Algorithmen und

Wahrscheinlichkeit

Kapitel 2.3

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit

Intuitiv:

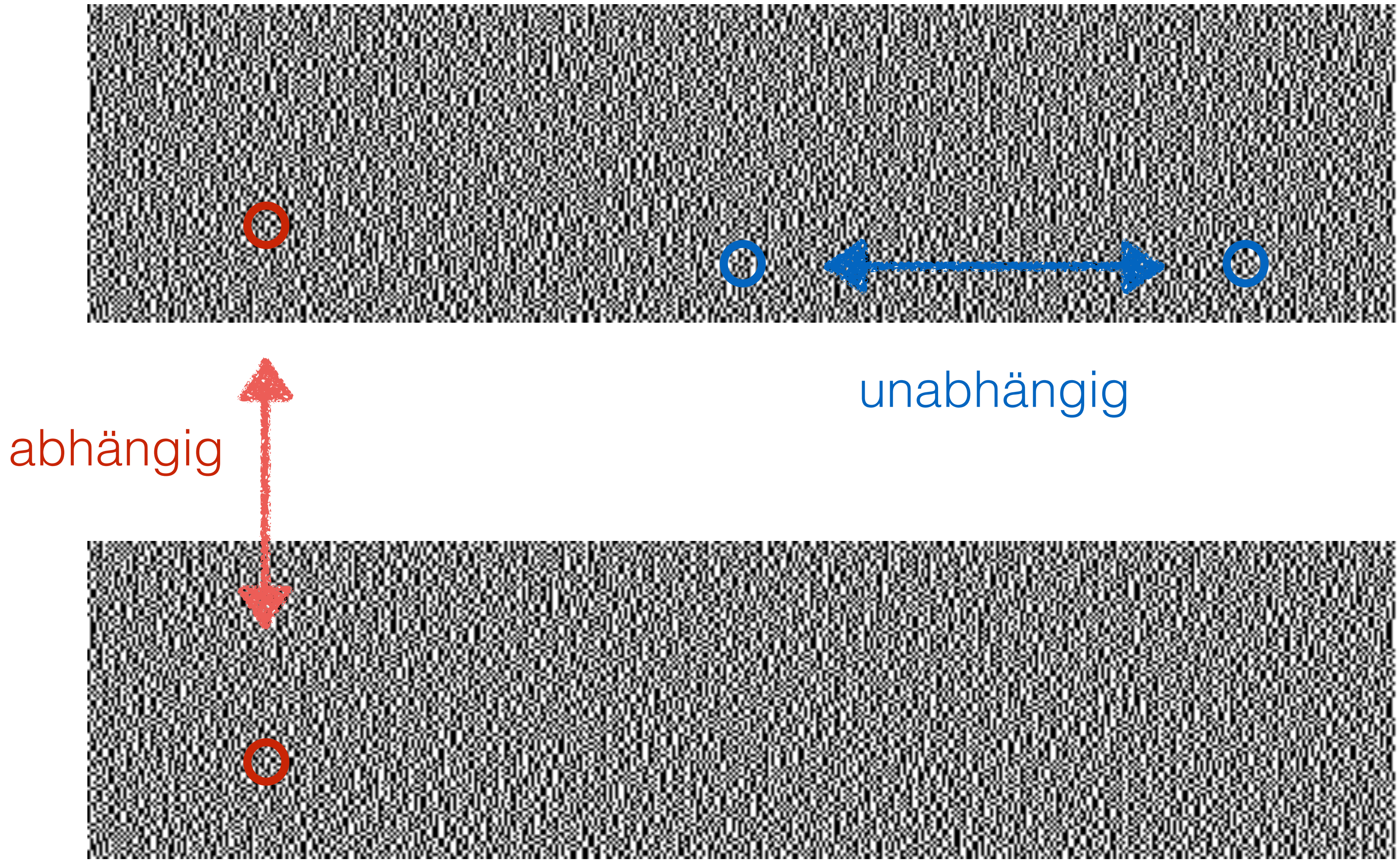
Ereignisse A und B sind unabhängig gdw
Eintritt von B beeinflusst nicht, ob A eintritt

$$\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \overset{\text{Def.}}{=} \Pr[A|B] \overset{!}{=} \Pr[A]$$

Definition Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Visuelle Kryptographie



Unabhängigkeit - Beispiele

Definition Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Wichtig: Ereignisse können (stochastisch) unabhängig sein, ohne dass sie ‚physikalisch' unabhängig sind

A := „  ist gerade" B := „  +  ist 7"

$\Pr[A] = 1/2$
$\Pr[B] = 6/36$

$\Pr[A \cap B] = 3/36$

Unabhängigkeit - Beispiele

Wichtig: Ereignisse können (stochastisch) unabhängig sein, ohne dass sie ‚physikalisch' unabhängig sind

Zufallszahlengenerator *(Programmiersprachen)*

$$f: \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^m \times \{0,1\}^n$$

$$s_{i-1} \rightarrow (s_i,\ a_i)$$

s_i: interne Zustände

a_i: Zufallszahlen — *wir „nehmen an", dass die a_i unabhängig sind*

Unabhängigkeit - viele Ereignisse

Definition Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Offensichtlich erfüllt, wenn die Ereignisse ‚physikalisch' unabhängig sind (zB wenn jedes A_i einem unabhängigem Münzwurf entspricht)

Dies ist aber nicht unbedingt erforderlich (zB Zufallszahlengenerator).

