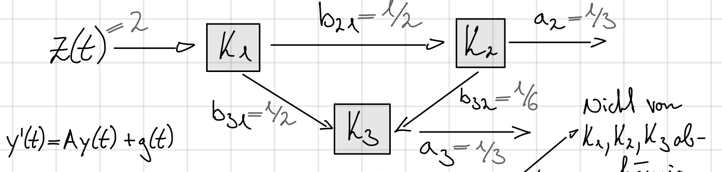
$\longrightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2/3t} & te^{-2/3t} & 0\\ 0 & e^{-2/3t} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = e^{At}y_0 = (Te^{Jt}T^{-1})y_0$

Der inhomogene Fall

Störterm

- homogen: $y' = Ay$
- $\boxed{\text{inhomogen: } y' = Ay + g}$



$$A = \begin{pmatrix} -(b_{31}+b_{21}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2+b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix};\quad g(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① Entkoppeln des Systems bei Diagonalisierbarkeit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix};\quad g(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① EW & EV der Matrix A berechnen

A hat EW $-1, -1/2, -1/3$ mit Eigenbasis $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② Matrix wirklich diagonalisierbar?

A hat 3 versch. EW also sind EV linear unabhängig

$\to$ Es gilt: $T^{-1}AT = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ & $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(-1, -1/2, -1/3)$

③ Problem: Die 3 DGL's der $K_1, K_2 \& K_3$ hängen von einander ab.

$\Rightarrow$ Lösung: Entkoppeln! $\to$ Substitution

Matrix aus Konstanten

④ Setze $y = Tz$ & so $y' = (Tz)' = Tz'$

⑤ Einsetzen in $y' = Ay + g$: $Tz' = ATz + g$

⑥ Multiplik. von links mit T^{-1}: $z' = T^{-1}AT + T^{-1}g$

$$z' = \mathrm{diag}(-1, -1/2, -1/3)\, z + T^{-1}g$$

⑦ T^{-1} & $T^{-1} \cdot g = h$ berechnen.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad h = T^{-1} \cdot g = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nun DGL's entkoppelt. Wir erhalten 3 linear inhomogene DGL's: $z_i' = \lambda_i z_i + h_i$ mit $h_i = (T^{-1}g)_i$:

$z_1' = -1 z_1 - 1$ $z_2' = -\frac{1}{2} z_2 - 2$ $z_3' = -\frac{1}{3} z_3 + 3$	Lösung z durch Var. der Konstanten $\longrightarrow$	$z_1 = C \cdot e^{-t} - 1$ $z_2 = C \cdot e^{-t/2} - 4$ $z_3 = C \cdot e^{-t/3} + 9$

$$\boxed{\begin{aligned} &y(x) = (K_0(x) + C)\, e^{P(x)} \\ &\text{mit } K_0(x) = \int q(x)\, e^{-P(x)}\, dx \end{aligned}}$$

Bsp: $z_3(t)$; $K_0(t) = \int 3 e^{t/3}\, dt = 9e^{t/3}$

$z_3(t) = (9e^{t/3} + C)\, e^{-t/3} = 9e^0 + Ce^{-t/3}$

$z_3(t) = Ce^{-t/3} + 9$

⑧ Lösung: $y(t) = T \cdot z(t)$ mit $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$

② Partikulärlösung

$$\text{Allg. Lösung für I} \leftarrow \underline{y_{allg.}} = \underbrace{y_{hom}}_{\text{allg. Lösung für H}} + \underbrace{y_{part}}_{\text{part. Lösung von I}}$$

- Allg. Lösung für H: $y_H(t) = e^{tA}\tilde{y}$; für I: $y(t) = y_p(t) + e^{tA}\tilde{y}$
- AWP $y(0) = y_0$ für H: $y_H(t) = e^{tA} \cdot y_0$; für I: $y(t) = y_p(t) + e^{tA}(y_0 - y_p(0))$

$\to$ Bsp. für $y_p(t)$ ist y_∞: aber nur falls $\boxed{g}$ konstant.

Denn: $y' = Ay + g \to y_\infty' = 0 = Ay_\infty + g$ mit A & y_∞ konstant

- Falls $\det(A) \neq 0$, existiert A^{-1} & so: $y_\infty = -A^{-1} \cdot g$

$\to$ Frage ob y_∞ existiert hängt von Lösbarkeit des LGS $A \cdot y_\infty = -g$ ab. Falls $\det(A) = 0$ entscheidet Rang.

$\Rightarrow$ Lösung des AWP $y(0) = y_0$ ist $y(t) = y_\infty + e^{tA}(y_0 - y_\infty)$

③ Mehrdim. Variation der Konstanten

$\to$ siehe Seite 5

Lineare Differentialgleichungssysteme

Bsp: $y'(t) = A \cdot y(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y(t)$

Stationärer Zustand eines DGL-Systems

$\boxed{y'(t) \overset{!}{=} 0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \\ y_{\infty,3} \end{pmatrix} \Rightarrow y_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basis aus EV von A

$\{v_1, v_2, v_3\}$ als Basis von $\mathbb{C}^3$

gegeben: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$; EV ist auch der stationäre Zustand (mit EW=0)

$\hookrightarrow A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow EW = i\omega$

$\Rightarrow$ Da A reell folgt: $A \cdot v_1^* = \lambda_1^* \cdot v_1^*$ (* komplex konjugiert)

so ist: $v_2 = v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $EW = \lambda_2 = \lambda_1^* = -i\omega$

$\Rightarrow v_1, v_2$ & v_3 sind linear unabhängig!

$\to$ falls 1 EV komplex ist, ist sicher ein anderer das komplex konjugierte!

3x3 Matrix einfach invertieren

Es gilt: $\boxed{\begin{pmatrix} \mathcal{U} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}^{-1} & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}}$ falls: $\mathcal{U} \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$, invertierbar; $0 \neq b \in \mathbb{C}$

Bsp: $T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$; $b = 1$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i & 0 \\ 1/2 & -1/2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NB: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \omega i & 0 & 0 \\ 0 & -\omega i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\omega i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\omega i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ gleiche Reihenfolge wie oben

$$\Rightarrow e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1}$$

Jordansche Normalform & $\mathcal{L}_A$

$y'(t) = A \cdot y(t) + z(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to EW: -1, -1 \& -3$

Es gilt $A = TJT^{-1}$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

EV von A

$e^{tA} = (b_1(t)\ b_2(t)\ b_3(t))$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist EV mit EW=-3

Sei $\mathcal{L}_A$ der Lösungsraum des homogenen Systems

$\underline{y_H'(t) = A \cdot y_H(t)} \to \mathcal{L}_A = \{t \mapsto v_1 e^{\lambda_1 t}, t \mapsto v_2 e^{\lambda_2 t}, \dots\}$ mit λ_i=EW & v_i=EV von Matrix A!

Mit EV $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ soll Vektor $\tilde{b}_1$ bestimmt werden, der mit b_1 2-dim. UR von $\mathcal{L}_A$ erzeugt.

Vektoren, die Vektorraum/Lösungsraum $\mathcal{L}_A$ erzeugen:

① $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3t} = \tilde{b}_1$; ② $b_1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-1t}$; ③ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-1t}$

- $\tilde{b}_1$ z.B. ist also eine Lösung des homogenen DGL-System

$\Rightarrow$ Nur 2 dieser Vektoren (z.B. b_1 & $\tilde{b}_1$) erzeugen ein 2-dim. Unterraum von $\mathcal{L}_A$!

$\to$ b_1 & $\tilde{b}_1$ müssen linear unabhängig sein!

Stationäre Lösung

gegeben: $y' = g(y)$

- Werte $y(x) = y_s$ bei denen DGL Null ist
  ↳ Konvergent wenn stabil.
- stationäre Lösung falls $y'(x) = 0$

$$\boxed{y' = g(y) \Rightarrow y' = 0 = g(y)}$$

→ Im Richtungsfeld ist das $y = F(x,y)$ mit !

mit y_s - Stationäre Lösung

Stabilität

$g(y)$ nach y ableiten & y_s einsetzen:

- $g'(y_s) < 0 \Rightarrow y_s$ stabil
- $g'(y_s) \geq 0 \Rightarrow y_s$ instabil

- zB.: falls Frage: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \dots$, dann schauen, welche Werte stat. Lösungen sind & dann schauen, welche von diesen y_s stabil ist.

Beispielaufgabe: Stationäre Lösung & Richtungsfeld

DGL mit konstanten Koeffizienten: $y'(x) = -2y(x) + b$

- Richtungsfeld mit horizontalen bei $y = 3$.

$\Rightarrow y(x) = 3$; $y'(x) = 0$ $\quad 0 = -2 \cdot 3 + b \quad \underline{\underline{b = 6}}$

$y'(x) = y^2(x) - 1/4$; stat. Lösung gesucht!

