Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Kapitel 2.4

Zufallsvariablen

$$X \cancel{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Zufallsvariable - Notation

„X ≤ 5“ steht für das *Ereignis*, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner gleich 5 annimmt, also

$$X \leq 5 \quad \triangleq \quad \{\ \omega \in \Omega \ :\ X(\omega) \ \leq \ 5\}$$

Umgekehrt:

Indikatorvariable **X** für ein Ereignis **E**:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E, \quad \text{d.h. Ereignis } E \text{ gilt} \\ 0, & \omega \notin E, \quad \text{d.h. Ereignis } E \text{ gilt nicht} \end{cases}$$

Zufallsvariable

Beispiel:
Wir werfen eine Münze 100 mal

Ergebnismenge:

$$\Omega$$

$$\Omega = \{K, Z\}^{100}$$

Wahrscheinlichkeitsfkt:

$$\text{Pr} : \Omega \to [0,1] \quad \text{mit} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \text{Pr}[\omega] = 1$$

$$\text{Pr}[\omega] = 2^{-100} \quad \forall \omega \in \Omega$$

(Laplaceraum)

Zufallsvariable:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Beispiele für Zufallsvariablen:

$X :=$ #Kopf

Wertebereich: {0,…,100}

$$Y := \begin{cases} 1 & \textit{falls } \text{\#Kopf gerade} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wertebereich: {0,1}

Zufallsvariable - Erwartungswert

Definition Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x]$$

Vorlesung: wir betrachten nur Zufallsvariablen für die der Erwartungswert existiert.

Lemma Ist X eine Zufallsvariable, so gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega].$$

Erwartungswert - Spezialfall

Satz Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Beweis:

Definition

Vertauschen Summationsreihenfolge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \Pr[X = j] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} \Pr[X = j]$$

Pr[] hängt nicht von i ab

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \Pr[X = j] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \Pr[X = j]$$

Definition

$$= \mathbb{E}[X].$$

Linearität des Erwartungswertes

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

Summe:

$$X + Y : \quad \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$$

$$\mathbb{E}[X+Y] \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$
$$= \sum_{\omega \in \Omega} (\, X(\omega) + Y(\omega) \,) \cdot \Pr[\omega]$$
$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \; + \; \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$
$$= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

Linearität des Erwartungswertes

Satz *(Linearität des Erwartungswerts)* Für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b$ mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b.$$

Beobachtung Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $\mathbb{E}[X_A] = \Pr[A]$.

Beispiel: Wir werfen eine Münze 100 Mal $X :=$ Anzahl Kopf

Setze für alle $i = 1, \ldots, 100$:

$X_i :=$ Indikatorvariable für „Kopf" im **i**-ten Wurf

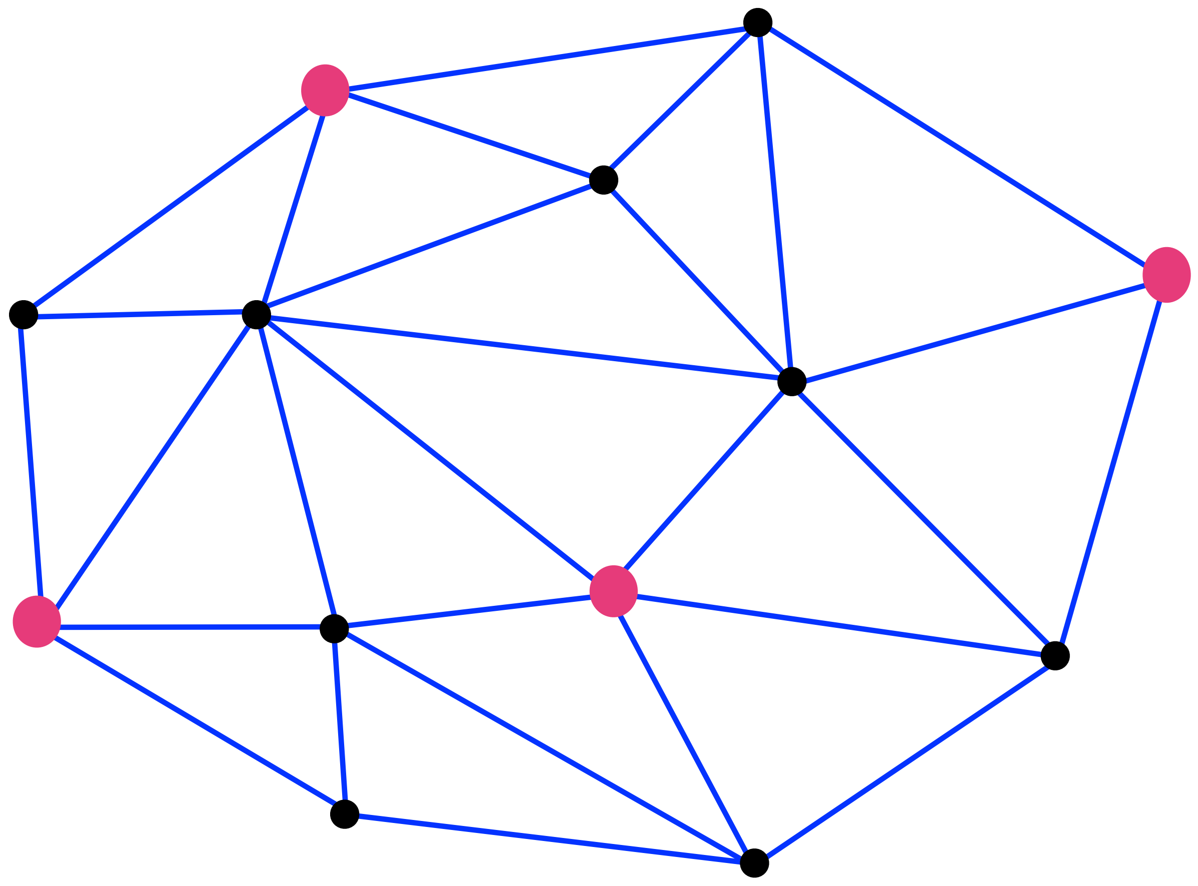
Dann $X = X_1 + \ldots + X_{100}$

und $E[X_i] = 1/2$, und wegen der Linearität des Erwartungswertes

daher $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_{100}] = 50$

Ziel: Knoten/Rechner sollen gemeinsam eine Aufgabe lösen

z.B: Bestimme eine möglichst grosse stabile Menge



stabile Menge $\triangleq$ Knoten, die nicht durch Kanten verbunden sind

Satz:

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, bestimmt der Algorithmus eine stabile Menge S mit

$$E[S] \geq np - mp^2$$

X := Anzahl Knoten, die erste Runde „überleben“

$\Rightarrow$ jeder einzelne Knoten überlebt mit Wahrscheinlichkeit p,

wir haben n Knoten

$\Rightarrow$ (Linearität des Erwartungswertes) $\mathbb{E}[X] = np.$

Y := Anzahl Kanten, die erste Runde „überleben“

$\Rightarrow$ jede einzelne Kante überlebt mit Wahrscheinlichkeit p^2,

wir haben m Kanten

$\Rightarrow$ (Linearität des Erwartungswertes) $\mathbb{E}[Y] = mp^2.$

S $\geq$ X - Y da wir höchstens einen Knoten pro Kante löschen

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S] \geq \mathbb{E}[X - Y] \stackrel{\text{Lin.}}{=} \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = np - mp^2.$$

Verteilungen

Dichtefunktion

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Dichte- und Verteilungsfunktion

Dichtefunktion

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x]$$

Verteilungsfunktion

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x]$$

Bernoulli-Verteilung

$$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$$

Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1, \\ 1 - p, & x = 0, \\ 0, & \mathrm{sonst} \end{cases} \qquad \mathbb{E}[X] = p$$

Beispiele: Werfen einer Münze, Indikator für Kopf
Werfen eines Würfels, Indikator für “Augenzahl gerade”
Werfen eines Würfels, Indikator für “1”

Binomialverteilung

Beispiel: Wir werfen statt einer fairen Münze eine Münze mit

Pr[Kopf] = p und Pr[Zahl] = 1-p

n mal

X := Anzahl Kopf   Pr[X = k] = ??

n Positionen, entsprechend den Ergebnissen der n Münzwürfen

$$\underline{Z}\quad \underline{K}\quad \underline{K}\quad \underline{Z}\quad \underline{Z}\quad \underline{K}\quad \dots\quad \underline{Z}\quad \underline{Z}\quad \underline{K}\quad \underline{Z}$$

-> wähle k Positionen, die Kopf zeigen sollen

$$\longrightarrow \quad \binom{n}{k} \quad \text{Möglichkeiten}$$

-> W'keit, dass die n Würfe genau dieses Ergebnis haben $= p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$\Pr[\ X = k\ ] = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