Unabhängigkeit - viele Ereignisse

Lemma Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} \Pr[(A \cap B) \cap C] &= \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[A]\Pr[B]\Pr[C] \\ &= \Pr[A \cap B]\Pr[C] \end{aligned}$$

Beweis für Vereinigung ähnlich, verwende die Siebformel, siehe Skript.

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

Z Z Z K Z K K Z K Z Z Z Z Z Z K Z Z Z Z Z K K Z Z K Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z
K K K Z Z Z Z K K Z Z K Z K Z Z Z K Z Z Z Z Z Z K Z Z Z K Z K Z Z Z Z K K K Z Z
K K Z K Z Z K Z Z Z K Z K Z K K Z Z K Z Z K Z Z Z Z K K Z K Z Z K Z Z K K K Z Z
Z Z K Z Z Z K Z Z K Z Z K K Z Z Z Z Z K K Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z K Z K Z Z K Z
K Z Z Z Z Z Z K K K Z Z Z K Z K Z Z K Z K Z Z Z Z K Z Z Z Z Z K Z K Z Z Z Z Z K

Verhältnis Kopf : Zahl = 0.459854

K K K Z K K K Z K K Z Z Z K Z Z Z K Z Z Z K K K Z Z K K K K Z K K K K Z K K K K
K K K Z K Z K Z Z K K K K K Z K K K Z K Z Z Z Z Z K Z K Z Z Z Z K K K K Z [illegible] K K
Z K Z Z K K K Z K Z Z K Z Z Z K K Z Z K Z Z Z Z K Z Z Z Z K K K K Z K Z Z [illegible] K K
Z Z Z K K K K K K K K K Z K K K Z Z Z K K Z Z Z K K Z K K Z K Z Z K Z Z [illegible] Z K K
Z K Z Z Z K Z Z Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z K K Z Z Z K K Z K Z Z Z Z Z K K Z Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.06186

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

Z K Z K Z K K K Z K K Z Z K K K Z Z Z K Z K Z Z K Z K Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z
K Z K K Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K Z Z K Z K K Z Z Z K K K Z K Z Z [illegible] K Z
K K Z K Z K Z K K Z K Z K Z K K K Z K Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z K K Z Z Z [illegible] K Z K
K K K Z K K K Z Z Z K K K K Z K K Z Z K K Z Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z [illegible] K K K K
K Z Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z K K K K K K K Z Z Z K K Z Z K K Z K Z Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 0. 980198 # Änderungen = 112

K Z Z Z K Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K K Z Z K K Z K Z K K Z Z K Z K Z Z K Z
K Z K Z K Z K Z Z Z Z Z Z K Z K K K K K Z K Z Z K Z K Z Z K Z K K K K Z Z K K K
K K K Z K Z K K Z Z K Z K Z K Z Z Z K Z K Z K K Z K K K Z Z K Z Z Z K Z Z K K Z
Z K Z Z K Z K Z Z K Z K Z K Z K K Z K Z K Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z Z K Z K Z
K K K Z K Z K K K Z Z K Z Z K Z K Z K K K K Z Z K Z K Z K Z K Z K K Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.00000 # Änderungen = 133

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

K Z K Z Z Z Z Z K K Z Z Z K Z Z K Z Z K Z Z K Z K K Z Z K Z K Z Z K Z K Z K K Z
Z Z K Z K Z Z Z Z Z K Z Z K K Z K Z K K Z Z K Z Z Z Z Z K K K Z K K Z Z K Z K K
Z K K Z K Z Z Z K Z K K Z K K K Z Z K Z K Z K Z Z Z Z Z K Z Z K K Z K K K Z K K
Z K K K K Z K Z Z Z K K K Z K Z Z K K K Z Z K Z K Z K K K K K Z K Z K K K Z K K
Z K Z K K Z K K Z K K K Z Z K Z K K Z Z K K K Z Z K Z Z K Z K K K Z K K Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.0202 # Änderungen = 117

K K K K K Z Z K Z Z K K Z K K K K Z Z Z Z K K K K K Z K Z Z K K K Z K Z K K K Z
K K K Z Z K Z K Z K K Z K K K K K Z K K K Z K Z K Z Z Z K K Z K Z Z Z K K Z K K
Z K K K K Z K Z Z K Z Z K K K K K Z Z K K Z Z K Z Z Z K K K K Z Z Z K Z K K K Z
K K K Z K Z K Z K Z Z Z K Z Z K Z Z K K Z K Z K K K K K K K K K Z Z Z K K Z Z K
Z Z Z K Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z K Z K Z K Z Z Z Z K K Z Z K Z K K K Z K Z Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1. 24719 # Änderungen = 105

Wie „erkennt“ man Zufall?