$0 = y^2(x) - 1/4$

$y^2(x) = 1/4 \rightarrow \underline{y(x) = \pm 1/2}$

- $g'(y) = (y^2(x) - 1/4)'$
- $g'(y) = 2y(x) - 1/4\, y(x)$ → $g'(1/2) = 1 - 1/8 > 0$ Instabil
  $g'(-1/2) = -1 + 1/8 < 0$ Stabil

Stabilität optisch abschätzen

Sei eine DGL 1. Ordnung (also mit 1. Ableitung als höchste Ableitung) gegeben:

$$y' = g(y)$$

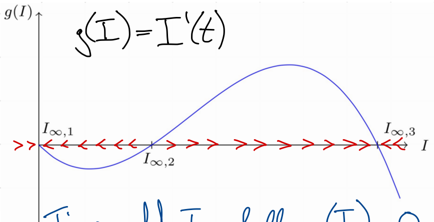
Wenn man nun abschätzen will, wie sich y(t) im laufe der Zeit ändert, geht das wie folgt:

1) Zeichne den Graph $g(y)$

2) Zeichne auf der horizontalen Achse Pfeile:
   Pfeil nach rechts, wo **g(y) positiv** ist.
   Pfeil nach links, wo **g(y) negativ** ist.

$g'(y_\infty) < 0 \rightarrow$ stabil
$g'(y_\infty) > 0 \rightarrow$ instabil

3) Stell dir vor, es befindet sich eine Ameise auf dieser horizontalen Achse, die den Pfeilen folgt. Wohin wird sich diese Ameise im Laufe der Zeit bewegen? Wo landet sie, wenn sehr viel Zeit verstrichen ist?



$g'(y_{\infty,1}) < 0 \rightarrow$ stabil
$g'(y_{\infty,2}) > 0 \rightarrow$ instabil
$g'(y_{\infty,3}) < 0 \rightarrow$ stabil

Fixpunkt I_∞ falls $g(I) = 0$; dann für I auflösen

Bsp. - Aufgabe

$$x_1' = -a_1 x_1 + a_3 x_3$$
$$x_2' = -a_2 x_2 + a_1 x_1 \quad *$$
$$x_3' = -a_3 x_3 + a_2 x_2$$

$y'(t) = A\,y(t)$ mit EW $= 0, -4$ & -5 & EV $= \bar{x}$ für EW $= -4$

Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ des Systems $(*)$, für welche $x(10) = \bar{x}$ gilt. ($\bar{x}$ ist der Eigenvektor aus Teilaufgabe (b).)

$$y(t) = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot \bar{x} \cdot e^{-4t} + C_3 \cdot v_3 e^{-5t}$$

$$\Rightarrow y(10) = \bar{x} : \; C_1 = C_3 = 0;\; y(10) = \bar{x} = C_2 \bar{x} e^{-40}$$

$$C_2 = e^{40} \Rightarrow y(t) = \bar{x} \cdot e^{-4t+40} = \bar{x} \cdot e^{-4(t-10)}$$

Die Summe $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ von Lösungen von $(*)$ ist...

- Summe der Zeilen $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 =$ konstant!

$$(x_1 + x_2 + x_3)' = -a_1 x_1 + a_3 x_3 - a_2 x_2 + a_1 x_1 - a_3 x_3 + a_2 x_2 = 0.$$

Wärmeleitungs & Diffusionsgleichung

a priori-Aussagen: Aussagen über Lösungen, ohne die Lösung zu kennen. (Information, die man allein aus der Gleichung gewinnt, ohne sie zu lösen)

- Energieerhaltung: Die Wärmemenge im Draht ist konstant in t
- Laufzeitverhalten: $\lim_{t \to \infty} u(x,t) =$ Durchschnittliche Anfangstemperatur konstant in x.
- Entropiezunahme: Die Entropie des Systems ist in t monoton wachsend.
- Maximumprinzip: In einem thermisch abgeschlossenen System ist die Maximaltemp. monoton fallend in t, und die Minimaltemp. ist monoton wachsend in t.

Nichtlineare Modelle

Linearisierung

Bsp.

$$\vec{y}' = F(y) = \begin{bmatrix} (y_1 - 2)(y_2 - 3) \\ (1 - y_2) \end{bmatrix}$$

1) Die stationäre Lösung ist:

$$\vec{y}_\infty = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Berechne die Jacobi-Matrix:

$$A = DF(\vec{y}_\infty) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(\vec{y}) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(\vec{y}) \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(\vec{y}) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(\vec{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - 3 & y_1 - 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Die Linearisierung lautet also:

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\vec{y} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Die Eigenwerte lassen sich gleich ablesen: -2, -1. Es sind alle negativ, also ist das System in der Nähe von dieser stationären Lösung **stabil.**

Wir betrachten für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ das nichtlineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = F(x(t))$:

$$x_1'(t) = -x_2(t) e^{x_1(t)} + e \cdot x_2(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)),$$
$$x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t)^3 = F_2(x_1(t), x_2(t)).$$

Fixpunkte (stationäre Lösungen)

$$\boxed{F(x_\infty) = 0}$$

- $0 = -x_{\infty,2} \cdot e^{x_{\infty,1}} + e \cdot x_{\infty,2} = x_{\infty,2}\left(e^{x_{\infty,1}} - e\right)$
- $0 = x_{\infty,1} - x_{\infty,2}^3$

Fall I: $x_{\infty,2} = 0$, $x_{\infty,1} = 0$ $\quad \underline{x_\infty^{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Fall II: $x_{\infty,1} = 1$, $x_{\infty,2} = 1$ $\quad \underline{x_\infty^{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Jacobi-Matrix DF(x) berechnen $\Rightarrow DF(x) = \begin{pmatrix} -x_2 e^{x_1} & -e^{x_1} + e \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$

Sei $x_\infty = \begin{pmatrix} x_{\infty,1} \\ x_{\infty,2} \end{pmatrix}$ der Fixpunkt mit $x_{\infty,1} > 0$ und $x_{\infty,2} > 0$.

Sei weiter $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ eine Lösungskurve, welche für $t = 0$ in der Nähe von x_∞ startet. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve für wachsendes t.

Hinweis: Das bedeutet: Untersuchen Sie die *Stabilität* des Fixpunktes x_∞.

$$A = DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} -1 \cdot e^1 & -e^1 + e \\ 1 & -3 \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \hat{=} \text{Dreiecksmatrix}$$

EW: Sofort ablesen oder $(-e - \lambda)(-3 - \lambda) = 0$; $\underline{\lambda_1 = -e}$, $\underline{\lambda_2 = -3}$

$\Rightarrow$ da beide EW neg. sind (im Realteil) ist der Fixpunkt x_∞^{II} stabil!

Fourier-Reihen

· Jede periodische Funktion lässt sich als Summe von Sinus- & Cosinus-Terme schreiben. Wenn man also versch. Frequenzen von Sin bzw. Cos addiert, kann man jede beliebige Funktion darstellen.

Bemerkung:

Wenn Funktion T periodisch darf ich irgendein Intervall nehmen der Länge T, aber: Falls Fkt auf ein Intervall der Länge vorgegeben ist & ich setze sie T periodisch fort dann darf ich nicht einfach ein beliebiges anderes Intervall der gleichen Länge T nehmen & mit der Fkt operieren!!!

Fourier-Reihen-Bsp. 1

Die Funktion f, gegeben auf dem Intervall $[-1,1]$ durch

$$f(x)=e^{-|x|}=\begin{cases} e^{x}, & \text{für } -1\le x<0,\\ e^{-x}, & \text{für } 0\le x\le 1,\end{cases}$$

werde 2-periodisch nach $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

- Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ der Funktion f.

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{|-x|}\cdot e^{-\pi n i x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{(1-\pi n i)\cdot x}\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-(1+\pi n i)\cdot x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2(1-\pi n i)}\left[e^{(1-\pi n i)x}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2(1+\pi n i)}\left[e^{-(1+\pi n i)x}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{2(1-\pi n i)}\left(1-e^{-1+\pi n i}\right)-\frac{1}{2(1+\pi n i)}\left(e^{-1-\pi n i}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-\pi n i)}\left(1-e^{-1}(-1)^n\right)-\frac{1}{2(1+\pi n i)}\left(e^{-1}\cdot(-1)^n-1\right)$$

$$=\frac{\left(1-\frac{(-1)^n}{e}\right)\left(1+\pi n i+1-\pi n i\right)}{2(1+\pi^2 n^2)}=\underline{\underline{\frac{1-\frac{(-1)^n}{e}}{1+\pi^2 n^2}}}$$

- Ermitteln Sie zudem die reellen Fourier-Koeffizienten $(a_n)_{n\ge 0}$ und $(b_n)_{n\ge 1}$ der Funktion f.