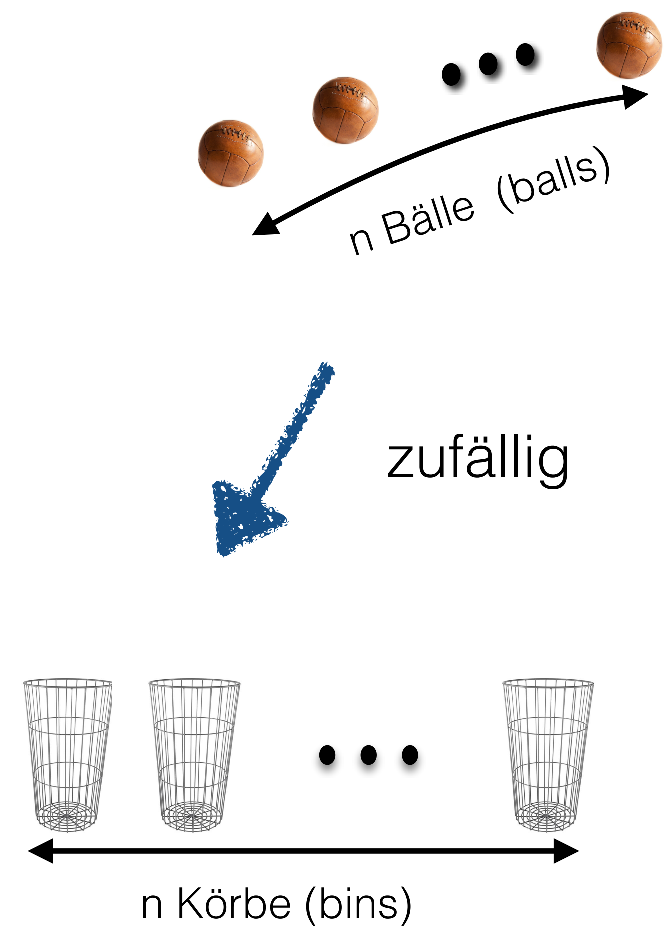
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = np$$

Beispiel: Werfen einer Münze n mal, X = Anzahl Kopf

Binomialverteilung

Beispiel:



X := Anzahl Bälle im **ersten** Korb

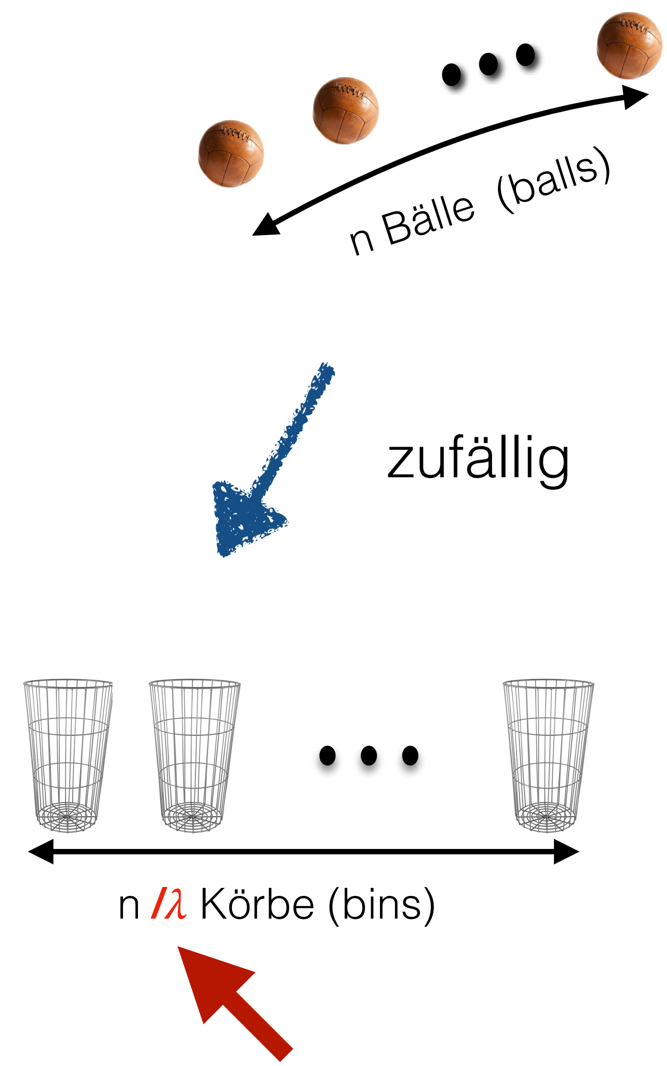
$X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/n)$