Eigenschaften einer zufällige Folge:

Wir erwarten

-- Kopf und Zahl treten ungefähr gleich häufig auf, also
Anzahl Kopf dividiert durch Anzahl Zahl $\approx$ 1

-- W‘keit das zwei aufeinanderfolgende Buchstaben gleich sind ist 50%, also
Anzahl Änderungen $\approx$ Länge der Folge / 2

-- längste identische Teilfolge $\approx$ $1 + \log_2$(Länge der Folge)

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

K Z K Z Z Z Z Z K K Z Z Z K Z Z K Z Z K Z Z K Z K K Z Z K Z K Z Z K Z K Z K K Z
Z Z K Z K Z Z Z Z Z K Z Z K K Z K Z K K Z Z K Z Z Z Z Z K K K Z K K Z Z K Z K K
Z K K Z K Z Z Z K Z K K Z K K K Z Z K Z K Z K Z Z Z Z Z K Z Z K K Z K K K Z K K
Z K K K K Z K Z Z Z K K K Z K Z Z K K K Z Z K Z K Z K K K K K Z K Z K K K Z K K
Z K Z K K Z K K Z K K K Z Z K Z K K Z Z K K K Z Z K Z Z K Z K K K Z K K Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.0202 # Änderungen = 117

K K K K K Z Z K Z Z K K Z K K K K Z Z Z Z K K K K K Z K Z Z K K K Z K Z K K K Z
K K K Z Z K Z K Z K K Z K K K K K Z K K K Z K Z K Z Z Z K K Z K Z Z Z K K Z [illegible] K
Z K K K K Z K Z Z K Z Z K K K K K Z Z K K Z Z K Z Z Z K K K K Z Z Z K Z K [illegible] K Z
K K K Z K Z K Z K Z Z Z K Z Z K Z Z K K Z K Z K K K K K K K K K Z Z Z K [illegible] [illegible] Z K
Z Z Z K Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z K Z K Z K Z Z Z Z K K Z Z K Z K K K Z K Z Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1. 24719 # Änderungen = 105

$1+\log_2(200)=8.6$

Wie „erkennt“ man Zufall?

<u>Eigenschaften einer zufällige Folge:</u>

Wir erwarten

-- Kopf und Zahl treten ungefähr gleich häufig auf, also
Anzahl Kopf dividiert durch Anzahl Zahl $\approx$ 1

-- W‘keit das zwei aufeinanderfolgende Buchstaben gleich sind ist 50%, also
Anzahl Änderungen $\approx$ Länge der Folge / 2

-- längste identische Teilfolge $\approx$ 1 + $\log_2$(Länge der Folge)

Kapitel 2.4

Zufallsvariablen

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ Primzahl} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$X(\omega) = \omega^2 - 5\omega$$

„X ≤ 5" steht für das *Ereignis*, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner gleich 5 annimmt, also

$$X \leq 5 \quad \triangleq \quad \{\, \omega \in \Omega \; : \; X(\omega) \leq 5 \}$$

Umgekehrt:

Indikatorvariable **X** für ein Ereignis **E**:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E, \quad \text{d.h. Ereignis } E \text{ gilt} \\ 0, & \omega \notin E, \quad \text{d.h. Ereignis } E \text{ gilt nicht} \end{cases}$$

Dichte- und Verteilungsfunktion

Dichtefunktion

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Dichte- und Verteilungsfunktion — Beispiele

Wir werfen eine Münze drei Mal: **X := Anzahl „Kopf“**

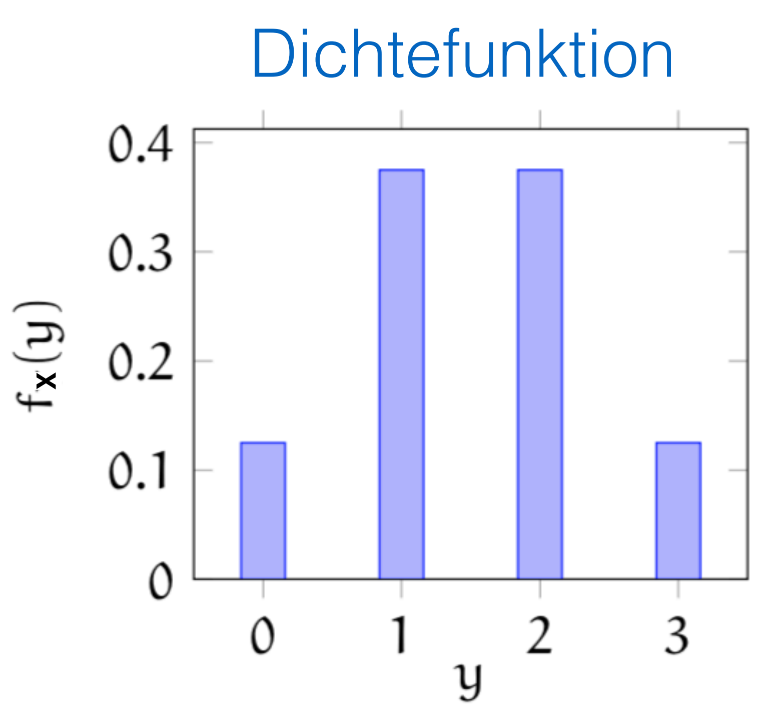
Wahrscheinlichkeitsraum: Ω = {KKK, KKZ, …., ZZZ}