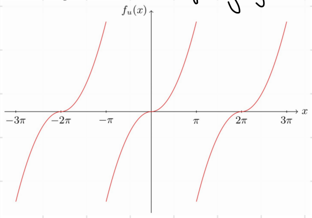
1 $a_n=c_n+c_{-n}\overset{\text{hier}}{=}2\cdot c_n$; da $f(x)$ reell: $c_n=c_{-n}$

$$\underline{a_n=\frac{2-\frac{2\cdot(-1)^n}{e}}{1+\pi^2 n^2}}$$

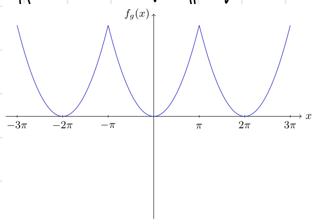
2 $\underline{b_n=i(c_n-c_{-n})=0}$

· $f(x)=x^2$ 2

ungerade Fortsetzung f_u



gerade Fortsetzung f_g



· reelle Fourier Koeffizienten von f_u

1 Da ungerade: $a_n=0$ für alle $n=0,1,2,3\ldots$

2 $b_n,\ n\ge 1$: $T=2\pi;\ T_0=-\pi$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{T}^{T_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_u(x)\sin(nx)\,dx$$

· $f_u(x)$ & $\sin(nx)$ sind ungerade, weshalb Kombo gerade ist & dieser move geht!

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x^2\cos(nx)\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\cos(nx)\,dx$$

$$=-\frac{2\pi}{n}\underbrace{\cos(nx)}_{=(-1)^n}+\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{n^2}\sin(nx)\,dx$$

$$=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi}=\underline{\underline{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4(-1)^n-4}{\pi n^3}}}$$

f_g hat Fourier-Reihe $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$ & wird so auf ganz $\mathbb{R}$ dargestellt $(f_g(x)=x^2)$

Finde Reihenwert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\Rightarrow f_g(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx);\quad x=\pi \text{ einsetzen}$$

$$f_g(\pi)=\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\underbrace{\cos(k\cdot\pi)}_{=(-1)^k}$$

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\quad\Big|-\frac{\pi^3}{3}$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\quad\xrightarrow{\div 4}\quad\underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}}$$

Orthonormalbasis Bsp. 2

1) Wir haben die Orthonormalbasis auf $[-1,1]$:

$$B=\left\{\frac{1}{2},\cos(2\pi x),\cos(4\pi x),\sin(2\pi x),\sin(4\pi x)\right\}$$

2) Wenn wir v in dieser Basis ausdrücken:

$$v=c_1\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\cos(2\pi x)+c_3\cdot\cos(4\pi x)+c_4\cdot\sin(2\pi x)+c_5\cdot\sin(4\pi x)$$

3) Sei nun v gegeben und wir wollen die Konstanten c_i finden:

$$v(x)=\sin^2(2\pi x),\qquad c_i=\langle v,e_i\rangle=\int_{-1}^{1}v(x)e_i(x)dx$$

$$c_1=\langle v,e_1\rangle=\int_{-1}^{1}\sin^2(2\pi x)\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

$$c_2=\langle v,e_2\rangle=\int_{-1}^{1}\sin^2(2\pi x)\cdot\cos(2\pi x)dx=0$$

$$c_3=\langle v,e_3\rangle=\int_{-1}^{1}\sin^2(2\pi x)\cdot\cos(4\pi x)dx=-\frac{1}{2}$$

$$c_4=\langle v,e_4\rangle=\int_{-1}^{1}\sin^2(2\pi x)\cdot\sin(2\pi x)dx=0$$

$$c_5=\langle v,e_5\rangle=\int_{-1}^{1}\sin^2(2\pi x)\cdot\sin(4\pi x)dx=0$$

$$v(x)=\sin^2(2\pi x)=1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\cos(2\pi x)+-\frac{1}{2}\cdot\cos(4\pi x)+0\cdot\sin(2\pi x)+0\cdot\sin(4\pi x)$$

$$v(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4\pi x)$$

Orthogonale Projektion

1) Berechnen wir die Projektion $z=P(v)$. Die Basis von U sei auf $[-1,1]$:

$$U=\left\{\frac{1}{2},\cos(2\pi x),\cos(4\pi x),\sin(2\pi x),\sin(4\pi x)\right\}$$

2) Wenn wir z (die Projektion) in dieser Basis ausdrücken:

$$P(v)=z=c_1\cdot\frac{1}{2}+c_2\cdot\cos(2\pi x)+c_3\cdot\cos(4\pi x)+c_4\cdot\sin(2\pi x)+c_5\cdot\sin(4\pi x)$$

3) Sei nun v gegeben und wir wollen die Konstanten c_i und damit die Projektion finden:

$$v(x)=x^2,\qquad c_i=\langle v,e_i\rangle=\int_{-1}^{1}v(x)e_i(x)dx$$

$$c_1=\langle v,e_1\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\langle v,e_2\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\cos(2\pi x)dx=\frac{1}{\pi^2}$$

$$c_3=\langle v,e_3\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\cos(4\pi x)dx=\frac{1}{4\pi^2}$$

$$c_4=\langle v,e_4\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\sin(2\pi x)dx=0$$

$$c_5=\langle v,e_5\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\sin(4\pi x)dx=0$$

$$P(v)=z=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\cos(2\pi x)+\frac{1}{4\pi^2}\cdot\cos(4\pi x)+0\cdot\sin(2\pi x)+0\cdot\sin(4\pi x)$$

$$P(v)=\frac{1}{6}+\frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2}+\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi^2}$$

Betrachten Sie nun den euklidischen Vektorraum $C^0([-1,1])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$$

und den endlichdimensionalen Untervektorraum

$$U = \langle\{C_1, C_2, k\}\rangle \subseteq C^0([-1,1]),$$

wobei $C_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n = 1,2$ und $k(x) = x^3$.

$\hat{=}$ Skalarprodukt $= 0$

i) Begründen Sie, warum k orthogonal zu C_1 und C_2 ist.

① jeweils Skalarprodukte $\langle k, C_1\rangle_{L_2}$ & $\langle k, C_2\rangle_{L_2}$ ausrechnen

② C_1 & C_2 (C_n's) sind gerade aber k ist ungerade, also ist $C_n \cdot k$ ungerade & $\langle C_n, k\rangle_{L_2} = \int_{-1}^{1} C_n(x)\cdot k(x)\,dx = 0$

ii) Die Vektoren C_1 und C_2 sind orthonormal. Zusammen mit einem Vektor $\tilde{k}$ bilden diese eine Orthonormalbasis von U. Bestimmen Sie $\tilde{k}$.

• $\tilde{k}$ ist normierte Form von k, da in Orthonormalbasis

$\Rightarrow$ k normieren: $\tilde{k}(x) = \frac{k(x)}{\|k(x)\|_{L_2}} = \frac{x^3}{\left(\int_{-1}^{1}(x^3)^2dx\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}\cdot x^3$

iii) Die orthogonale Projektion $P_U(f)$ der zu Beginn der Aufgabe definierten Funktion f ist ein Vektor in U und damit eine Linearkombination

$$P_U(f) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_{\tilde{k}}\tilde{k}.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten α_1, α_2 und $\alpha_{\tilde{k}}$. mit $f(x) = e^{-|x|}$

$U = \{C_1, C_2, \tilde{k}\} \hat{=}$ Orthonormalbasis von U

$\Rightarrow$ laut: $z = P(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i e_i$ & $c_i = \langle x, e_i\rangle$; $c_i = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{\tilde{k}}\}$

$$\boxed{P_U(f) = \langle f, C_1\rangle_{L_2} C_1 + \langle f, C_2\rangle_{L_2} C_2 + \langle f, \tilde{k}\rangle_{L_2}\tilde{k}}$$

• $\alpha_{\tilde{k}} = \langle f, \tilde{k}\rangle_{L_2} = 0$, da f & k ungerade!

• $\alpha_n = \langle f, C_n\rangle_{L_2} = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = a_n$

$\Rightarrow$ von vorheriger Aufgabe: $a_n = \frac{2 - \frac{2\cdot(-1)^n}{e}}{1+\pi^2 n^2}$

$$P_U(f)(x) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = \frac{2+\frac{2}{e}}{1+\pi^2}\cdot\cos(\pi x) + \frac{2-\frac{2}{e}}{1+4\pi^2}\cdot\cos(2\pi x)$$

Betrachten Sie $V = C^0([-\pi,\pi])$, den Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$. Auf V haben wir das Skalarprodukt (SP) $\langle g,h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ und die bezüglich dieses orthonormalen Funktionen $c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \ldots,$ mit

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \quad s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx).$$

ungerade

Sei P_N die orthogonale Projektion von V auf den Unterraum $U = \langle\{c_0, c_1, s_1, \ldots, c_N, s_N\}\rangle$.