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X = i] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^{i}}_{=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{i!}\to\frac{1}{i!}} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-i}}_{\approx(e^{-\frac{1}{n}})^{n-i}=e^{-\frac{n-i}{n}}\to e^{-1}}$$

$$= \frac{e^{-1}}{i!}$$

Beispiel:



X := Anzahl Bälle im **ersten** Korb

$X \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X = i] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i}_{= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{\lambda^i}{i!} \to \frac{\lambda^i}{i!}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}}_{\approx (e^{-\frac{\lambda}{n}})^{n-i} = e^{-\lambda\frac{n-i}{n}} \to e^{-\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$$X \sim Po(\lambda)$$

$$f_X(i) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} & \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

Bin(n,**λ**/n) konvergiert für n → ∞ gegen Po(**λ**)

Beispiel: Modellierung seltener Ereignisse, zum Beispiel
X:= Anzahl Herzinfarkte in der Schweiz in der nächsten Stunde

Geometrische Verteilung

Beispiel: Wir werfen eine Münze mit

$\Pr[\text{Kopf}] = p$ und $\Pr[\text{Zahl}] = 1\text{-}p$

so lange, bis Kopf kommt

X := Anzahl Würfe

$\Pr[\,X = k\,] \;=\;$??

Z Z Z Z Z Z ... Z K

Länge k

-> W'keit, dass die k Würfe genau dieses Ergebnis haben $= (1-p)^{k-1}p$

$$\Pr[X = k] \;=\; (1-p)^{k-1}p$$

Geometrische Verteilung

$$X \sim \mathrm{Geo}(p)$$

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{für } i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F_X(n) = 1 - (1-p)^n \qquad \text{für alle } n=1,2,\ldots$$

$$\mathbb{E}[X] = 1/p$$

Beispiel: Wiederholtes Werfen einer Münze,
X = Anzahl Würfe bis zum ersten Mal Kopf

Geometrische Verteilung

Wichtige Eigenschaft: Gedächtnislosigkeit

Satz Ist $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \overset{=}{\cancel{\geq}} s + t \mid X > s] = \Pr[X \overset{=}{\cancel{\geq}} t].$$

Beweis: nachrechnen

Beispiel: Wahrscheinlichkeit im ersten Wurf Kopf zu bekommen ist identisch zur Wahrscheinlichkeit nach 1000 Fehlversuchen im 1001ten Wurf Kopf zu bekommen

Coupon Collector

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

Coupon Collector

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

Lösungsansatz: betrachte n Phasen

Phase i: Runden während wir i-1 verschiedene Bilder besitzen

X_i := Anzahl Runden in Phase i

Beispiel n=4:

$$\underbrace{2}_{1}, \underbrace{2, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 3}_{3}, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_{4}$$

erhaltenes Bild

Phase

1 2 3 6

$X_i \sim \mathrm{Geo}(\frac{n-(i-1)}{n})$

Szenario: es gibt n verschiedene Bilder
in jeder Runde erhalten wir (gleichw'lich) eines der Bilder

X := Anzahl Runden bis wir alle n Bilder besitzen

Frage: E[X] = ??

X_i := Anzahl Runden in Phase i, $X_i \sim \mathrm{Geo}(\frac{n-(i-1)}{n})$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n,$$

$$H_n = \ln n + O(1)$$

Coupon Collector - Varianten

- Bekommen wir die **ersten k** Bilder geschenkt, so reduziert sich der Erwartungswert auf

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} = n \cdot H_{n-k}$$

- Bekommen wir die **letzten k** Bilder geschenkt, so reduziert sich der Erwartungswert auf

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot (H_n - H_k)$$

Warten auf den n-ten Erfolg

Beispiel: Wir werfen eine Münze mit

$$\Pr[\text{Kopf}] = p \quad \text{und} \quad \Pr[\text{Zahl}] = 1-p$$

so lange, bis wir n Mal Kopf gesehen haben

X := Anzahl Würfe

$$\Pr[\, X = k \,] \;=\; ??$$

Z K K Z Z K ... Z K

Länge k

-> wähle n-1 weitere Positionen, die Kopf zeigen sollen

$$\longrightarrow \quad \binom{k-1}{n-1} \quad \text{Möglichkeiten}$$

-> W'keit, dass die k Würfe genau dieses Ergebnis haben $= (1-p)^{k-n} p^n$

$$\Pr[X = k] = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$$

Negative Binomialverteilung

$$X \sim \text{NegativeBinomial}(n,p)$$

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n, & \text{für } k = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = n/p$$

Beispiel: Warten auf den n-ten Erfolg