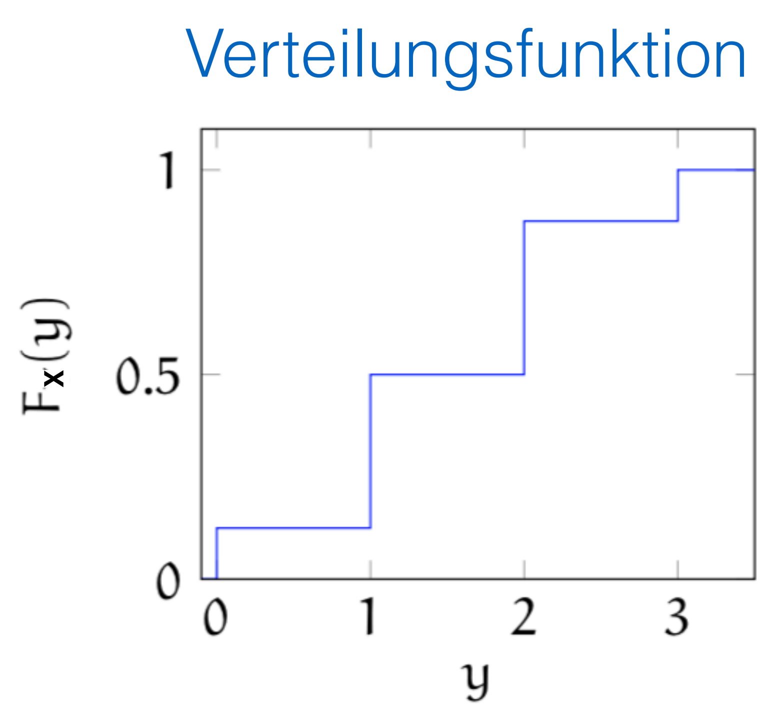
Pr[X=0] = Pr[{ZZZ}] = 1/8

Pr[X=1] = Pr[{ZZK,ZKZ, KZZ}] = 3/8

Pr[X=2] = Pr[{ZKK,KKZ, KZK}] = 3/8

Pr[X=3] = Pr[{KKK}] = 1/8





Dichte- und Verteilungsfunktion — Beispiele

Wir werfen einen Würfel drei Mal:

Y := Anzahl ungerader Augenzahlen

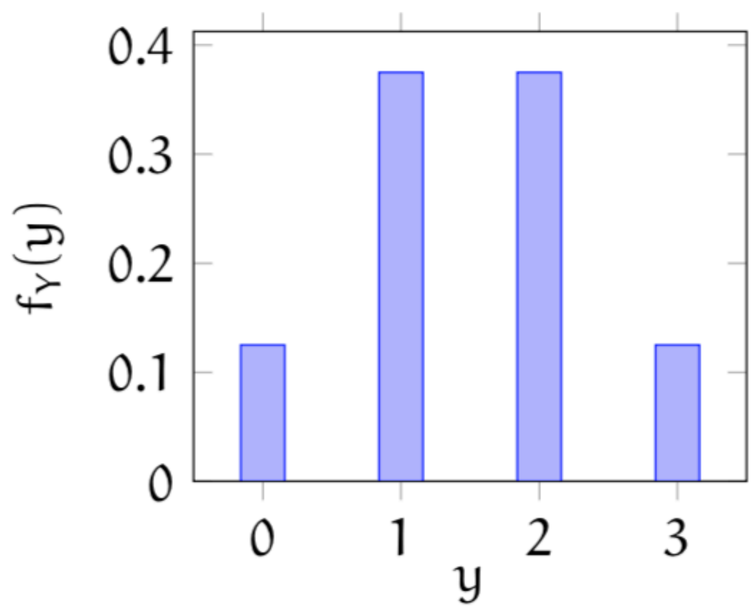
Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$

Pr[Y=0] = Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf gerade] = 1/8

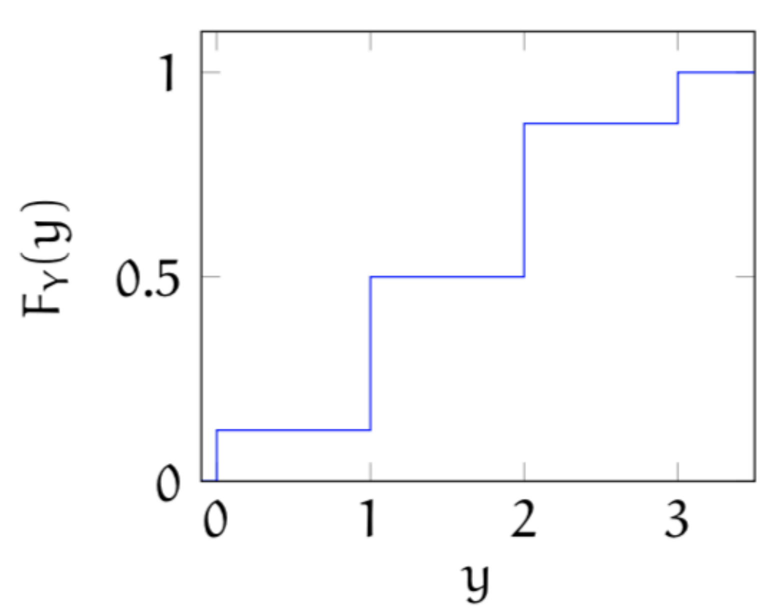
Pr[Y=1] = Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf ungerade] +
Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf ungerade] · Pr[dritter Wurf gerade] +
Pr[erster Wurf ungerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf gerade] = 3/8