(i) Begründen Sie, warum für die Projektion der **geraden** Fortsetzung f_g aus Teil (b) folgendes gilt:

$$P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N}\langle c_n, f_g\rangle c_n.$$

(ii) Für die **gerade** Fortsetzung f_g aus Teil (b) gibt es reelle Zahlen A, B mit

$f(x) = x^2$

$$\|P_N(f_g)\|^2 = A + \sum_{n=1}^{N}\frac{B}{n^4}.$$

Bestimmen Sie diese Zahlen A und B.

i) $U = \{C_n, S_n\}$; $z = P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N} c_i e_i$

mit $e_i = \{C_n, S_n\}$ & $c_i = \langle x_i, e_i\rangle$

$\Rightarrow P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N}\langle f_g, C_n\rangle C_n + \sum_{n=0}^{N}\langle f_g, S_n\rangle S_n$

$\rightarrow \langle f_g, S_n\rangle = 0$, da f_g gerade & so ist $f_g(x)\cdot S_n(x)$ ungerade & Integral von SP ist 0!

$\Rightarrow P_N(f_g) = \sum_{n=0}^{N}\langle f_g, C_n\rangle C_n$ QED

ii) induzierte Norm:

• $\|P_N(f_g)\|^2 = \langle P_N(f_g), P_N(f_g)\rangle = \sum_{n=0}^{N}\langle c_n, f\rangle^2$

$\langle c_0, f_g\rangle^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot x^2dx\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx\right)^2 = \frac{\pi}{2}a_0^2$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9} = \frac{2\pi^5}{9}$

$\langle c_n, f_g\rangle^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)x^2dx\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)x^2dx\right)^2$

$= \pi\cdot a_n^2 = \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$

$\Rightarrow \|P_N(f_g)\|^2 = \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\pi\frac{16}{n^4} = A + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B}{n^4}$

$A = \frac{2\pi^5}{9}$; $B = 16\pi$

$\rightarrow$ Man könnte es jeweils auch ausrechnen.

Fourier-Reihe

$$4y''(x) + y(x) = |x| \quad \text{für } x\in[-\pi,\pi]$$

a) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (ODE) mit Hilfe des Ansatzes

$$y_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(nx),$$

indem Sie die Funktion $|x|$ auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ in eine 2π-periodische Fourier-Reihe entwickeln.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung von (ODE), für welche $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ gilt.

a) First write the Fourier series for the function $|x|$ (as in Vorlesung 7):

- Note that $|x|$ is even, so all b'_n are zero.
- For $n = 0$,

$$a'_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \pi.$$

- For $n \neq 0$ we use integration by parts:

$$a'_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\Big)$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi)-1) = \begin{cases}0 & \text{if } n > 0 \text{ even}\\ \frac{-4}{n^2\pi} & \text{if } n \text{ odd}\end{cases}$$

Then write both sides of (ODE) as Fourrier series:

$$4\sum_{n=1}^{\infty}-n^2A_n\cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(nx) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a'_n\cos(nx).$$

Identify the Fourier coefficients of both sides by paying special attention to the $n = 0$ term:

$$A_n = a'_n/(1-4n^2) \text{ for } n \neq 0$$
$$A_0 = a'_0/2 = \pi/2.$$

b)

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A\sin\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}\cos((2n+1)x).$$

Note that $\cos((2n+1)\frac{\pi}{2}) = 0$ for all n. Therefore condition $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ implies that

$\sin(\pm\pi/4) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(\pm\pi/4) = +\frac{\sqrt{2}}{2} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$-\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Solve the linear system and get $A = 0$ and $B = -\pi/\sqrt{2}$.

To conclude, $y(x) = -\pi/\sqrt{2}\cos(x/2) + y_P(x)$.

PDE's

① $u(x,t)=\sin(cx)g(t)$ mit RB: $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ & $u_t=u_{xx}$

$\sin(c\cdot 0)=0$ --> automatisch erfüllt

$\sin(c\cdot\pi)=0$ --> $c=n\in\mathbb{N}$

① => $\sin(nx)$ mit $n\in\mathbb{N}$

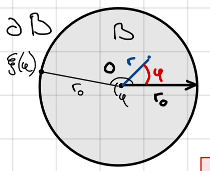
--> $\sin(cx)g'(t)=-c^2\sin(cx)g(t)$

② => $g'(t)=-c_n^2g(t)$ => $g(t)=K\cdot e^{-n^2t}$

=> $u(x,t)=K\sin(nx)\cdot e^{-n^2t}$; $K\in\mathbb{R}$ & $n\in\mathbb{N}$

② Wärmeleitung/Laplace Gleichung mit Polarkoordinaten!

$\Delta u=0$ => Lösungen heißen harmonische Fkt.



$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0 \quad \text{in } B$$

$$u(r_0,\varphi)=\xi(\varphi) \text{ auf } \partial B$$

$$\boxed{u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(t)\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(t-\varphi)+r_0^2}dt}$$

In Polarkoordinaten --> alles in r & θ ausdrücken.

--> $x=r\cdot\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$ | $u(r,\theta)=u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

PDE: $\boxed{\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=0}$

--> Lösung: $\boxed{u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi))}$

Bsp: $B(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<16\}$

$\partial B(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=16\}$

(PDE) $\Delta u(x,y)=0$ $\quad (x,y)\in B(0)$

(RB) $u(x,y)=10-4xy+x^2$ $\quad (x,y)\in\partial B(0)$

=> umschreiben in Polarkoordinaten

(PDE) $\Delta u=u_{rr}(r,\varphi)+1/r\,u_r(r,\varphi)+1/r^2\,u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=0$

$r\in(0,4)$ --> radius $\quad \varphi\in(0,2\pi)$

(RB): $u(4,\varphi)=10-4\cdot(4\cdot4\cdot\cos(\varphi)\sin(\varphi)+4^2\cos^2(\varphi))$

(noch Superposition: $u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi))$)

$$u(4,\varphi)=10-64\underbrace{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\frac12\sin(2\varphi)}+16\underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\frac12(\cos(2\varphi)+1)}$$

Koeffizienten-vergleich

$$=18-32\sin(2\varphi)+8\cos(2\varphi)$$

=> $A_0=18$; A_n: $4^2A_2=8$, $A_2=1/2$; B_n: $4^2B_2=-32$, $B_2=-2$

=> $u(r,\varphi)=18+\frac12r^2\cos(2\varphi)-2r^2\sin(2\varphi)$

In kartesischen Koordinaten: $x=r\cos(\varphi)$; $y=r\sin(\varphi)$

(mit Additionstheoreme) => $u(x,y)=18+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-4xy$

③

① Es gilt $u(x,y)$, das PDE & RB1-RB4 erfüllt

$\tilde u(x,y)$, " PDE & RB1-RB3 "

$v(x,y)=u(x,y)-\tilde u(x,y)$

②

(PDE')	$v_{xx}+4v_y+4v_{yy}=0,$	für $(x,y)\in\,]0,4[\,\times\,]0,1[$
$(\text{RB}')_1$	$v(0,y)=0$	
$(\text{RB}')_2$	$v(4,y)=0$	
$(\text{RB}')_3$	$v(x,0)=0$	
$(\text{RB}')_4$	$v(x,1)=\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{x}{4}.$	

$v(x,y)$ lösen:

① Separationsansatz $v(x,y)=X(x)Y(y)$

=> $(\text{DGL})_x$ $\quad X''(x)+\omega^2X(x)=0$

$(\text{DGL})_y$ $\quad -4Y''(y)-4Y'(y)+\omega^2Y(y)=0.$

② Lösen der DGL's mit RB's

1. --> $X(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$, $A,B\in\mathbb{R}$.

$X(0)=0$ => $A=0$ | $X(4)=0$ => $\omega_n=\frac14 n\pi$, $n\geq1$

=> $X_n(x)=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$, $B_n\in\mathbb{R}$.