Pr[Y=2] = 3/8, Pr[Y=3] = 1/8

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



Zufallsvariable

Beispiel:
Wir werfen eine Münze 100 mal

Ergebnismenge:

$$\Omega$$

$$\Omega = \{K, Z\}^{100}$$

Wahrscheinlichkeitsfkt:

$$\Pr : \Omega \to [0,1] \quad \text{mit} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1$$

$$\Pr[\omega] = 2^{-100} \quad \forall \omega \in \Omega$$

(Laplaceraum)

Zufallsvariable:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Beispiele für Zufallsvariablen:

$X :=$ #Kopf

Wertebereich: {0,…,100}

$$Y := \begin{cases} 1 & \textit{falls}\ \text{\#Kopf gerade} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wertebereich: {0,1}

Zufallsvariable - Erwartungswert

Definition Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

.... ?

Zufallsvariable - Erwartungswert

Definition Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x]$$

Vorlesung: *wir betrachten nur Zufallsvariablen für die der Erwartungswert existiert.*

Lemma Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Erwartungswert - Spezialfall

Satz Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Beweis:

Definition

Vertauschen Summationsreihenfolge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \Pr[X = j] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} \Pr[X = j]$$

Pr[] hängt nicht von i ab

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \Pr[X = j] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \Pr[X = j]$$

Definition

$$= \mathbb{E}[X].$$

Linearität des Erwartungswertes

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

Summe:

$$X + Y : \quad \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega)\cdot \Pr[\omega] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \big(\, X(\omega) + Y(\omega) \,\big)\cdot \Pr[\omega] \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot \Pr[\omega] \;+\; \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\cdot \Pr[\omega] \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

Linearität des Erwartungswertes

Satz *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b.$$

Beobachtung Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = \Pr[A]$.

Beispiel: Wir werfen eine Münze 100 Mal $X :=$ Anzahl Kopf

Setze für alle $i = 1,\ldots,100$:

$X_i :=$ Indikatorvariable für „Kopf" im **i**-ten Wurf

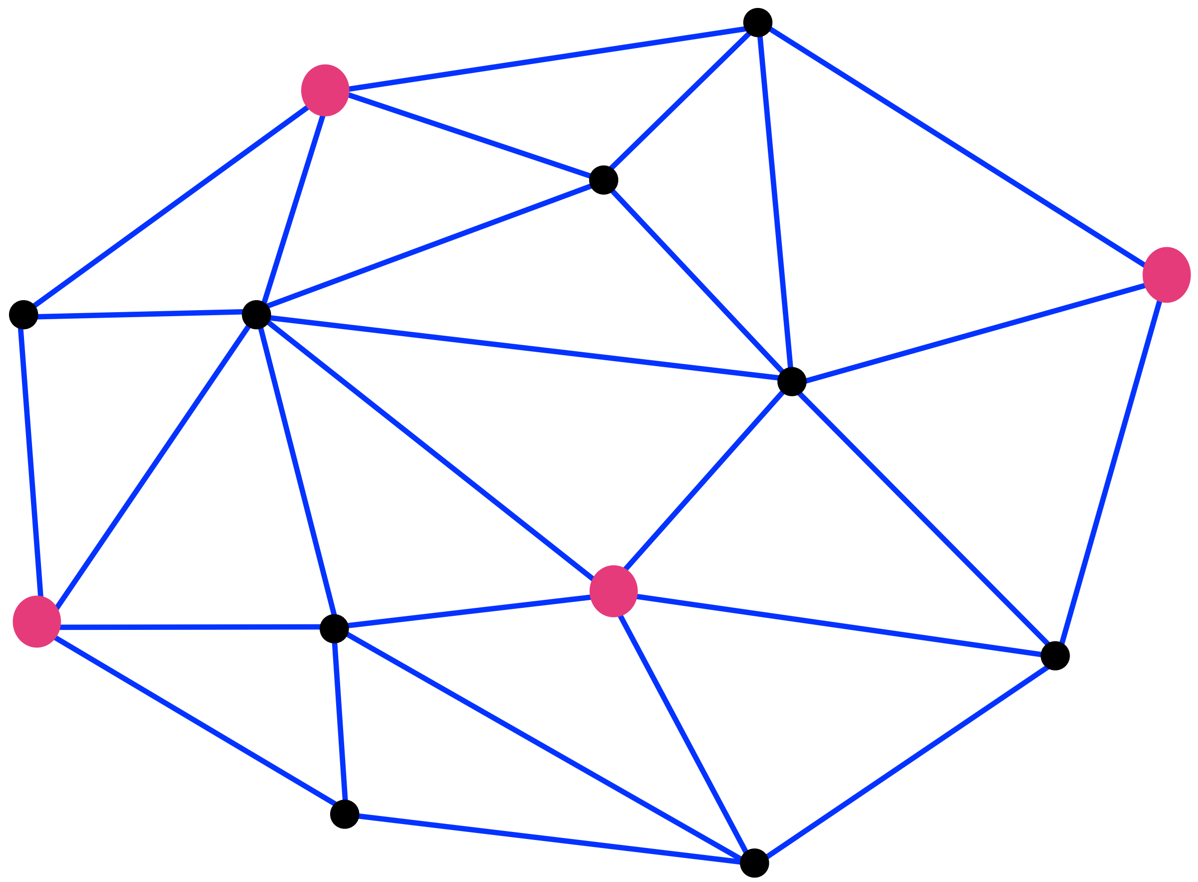
Dann $X = X_1 + \ldots + X_{100}$

und $E[X_i] = 1/2$, und wegen der Linearität des Erwartungswertes

daher $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_{100}] = 50$

Ziel: Knoten/Rechner sollen gemeinsam eine Aufgabe lösen

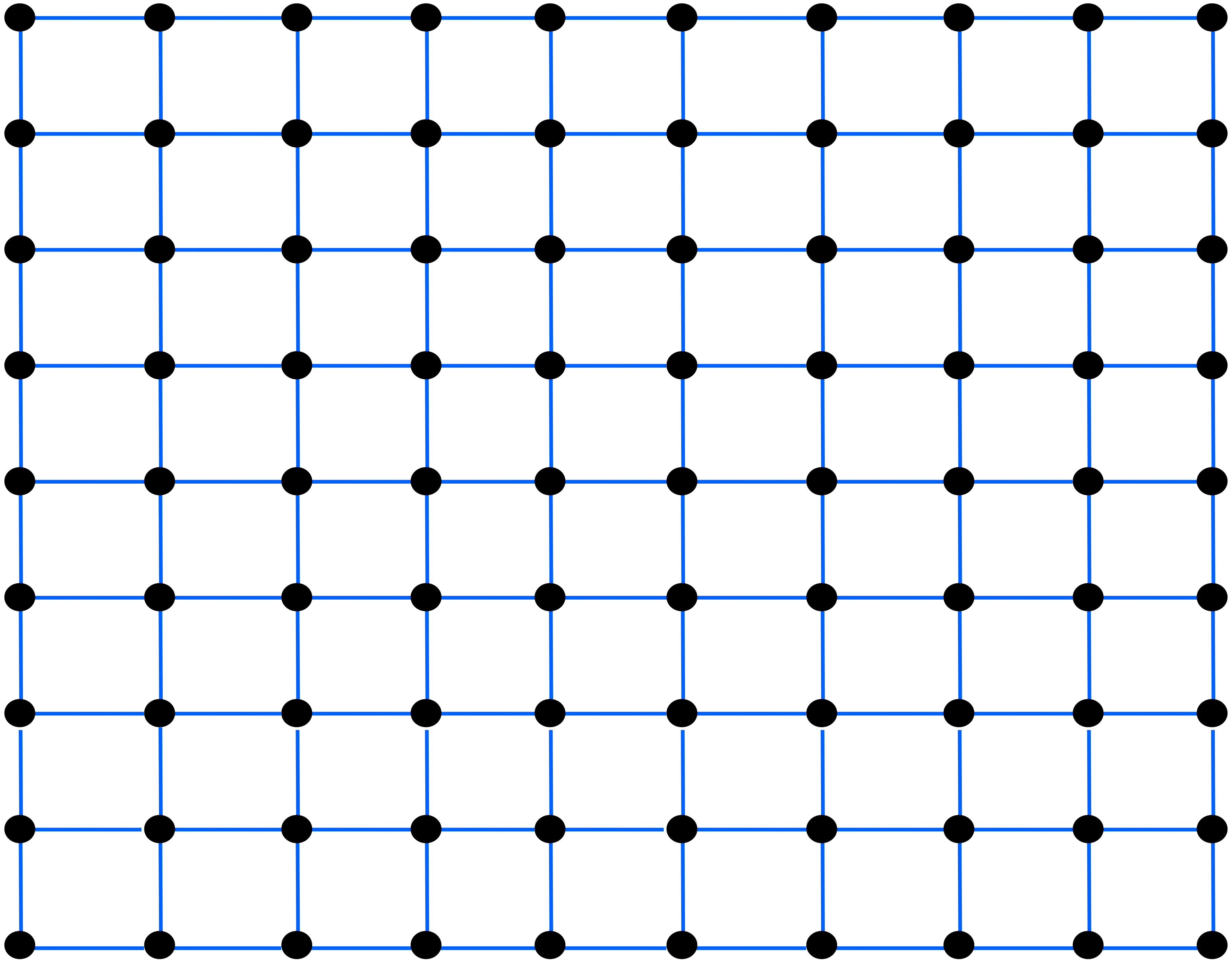
z.B: Bestimme eine möglichst grosse stabile Menge



stabile Menge $\triangleq$ Knoten, die nicht durch Kanten verbunden sind

2. Runde:

alle noch vorhandenen Kanten: „lösche“ einen der beiden Knoten



Satz:

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, bestimmt der Algorithmus eine stabile Menge S mit

$$E[S] \geq np - mp^2$$

Beweis

X := Anzahl Knoten, die erste Runde „überleben“

$\Rightarrow$ jeder einzelne Knoten überlebt mit Wahrscheinlichkeit p,

wir haben n Knoten

$\Rightarrow$ (Linearität des Erwartungswertes) $\mathbb{E}[X] = np.$

Y := Anzahl Kanten, die erste Runde „überleben“

$\Rightarrow$ jede einzelne Kante überlebt mit Wahrscheinlichkeit p^2,

wir haben m Kanten

$\Rightarrow$ (Linearität des Erwartungswertes) $\mathbb{E}[Y] = mp^2.$

S $\geq$ X - Y da wir höchstens einen Knoten pro Kante löschen

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S] \geq \mathbb{E}[X - Y] \overset{\text{Lin.}}{=} \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = np - mp^2.$$