2. $(-4\lambda^2-4\lambda+\omega_n^2)\cancel{e^{\lambda y}}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=-\frac12\pm\sqrt{\frac14+\frac{\omega_n^2}{4}},$

--> $Y_n(y)=C_ne^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}+D_ne^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}.$

$Y(0)=0$ => $C_n=-D_n$

=> $Y_n(y)=C_n\left(e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}\right).$

③ Superposition --> Lösung für $v(x,y)$

Hinweis: Folgende Integrale können nützlich sein: $(a>0)$

$$\int x^2\sin(ax)dx=\frac{(2-a^2x^2)\cos(ax)+2ax\sin(ax)}{a^3}+c, c\in\mathbb{R},$$

$$\int x\sin(ax)dx=\frac{\sin(ax)-ax\cos(ax)}{a^2}+c, c\in\mathbb{R}.$$

Wir machen den Superpositionsansatz

$$* \quad v(x,y)=\sum_{n\geq1}F_n\left(e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)y}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

Dieser erfüllt automatisch (PDE') und $(\text{RB}')_1$ - $(\text{RB}')_3$. Wir fordern:

$$(\text{AB}): \sum_{n\geq1}\underbrace{F_n\left(e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+n^2\pi^2/16}\right)}\right)}_{=:b_n}\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)=v(x,1)\overset{!}{=}\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{x}{4}.$$

--> $F_n=\frac{b_n}{(e^{\cdots}-e^{\cdots})}$

Auf der linken Seite erkennen wir in den b_n die Fourier-Koeffizienten einer *ungeraden* und *8-periodischen* Funktion, die auf $[0,4]$ die Form $x\mapsto\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{x}{4}$ hat. Also rechnen wir:

$$b_n=\frac48\int_0^4\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \text{ [1 Punkt]} \qquad \text{Subst.: } z=\frac{x}{4}$$

$$=2\int_0^1(z^2-z)\sin(n\pi z)dz \quad \text{Hinweise}$$

$$=2\left[\frac{(2-n^2\pi^2z^2)\cos(n\pi z)+2n\pi z\sin(n\pi z)}{n^3\pi^3}\right]_0^1-2\left[\frac{\sin(n\pi z)-n\pi z\cos(n\pi z)}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$=\frac{4(-1)^n}{n^3\pi^3}-\frac{2(-1)^n}{n\pi}-\frac{4}{n^3\pi^3}+\frac{2(-1)^n}{n\pi}=\frac{4((-1)^n-1)}{n^3\pi^3}=\begin{cases}0, & n\text{ gerade},\\ -\frac{8}{n^3\pi^3}, & n\text{ ungerade}.\end{cases}$$

=> F_n ausrechnen & dann in * einsetzen!

$$v(x,y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\frac{e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}}{e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}x\right).$$

④ $u(x,y)=v(x,y)+\tilde u(x,y)$ --> n überall mit 2k+1 ersetzen!

$$u(x,y)=\frac14xy-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\frac{e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)y}}{e^{-\frac12\left(1-\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}-e^{-\frac12\left(1+\sqrt{1+(2k+1)^2\pi^2/16}\right)}}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}x\right).$$

④

① Es gilt $u(x,y)$, das PDE & RB1, RB2 & AB erfüllt

$\tilde u(x,y)=1-x+a\cos(\pi x)e^{-t}$ erfüllt PDE, RB1 & RB2

$v(x,y)=u(x,y)-\tilde u(x,y)$

②

(PDE)	$v_t=\frac{1}{\pi^2}v_{xx},$	für $(x,t)\in\,]0,1[\,\times\mathbb{R}_+$
$(\text{RB}')_1$	$v(0,t)=0,$	für $t>0$
$(\text{RB}')_2$	$v(1,t)=0,$	für $t>0$
(AB')	$v(x,0)=2x-1-a\cos(\pi x),$	für $x\in\,]0,1[$

① Separationsansatz $v(x,y)=X(x)Y(y)$

$(\text{DGL})_x$ $\quad X''(x)+\omega^2X(x)=0$

$(\text{DGL})_t$ $\quad T'(t)+\frac{\omega^2}{\pi^2}T(t)=0.$

② Lösen der DGL's mit RB's

1. $\rightarrow X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x),\ A, B \in \mathbb{R}.$

$X(0)=0 \Rightarrow A=0 \mid X(1)=0 \Rightarrow \omega_n = n\pi,\ n \geq 1$

$\Rightarrow X_n(x) = B_n \sin(n\pi x),\ B_n \in \mathbb{R}.$

2. $\Rightarrow T_n(t) = C_n e^{-\frac{\omega^2}{\pi^2}t} = C_n e^{-n^2 t},\ C_n \in \mathbb{R}.$

③ Superposition $\rightarrow$ Lösung für $v(x,y)$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt:

$$\cos(\pi x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin(2k\pi x) \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

Fourier-Koeffizient

Wir setzen $F_n := B_n C_n$ und machen den Superpositionsansatz

$$✱ \quad v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 t}.$$

Dieser erfüllt automatisch (PDE), $(\text{RB}')_1$ und $(\text{RB}')_2$. Wir fordern nun:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi x) = v(0,x) \stackrel{!}{=} 2x - 1 + \cos(\pi x).$$

Auf der linken Seite sehen wir, dass die F_n die Fourier-Koeffizienten einer *ungeraden*, 2-periodischen Funktion sind, die auf $[0,1]$ die Form $x \mapsto 2x - 1 + \cos(\pi x) =: h(x) + \cos(\pi x)$ hat.

Aus dem Hinweis kennen wir die Fourier-Koeffizienten der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von $x \mapsto \cos(\pi x)$. Wir berechnen noch diejenigen der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von h:

$$2 \cdot \frac{2}{2}$$

$$\begin{aligned}
b_n^{(h)} &= \frac{4}{2}\int_0^1 (2x-1)\sin(n\pi x)dx \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= 4\left[-\frac{1}{n\pi}x\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx + \frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1 \\
&= -\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n\pi}\cos(0) + \frac{4}{n^2\pi^2}\underbrace{\left[\sin(n\pi x)\right]_0^1}_{=0} \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}-1}{n\pi} = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hierzu addieren wir die Fourier-Koeffizienten aus dem Hinweis und erhalten:

$$F_{2l} = \frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}, \quad \text{für } l \in \mathbb{N},$$

$\hookrightarrow n = 2l: \ \frac{4}{2l\pi} = \frac{2}{l\pi}$

$F_{2l+1} = 0$ für $l \in \mathbb{N}$.

F_{2l} für F_n in ✱ einsetzen!

$$v(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}\right)\sin(2l\pi x)e^{-4l^2 t}.$$

$\rightarrow$ alle $n = 2l$

④ $u(x,y) = v(x,y) + \tilde{u}(x,y)$

$$u(x,t) = 1 - x - \cos(\pi x)e^{-t} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi}\frac{l}{4l^2-1} - \frac{2}{l\pi}\right)\sin(2l\pi x)e^{-4l^2 t}.$$

Rang & Lösbarkeit eines LGS mit Bsp

Lösbarkeit eines LGS

homogen $\vec{c} = 0$; inhomogen $\vec{c} \neq 0$

(m×n)-LGS

hier trifft $\rightarrow Rg(A) = Rg(A|c)$ immer zu!

- **homogenes (m,n)-System**
  - $r = Rg(A) = n$ = # Unbekannte $\rightarrow$ eine triviale Lösung $x = 0$
  - $r = Rg(A) < n$ $\rightarrow$ ∞ viele Lsg. mit $(n-r)$-# Parametern
- **inhomogenes (m,n)-System**
  - $Rg(A) = Rg(A|c) = r$
    - $r = n$ $\rightarrow$ genau 1 Lsg.
    - $r < n$ $\rightarrow$ ∞ viele Lsgn. mit $n-r$ fr. Parameter
  - $Rg(A) \neq Rg(A|c)$ $\rightarrow$ Keine Lösung

(n×n)-LGS

- **inhomogenes (n,n)-System**
  - $\det(A) \neq 0$, $r = n$ $\rightarrow$ genau 1 Lsg. $\rightarrow$ eindeutige Lsg. für $c \in \mathbb{R}^n$ mit $x = A^{-1} \cdot c$!
  - $\det(A) = 0$
    - $Rg(A) = Rg(A|c) = r < n$ $\rightarrow$ ∞ viele Lsg. mit $(n-r)$-# Parametern
    - $Rg(A) \neq Rg(A|c)$ $\rightarrow$ Keine Lsg.
- **homogenes (n,n)-System**
  - $\det(A) \neq 0$ $\rightarrow$ eine triviale Lsg. $x = 0$
  - $\det(A) = 0$ $\rightarrow$ ∞ viele Lsgn. (inkl. triviale Lösung)

$\hookrightarrow$ da wenn $Rg(A) = n$ & $\det \neq 0 \longleftrightarrow$ A invertierbar

$\Rightarrow A \cdot x = c$ genau 1 Lsg mit $x = A^{-1} \cdot c$

Rang einer Matrix

$Rg(A) = r$

Def:
- # Zeilen, welche nicht 0 sind nach Gaussverfahren!
- # linear unabhängiger Vektoren

- Rang bleibt bei Gauss-Verfahren unverändert!

Vorgehen:

① el. ZU $\rightarrow$ ZSF

② Rang = # nicht nulle Zeilen = $Rg(A) = r$

$\Rightarrow$ wenn $\det(A_{n\times n}) \neq 0$, dann $Rg(A_{n\times n}) = n$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad Rg(A) = 3$; $\det(A) = 0$

$\hookrightarrow$ 1 freier Parameter

Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Rang gibt max. # linear unabh. Spaltenvektoren an.

- **(m×n)-Matrix:**
  - $\rightarrow Rg(A) = r = n$ $\Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit
  - $\rightarrow Rg(A) = r < n$ $\Rightarrow$ lineare Abhängigkeit
- **(n×n)-Matrix**
  - $\rightarrow \det(A) \neq 0$ $\Rightarrow$ lineare Unabhängigkeit
  - $\rightarrow \det(A) = 0$ $\Rightarrow$ lineare Abhängigkeit

$\Rightarrow$ zB.: 3 Vektoren sind linear abhängig falls die Determinante der Matrix aus den 3 Vekt. $= 0$ ist.

$$\det(A) \neq 0 \longleftrightarrow Rg(A) = n$$
$$\det(A) = 0 \longleftrightarrow Rg(A) < n$$

Bsp: Matrix $A \in M_{3\times 3}$ gegeben & Die Frage:

- In welchen Fällen existiert ein nichttrivialer stationärer Zustand, des Systems $y'(t) = A \cdot y(t)$; also eine von Null versch. Lösungsfunktion $\{t \rightarrow y_\infty(t)\}$, die nicht von t abhängt.

$\rightarrow$ gibt es genau dann, wenn das homogene LGS eine nichttriviale Lösung hat $\longrightarrow$ $\det(A) = 0$

- Werte einsetzen & $\det(A)$'s ausrechnen
- oder nachprüfen ob A singulär ist $\Rightarrow$ wenn Zeilensumme $= 0$

$\hookrightarrow$ wenn Spalten/Zeilen nicht linear unabhängig!

Bsp: gegeben: $y'(t) = A \cdot y(t) + g(t)$

$\rightarrow$ Wann beliebig viele stationäre Lösungen?

$$0 = y'(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

$Ax + C = 0$ mit $A \in M_{n\times n}$

$\rightarrow$ inhomogenes LGS (n×n)

$\rightarrow$ beliebig viele stat. Lösungen, falls unendlich viele Lösungen!

$\longrightarrow$ $\det(A) = 0$ (schon gegeben) & $Rg(A) = Rg(A|c)$ mit $r < n$!

$\Rightarrow$ mit 2·Mal Gauss: $0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ P+Q \\ P+Q+R \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Rg(A) = Rg(A|c)$ nur gegeben falls $P + Q + R = 0$!

LGS: $A \cdot x = c \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ $\quad m \,\hat{=}\,$ # Gleichungen, $n \,\hat{=}\,$ # Unbekannte

- Falls $m < n$, weil $r < n$ $\Rightarrow$ unterbestimmt $\Rightarrow$ Parameter

$A \cdot x = 0$: Homogenes System $\rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

$A \cdot x = c$: Inhomogenes System $\rightarrow c \neq 0$

Diverses zu linearer Algebra

Matrize $(m \times n)$ — m: # Zeilen, n: # Spalten

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

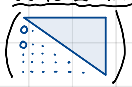
a_{ik}: Matrizelement der i-ten Zeile & k-ten Spalte

Dreiecksmatrize ($n \times n$-Matrize)

- Alle Elemente oberhalb (untere Δ-Matrize) od. unterhalb (obere Δ-Matrize) der Hauptdiagonale sind $=0$!

=> falls Hauptdiagonale $=0$, dann strikte lekte Δ-Matrize

obere Δ-Matrize:



Transponierte Matrize (A^T)

- $A=(m \times n) \rightarrow A^T=(n \times m)$; Zeilen & Spalten vertauscht
- Symmetrische Matrize: $A=A^T$
- orthogonale Matrize: $A^{-1}=A^T$

} müssen dafür quadratisch sein

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Hermetische Matrize

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ mit $A=\bar{A}^T$

- Matrize ist symmetrisch bzgl. Hauptdiagonale, wobei aber für alle Elemente gilt: $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$ (komplex konjugiert)
- Hauptdiagonale nur reelle Zahlen

=> Wenn alle Einträge reell: symmetrisch

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -3i \\ 2-i & 2 & 5 \\ 3i & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Bemerkungen: (zu hermetisch/symm. Matrize)

- Alle Einträge auf Diagonalen sind reell
- Determinante ist reell
- alle n EW sind reell
- Es gibt genau n lin. unabh. EV
- zu k-fachen EW gehören k lin. unabhängige EV

Rechenregeln Matrizen

Addition/Subtraktion/Multiplikation mit Skalar

- gleich stellige Elemente von zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert/subtrahiert

Skalar mit jedem Element multipliziert.

Rechenregeln Matrizen

- $A+B=B+A$
- $A+(B+C)=(A+B)=C$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $(\lambda \cdot \mu)A=\lambda(\mu \cdot A)$
- $A \cdot B \cdot C \neq B \cdot A \cdot C$ (Reihenfolge)
- $A(BC)=(AB)C$
- $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
- $A(B+C)=AB+AC$

- $AB^T=B^T \cdot A^T$
- $A^p \cdot A^q=A^{p+q}$
- $A \cdot E_n=E_n \cdot A=A$
- $A^0=E_n$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(C \cdot A)^T=C \cdot A^T$
- $(A^T)^T=A$
- $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

- falls B: λ_1 & λ_2, $\tilde{B}$: $\frac{\lambda_1}{4}$ & $\frac{\lambda_2}{4}$:

$\tilde{B}=\frac{1}{4}B$ muss nicht gelten, da $\tilde{B}=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{4} \end{pmatrix}$ auch möglich!

- $\tilde{B}$ invertierbar

Rechenregeln für Determinanten

- $\det(A)=0$, wenn: -> Zeile/Spalte als linear Komb. anderer darstellbar ist (-> lineare Abhängigkeit)
  - alle Elemente einer Zeile/Spalte $=0$
  - zwei Zeilen od. Spalten sind gleich oder durch Faktor versch.
- det ändert Vorzeichen falls z.B. bei Gauss Zeilen/Spalten vertauscht
- Multipliziert man Zeile mit Zahl λ, so ändert sich Determinante um λ-fache
  -> $\lambda \cdot$ Spalte/Zeile => $\lambda \cdot \det(A)$
- $\det(\lambda \cdot A)=\lambda^n \cdot \det(A)$ mit n: # Zeilen/Spalten
- $\det(A \cdot B)=\det(B \cdot A)=\det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^n)=\det(A)^n$
- $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A)=\det(A^T)$
- $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$
- $\det(E_n)=1$
- B mit EW λ_1; $\tilde{B}$ mit EW $\frac{\lambda_1}{4}$ dann $\frac{\det B}{16}=\det \tilde{B}$

Berechnung der Eigenwerte ($n \times n$)-Matrize

- charakteristisches Polynom: $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda E_n)$

EW sind die NS davon <=> $\boxed{\det(A-\lambda E_n)=0}$

Bsp.: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)-2 \cdot 0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)=0 \rightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$$

Bem: Bei Dreiecksmatrizen sind die Elemente der Hauptdiagonale die Eigenwerte!

Berechnung der EV: ($n \times n$)-Matrize

Eigenvektor v_i zum Eigenwert λ_i ist der Lösungsvektor dieses homogenen linearen Systems:

$$\boxed{(A-\lambda_i E_n)v_i=0} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

-> könnte auch alles hier einsetzen

Bsp.: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=3$

- EV$_1$: $A \cdot v_1=\lambda_1 v_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \cdot v_1+0 \cdot v_2 \\ 2 \cdot v_1+3 \cdot v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I. } v_1=v_1 \\ \text{II. } 2v_1+3v_2=v_2 \rightarrow v_2=-v_1 \end{cases}$

mit $t \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{matrix} v_1=t \\ v_2=-t \end{matrix}\right\}$ EV$_1$: $v_1=\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- EV$_2$: $A \cdot v_2=\lambda_2 \cdot v_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \left.\begin{cases} \text{I. } 1 \cdot v_1+0 \cdot v_2=3v_1 \\ \text{II. } 2 \cdot v_1+3 \cdot v_2=3v_2 \end{cases}\right\}$ $\rightarrow v_1=0$, $\rightarrow v_2$ beliebig (wird weggekürzt)

mit $s \in \mathbb{R} \rightarrow v_2=s, v_1=0 \Rightarrow v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (A-\lambda E_n)v=0 \quad \left(\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Eigenschaften von EW

- λ ein EW von A zum EV $\vec{v}$ => $1/\lambda$ ein EW von A^{-1} zum EV $\vec{v}$
- Falls alle n EW versch. sind => existieren n untersch. EV, welche linear unabhängig sind.
- Falls ein EW k-fach auftritt => mind. ein, höchstens k linear abhängige EV
- Falls $\lambda_k=x+iy$ ein komplexer EV ist, so ist $\bar{\lambda}_k=x-iy$ ebenfalls ein EW
- Für eine hermetische oder symmetrische n-reihige Matrize sind alle n EW reell & es gibt genau n linear unabh. EV
- Falls v ein EV von A zum EW λ => $\alpha \cdot v$ ein EV von A zum EW λ