Satz:

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, bestimmt der Algorithmus eine stabile Menge S mit

$$E[S] \geq np - mp^2$$

Satz gilt für jedes p. Wie sollen wir p wählen? *Wähle p so, dass* $np-mp^2$ *maximal ist.*

Korollar:

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, bestimmt der Algorithmus für $p = n/2m$ eine stabile Menge S mit

$$E[S] \geq n^2 / 4m$$

Indikatorvariable: $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

- Schnitt $A \cap B$ $\qquad I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$

- Komplement $\bar{A} := \Omega \setminus A$ $\qquad I_{\bar{A}} = 1 - I_A$

- Vereinigung $A \cup B$ $\qquad I_{A \cup B} = ???$

$\longrightarrow$ Siebformel

Verteilungen

Dichte- und Verteilungsfunktion

Dichtefunktion

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Indikatorvariable: **Ereignis** $A \subseteq \Omega$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \qquad p := \Pr[A] = \mathbb{E}[I_A]$$

Dichtefunktion:

$$f_{I_A}(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1-p, & x = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bernoulli-Verteilung

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1 - p, & x = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = p$$

Beispiele: Werfen einer Münze, Indikator für Kopf
Werfen eines Würfels, Indikator für “Augenzahl gerade”
Werfen eines Würfels, Indikator für “1”

Dichte- und Verteilungsfunktion — Beispiele

Wir werfen eine Münze drei Mal: **X := Anzahl „Kopf“**

Wahrscheinlichkeitsraum: Ω = {KKK, KKZ, …., ZZZ}

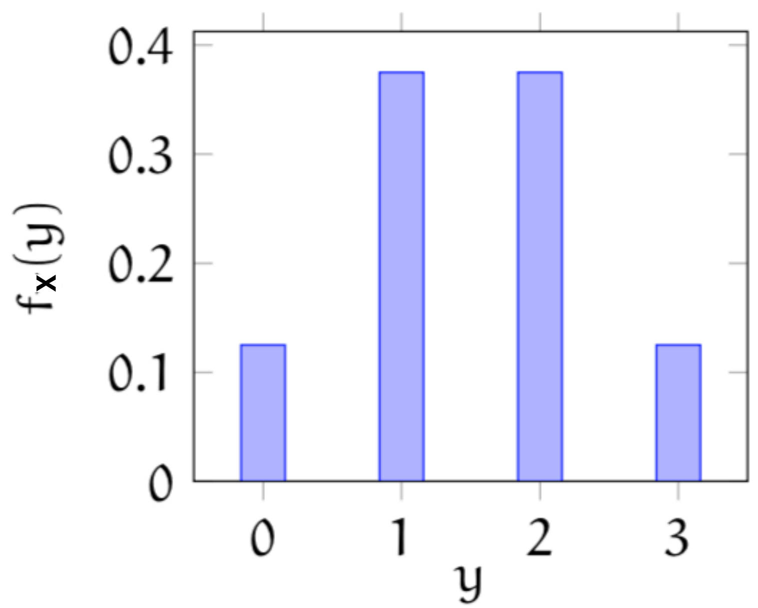
Pr[X=0] = Pr[{ZZZ}] = 1/8

Pr[X=1] = Pr[{ZZK,ZKZ, KZZ}] = 3/8

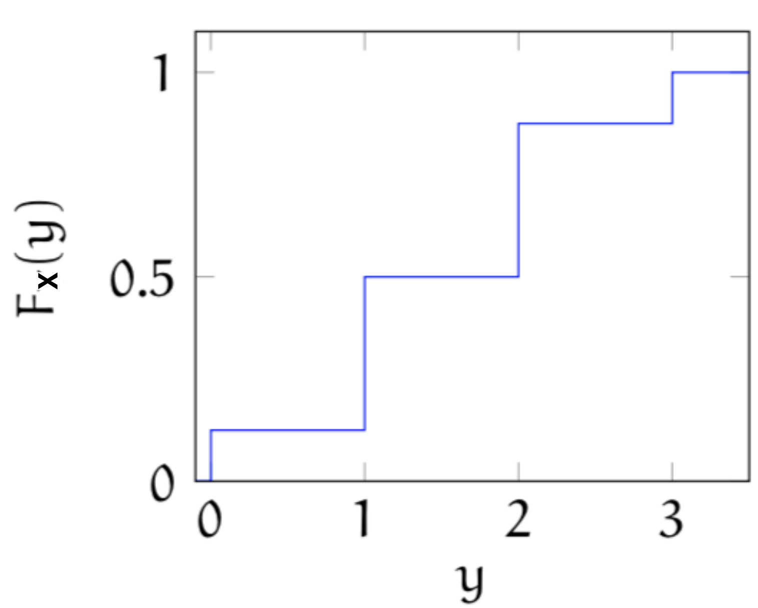
Pr[X=2] = Pr[{ZKK,KKZ, KZK}] = 3/8

Pr[X=3] = Pr[{KKK}] = 1/8

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



Dichte- und Verteilungsfunktion — Beispiele

Wir werfen einen Würfel drei Mal:

Y := Anzahl ungerader Augenzahlen

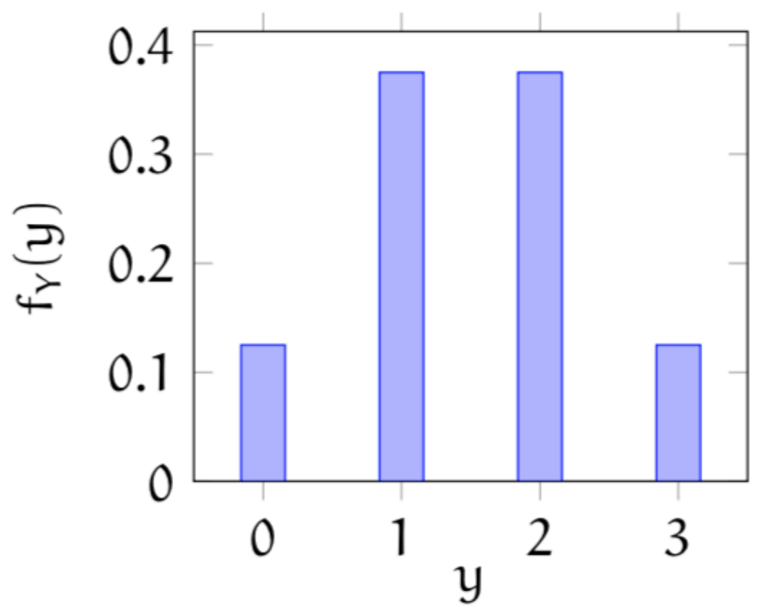
Wahrscheinlichkeitsraum: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$

Pr[Y=0] = Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf gerade] = 1/8

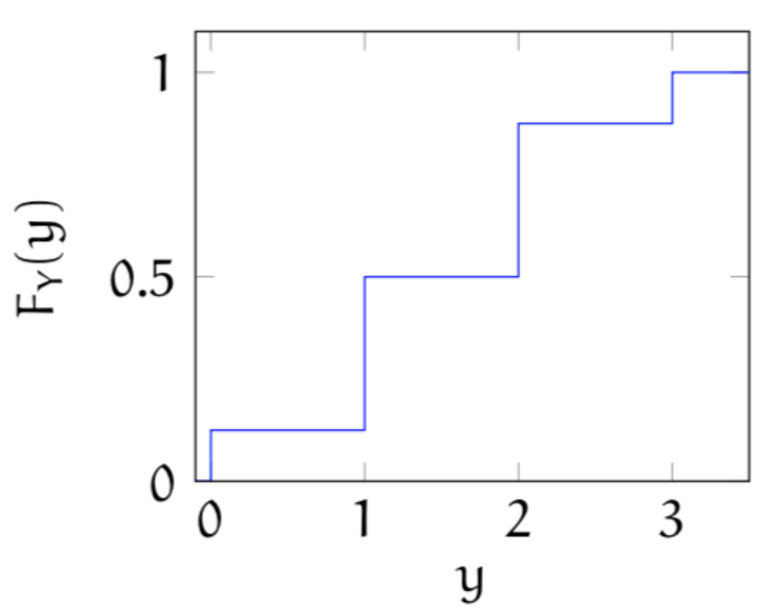
Pr[Y=1] = Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf ungerade] +
Pr[erster Wurf gerade] · Pr[zweiter Wurf ungerade] · Pr[dritter Wurf gerade] +
Pr[erster Wurf ungerade] · Pr[zweiter Wurf gerade] · Pr[dritter Wurf gerade] = 3/8

Pr[Y=2] = 3/8, Pr[Y=3] = 1/8

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



Binomialverteilung

Beispiel: Wir werfen einer Münze n mal   X := Anzahl Kopf

$$\Pr[\, X = k \,] \;=\; ??$$

n Positionen, entsprechend den Ergebnissen der n Münzwürfen

Z K K Z Z K … Z Z K Z

-> wähle k Positionen, die Kopf zeigen sollen

$\longrightarrow \quad \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

Wahrscheinlichkeit jeder KZ-Folge/jedes Elementarereignisse: $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n}$

=> $$\Pr[\, X = k \,] \;=\; \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Binomialverteilung

Beispiel: Wir werfen statt einer fairen Münze eine Münze mit

$\Pr[\text{Kopf}] = p$ und $\Pr[\text{Zahl}] = 1-p$

n mal

$X :=$ Anzahl Kopf

$\Pr[\, X = k \,] = \; ??$

n Positionen, entsprechend den Ergebnissen der n Münzwürfen

$\underline{Z} \quad \underline{K} \quad \underline{K} \quad \underline{Z} \quad \underline{Z} \quad \underline{K} \quad \ldots \quad \underline{Z} \quad \underline{Z} \quad \underline{K} \quad \underline{Z}$

-> wähle k Positionen, die Kopf zeigen sollen

$\longrightarrow \quad \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

-> W'keit, dass die n Würfe genau dieses Ergebnis haben $= p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\Pr[\, X = k \,] = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomialverteilung

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = np$$

Beispiel: Werfen einer Münze n mal, X = Anzahl Kopf