Inverse Matrize

- Für eine reguläre ($\det(A) \neq 0$) Matrize $A(n \times n)$ existiert genau eine inverse Matrize A^{-1}, sodass gilt:

$A \cdot A^{-1}=E$ Entw.-modell: $V_n=A^{-1} \cdot V_{n+1}$

Rechenregeln für Inverse

- $(A \cdot B)^{-1}=B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $E_n^{-1}=E_n$
- $(A^{-1})^{-1}=A$

$(k \cdot A)^{-1}=k^{-1} \cdot A^{-1}$; k = Skalar $\in \mathbb{R}$

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

Berechnung von A^{-1} mit Unterdeterminante

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot D_{11} & (-1)^{2+1} \cdot D_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} \cdot D_{n1} \\ (-1)^{1+2} \cdot D_{12} & (-1)^{2+2} \cdot D_{22} & & (-1)^{n+2} \cdot D_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{1+n} \cdot D_{1n} & (-1)^{2+n} \cdot D_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} \cdot D_{nn} \end{pmatrix}$$

-> mit $(n-1)$ reihigen Unterdeterminanten

Berechnung von A^{-1} mit Gauss

Aus n-reihigen regulären Matrizen A & E wird $(A|E)$ gebildet:

$$(A|E)=\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right)$$

Gauss-Verfahren (-> Umformungen) bis $(E|A^{-1})$ entsteht!

Formel für A^{-1} wenn $A(2 \times 2)$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Formel für A^{-1} wenn $A(3 \times 3)$

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ec \\ fg-di & ai-gc & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

Differentialgleichungen

Grundlagen:

○ Konstante C beim integrieren nicht vergessen

- Ordnung: höchst auftretende Ableitung
- stationäre Lösung: $y'(x)=0$; keine Lösung $\Rightarrow \neq 0$!
- linear: gesuchte Funktion darf nicht als Potenz vorliegen. -> ist in linearer Form

Lösen einer DGL, durch:

- einfache Integration
- Trennung der Variablen/Separationsmethoden => DGL 1. Ordnung (homogene Lösung von)
- Variation der Konstanten => inhomogene lineare DGL 1. Ordnung
- Charakteristisches Polynom & Partikulärer Ansatz => lineare DGL 2. Ordnung

lineare DGL 1. Ordnung

allgemeine Form: $y'(x) = p(x)\cdot y(x) + q(x)$

$q(x)=0$: homogene lineare DGL 1. Ordnung

$q(x)\neq 0$: inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

Allg. Lösung für homogene lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x)=p(x)\cdot y(x) \Rightarrow \boxed{y(x)=K\cdot e^{P(x)}}$ mit $P(x)=\int p(x)\,dx$

(entstanden durch Trennung der Variablen/Separationsmethode)

Allg. Lösung für inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

$y'(x)=p(x)\cdot y(x)+q(x) \Rightarrow \boxed{y(x)=(K_0(x)+C)e^{P(x)} \text{ mit } K_0(x)=\int q(x)e^{-P(x)}\,dx}$

$y(x)=y_{homogen}+y_{partikuläre\ Lösung}$

(entstanden durch Variation der Konstanten)

Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'(x)=a\cdot y(x)+b \Rightarrow \boxed{y(x)=K\cdot e^{ax}-\frac{b}{a}}$

wobei stationäre Lösung: $y(x)=-\frac{b}{a}$

Separierbare DGL - DGL (linear & nicht-linear)

$y'(x)=h(x)\cdot g(y(x)) \Rightarrow \boxed{y(x)=G^{-1}(H(x)+c) \quad G(y(x))=H(x)+C}$

wobei $G(y)$ Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$

Bei AWP: setze in vollständige Lösung y_0 & x_0 ein & löse nach c auf.

=> Schreibe Lösung für AWP vollständig!

lineare DGL 2. Ordnung

$y''(x)+ay'(x)+by(x)=g(x) \qquad a,b\in\mathbb{R}$

- $g(x)=0$: homogen
- $g(x)\neq 0$: inhomogen

Lösung einer homogen lin. DGL 2. Ordnung

$1y''+ay'+by=0$

↳ 1. Koeffizient muss $=1$ sein!

① charakteristisches Polynom: $\lambda^2+a\lambda+b=0$

-> löse nach λ_1,λ_2 auf

1) $(a^2-4b>0) \Rightarrow \lambda_1\neq\lambda_2;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$\boxed{y(x)=C_1\cdot e^{\lambda_1\cdot x}+C_2\cdot e^{\lambda_2\cdot x}}$ $\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$

2) $(a^2-4b=0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\qquad \lambda_1=\lambda_2=\alpha$

$\boxed{y(x)=C_1e^{\alpha\cdot x}+x\cdot C_2e^{\alpha\cdot x}=e^{\alpha\cdot x}(C_1+x\cdot C_2)}$

3) $(a^2-4b<0) \Rightarrow \lambda_1=\overline{\lambda_2};\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ $\qquad \lambda_1=\alpha+\beta i,\ \lambda_2=\alpha-\beta i$

$\boxed{y(x)=e^{\alpha\cdot x}(C_1\cdot\cos(\beta x)+C_2\cdot\sin(\beta x))}$

② Anfangsbedingungen einsetzen und so C_1 & C_2 finden.

$y(x_0)=y_H(x_0)$

$y'(x_0)=y_H'(x_0)$

=> 2 Gleichungen für 2 Unbekannte

③ Endresultat hin schreiben!

Bsp: $y''+3y'+2y=0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

① charakteristisches Polynom:

$\lambda^2+3\lambda+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=-2 \quad \lambda_2=-1$

$y_H(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$

② $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$

$y(0)=0=C_1e^{-2\cdot 0}+C_2e^{-0} \Rightarrow C_1=-C_2$

$y'(x)=-2C_1e^{-2x}-C_2e^{-x}$

$y'(0)=1=-2C_1e^{-2\cdot 0}-C_2e^{-0} \Rightarrow -2C_1-C_2=1$

$2C_2-C_2=1 \Rightarrow C_2=1$

$C_1=-1$

$\Rightarrow y(x)=-e^{-2x}+e^{-x}=e^{-x}-e^{-2x}$

Lösung einer inhomogenen lin. DGL 2. Ordnung

$y_{allg}=y_{homogen}+y_{sp.}$

① $y_{homogen}$ - lösen wie zuvor beschrieben

② y_{sp} - lösen mit folgenden Ansätzen:

$g(x)$	Ansatz $y_p(x)$
e^{cx}	C_3e^{cx}
ax^2+bx+c	$C_{30}x^2+C_{31}x+C_{32}$
$\sin(cx)$ od. $\cos(cx)$	$C_3\sin(cx)+C_4\cos(cx)$

=> Falls Ansatz für $y_p(x)$ schon in homogener Lösung vorkommt: multipliziere Ansatz in $y_p(x)$ mit x!

③ Ansatz in DGL einsetzen & Konstante C_3, C_4 etc. finden:

$y_p''(x)+ay_p'(x)+by_p(x)=g(x)$

④ Resultat: $y(x)=y_H(x)+y_p(x)$

⑤ Mit Anfangsbedingungen C_1 & C_2 finden:

$y(x_0)=y_H(x_0)+y_p(x_0)$

$y'(x_0)=y_H'(x_0)+y_p'(x_0)$

⑥ Endresultat aufschreiben

Systeme linearer DGL

· versch. DGL 1. Ordnung: $* \begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) \end{cases}$

$*$ schreiben als: $y'(t) = A \cdot y(t)$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Allgemein: Sei λ ein EW zum EV v von A, das heisst, es gilt $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Dann ist $y(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot v$ eine Lösung des DGL-Systems $y' = A \cdot y$

Lösung von $y' = A \cdot y$

nxn $A = (n \times n)$ Matrix; $y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$

—> Wir wollen lösen:
$$\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) \qquad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

① Berechne EW λ_i von A

② Berechne EV v_i von A

=> $y(x) = e^{\lambda_i x} \cdot v_i$ ist eine Lösung für $i = 1, 2, \dots, n$

③ Überprüfe ob alle EV linear unabhängig.

=> Falls alle EW verschieden sind, sind auch alle EV linear unabhängig.

④ Dann:
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \cdot v_n$$

⑤ Setze Anfangsbedingungen ein, um C's zu finden

2x2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$

Für ③ & ④ Betrachte EW λ_1, λ_2 von A mit zel. EV v_1, v_2

1) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$ & $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot v_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \cdot v_2$$

2) Falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R}$

· wenn v_1, v_2 linear unabh.:
$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot v_1 + C_2 e^{\alpha x} v_2$$

· wenn v_1, v_2 nicht linear unabh.

=> Verwende DGL 2. Ordnung od. Ansatz Substitution

3) Falls $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$ $\qquad \lambda_1 = \alpha + \beta i;\ v_1 \in \mathbb{C}^2$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i;\ v_2 \in \mathbb{C}^2$

$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$$y(x) = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} \cdot v_1 + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \cdot v_2 = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta i x} \cdot v_1 + C_2 e^{-\beta i x} \cdot v\right)$$

Für reelle Darstellung:
$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)) \\ e^{\alpha x}(L_1 \cos(\beta x) + L_2 \sin(\beta x)) \end{pmatrix}$$

Bsp: $\vec{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{y}(x)$; $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

①&② $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$; $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

③ —> Wir sehen sofort, dass linear unabhängig

④ $\vec{y}(x) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3x}$

⑤ $\vec{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{matrix}$

=> $y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^x + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3x}$

Ansatz Substitution – wenn EV linear abhängig

$y' = A \cdot y$: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

① Löse 1. Gleichung nach y_2 auf & leite ab y_2'

② Setze y_2 & y_2' in 2. Gleichung ein

↳ Wir erhalten charakt. Polynom: Für λ_1, λ_2 lösen

③ allg. homogene Lösung für y_1

↳ Mit Fällen von 2. Ordnung!

④ Mit y_1 & y_1' in 1. Gleichung & für allg. homogene Lösung von y_2 lösen

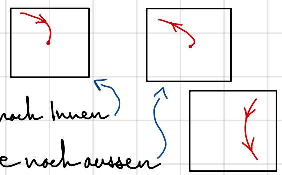
⑤ Mit Anfangsbedingungen C_1 & C_2 finden

⑥ Resultat: $y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

lineare DGL 2. Ordnung

Qualitatives Lösungsverhalten

Im Richtungsfeld/Vektorfeld:



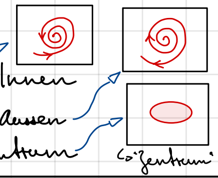
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

· $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ => stabil => Kurve nach Innen

· $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ => instabil => Kurve nach aussen

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ => Sattelpunkt => Kurve erreicht Zentrum nicht

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$



· $Re(\lambda) < 0$ => stabil => Spirale nach Innen

· $Re(\lambda) > 0$ => instabil => Spirale nach aussen

· $Re(\lambda) = 0$ => Zentrum => Ellipse um Zentrum

Lineare DGL 2. Ordnung —> (2x2)-System v. DGL

$$y''(x) + a y'(x) + b y(x) = 0$$
$$\begin{cases} y'(x) = y'(x) \\ y''(x) = -a y'(x) - b y(x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow y'(x) = A \cdot y(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

(2x2)-DGL-System —> lineare DGL 2. Ordnung

Bsp: $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$

I: $2y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) \Rightarrow y_2(x) = \dfrac{y_1'(x) - y_1(x)}{2}$

$\Rightarrow y_2'(x) = \dfrac{y_1''(x) - y_1'(x)}{2}$

II $\Rightarrow \underbrace{\dfrac{y_1''(x) - y_1'(x)}{2}}_{y_2'(t)} = 3y_1(x) + 2\underbrace{\left(\dfrac{y_1'(x) - y_1(x)}{2}\right)}_{y_2(t)}$

$y_1''(x) - y_1'(x) = 6y_1(x) + 2y_1'(x) - 2y_1(x)$

$y_1''(x) - 3y_1'(x) - 4y_1(x) = 0$ => charakt. Polynom

Bsp: $\begin{cases} y_1'(x) = a \cdot y_1(x) + b \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) = c \cdot y_1(x) + d \cdot y_2(x) \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y''(x) = (a+d) \cdot y'(x) - \det(A) \cdot y(x)$$

mit $\det(A) = ad - bc$

Bsp. zur Konvertierung

· 2. Komponente y_2 einer Lösung y des DGL-Systems erfüllt die DGL 2. Ordnung: $y_2''(x) - 8y'(x) = 0$

$y''(x) = (6+2)y'(x) - (6 \cdot 2 - (-3)(-4)) \cdot y(x) = 8y'(x) + 0$

$\Rightarrow y''(x) - 8y'(x) = 0$ ✓

oder: $\begin{matrix} y_1' = 6y_1 - 4y_2 \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 \end{matrix} \rightarrow y_1 = \dfrac{2y_2 - y_2'}{3}$ & $y_1' = \dfrac{2y_2' - y_2''}{3}$

$\dfrac{2y_2' - y_2''}{3} = 6\left(\dfrac{2y_2 - y_2'}{3}\right) - 4y_2$

$2y_2' - y_2'' = 12y_2 - 6y_2' - 12y_2 \Rightarrow y_2'' - 8y_2' = 0$

1. Grundlagen

Potenzgesetze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $a^m / a^n = a^{m-n}$ | $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$ | $a^n / b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ | $a^0 = 1, a \neq 0$

$a^x = e^{x\ln(a)}$ | $a^{-n} = 1/a^n$ | $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = (a\cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$ | $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Logarithmusgesetze:

$b = a^x \rightarrow x = \log_a(b)$; $b>0, a>0, a\neq 1$

$\log_a(a) = 1$ $\quad \log_a(1) = 0$ $\quad a^{\log_a(b)} = b$

- $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$
- $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

gelten wenn: $a>0, x>0, y>0$, $k\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^+$

- $\log_e x = \ln x$
- $\ln(0) = -\infty$
- $\ln(\infty) = \infty$
- $\ln(<0)$ nicht def.

Reihen:

Summe: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Partialsummen

arithmetische Reihe: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Summe natürlicher Zahlen: $S_n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n-1)}{2}$

Summe der geraden Zahlen: $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$

Summe der ungeraden Zahlen: $S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

n ist jeweils # gerader, ungerader Zahlen, zum addieren

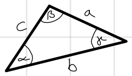
$\boxed{\text{geometrische Reihe: } S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}}$

unendliche geometrische Reihe: $S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$, für $a \in (-1,1)$

↳ bei $|a|>1$ gilt $S_n = \infty$

Additionstheoreme:

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$



Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp \sin(x)\cdot\sin(y)$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \pm \tan(x)\cdot\tan(y)}$

$\sin(2x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Trigonometrie:

$t_{rad} = t_{grad} \cdot \frac{\pi}{180°}$

Symmetrien:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad$ · $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ · $\cot(-x) = -\cot(x)$

Integralrechnung

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

Rechenregeln

- $\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx$; · $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int (f_1 \pm f_2 \pm \dots f_n)\,dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx \pm \dots \int f_n dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

Spezialfall: $a = -b \Rightarrow \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$

Integrationsmethoden

Partielle Integration

$$\boxed{\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx}$$

Substitution

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C}$$

Vorgehen:

① Wähle $g(x)$ & nenne sie $u(x)$

② Bestimme $g'(x) = u'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)}$

③ Ersetze $g(x) = u(x)$ durch u & dx durch $\frac{du}{u'(x)}$

④ $\int f(u)\,du$ berechnen

⑤ Ersetze u wieder durch $u(x) = g(x)$

⑥ Für bestimmte Integrale setze Grenzen ein

$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

$\Rightarrow$ Man kann auch nicht zurück subst. & grenzen als $\int_{u(a)}^{u(b)}$ verwenden!

Partialbruchzerlegung (PBZ)

Für rationale Fkt $\frac{P(x)}{q(x)}$

- $\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$; · $\int \frac{1}{(1+a^2x^2)}\,dx = \frac{\arctan(ax)}{a} + C$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$; $\int \frac{x}{(1+a^2x^2)}\,dx = \frac{\ln|1+a^2x^2|}{2a^2} + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$; $\int \frac{x}{1x^2+2}\,dx = \frac{\ln|x^2+2|}{2\cdot 1^2} + C$

→ Falls Exp. im Zähler grösser als Exp im Nenner → Polynom division

Vorgehen: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

① $q(x)$ Faktorisieren → $q(x) = q_1(x)\cdot q_2(x)\cdot\ldots\cdot q_n(x)$

② $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{q_1(x)} + \frac{A_2}{q_2(x)} + \dots + \frac{A_n}{q_n(x)}$

③ Koeffizienten vergleich: $x^0 -$, $x^1 -$, $x^2 -$ & für $A_1, A_2, \dots A_n$ auflösen!

③ Integrieren wie oben vermerkt

! Bei Exponenten ≥ 2 von Faktorisierungsprodukt müssen bei PBZ alle Potenzen bei Summe dabei sein.

1. Bsp: $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)}$

2. Bsp: $\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+B_0}{x^2+1}$

3. Bsp: $\frac{2x^3+3x}{(x^2-x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+2)^2}$