Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Angelika Steger

Institut für Theoretische Informatik

Kapitel 3.2

Geometrische Algorithmen

Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^d

Gesucht: zB:

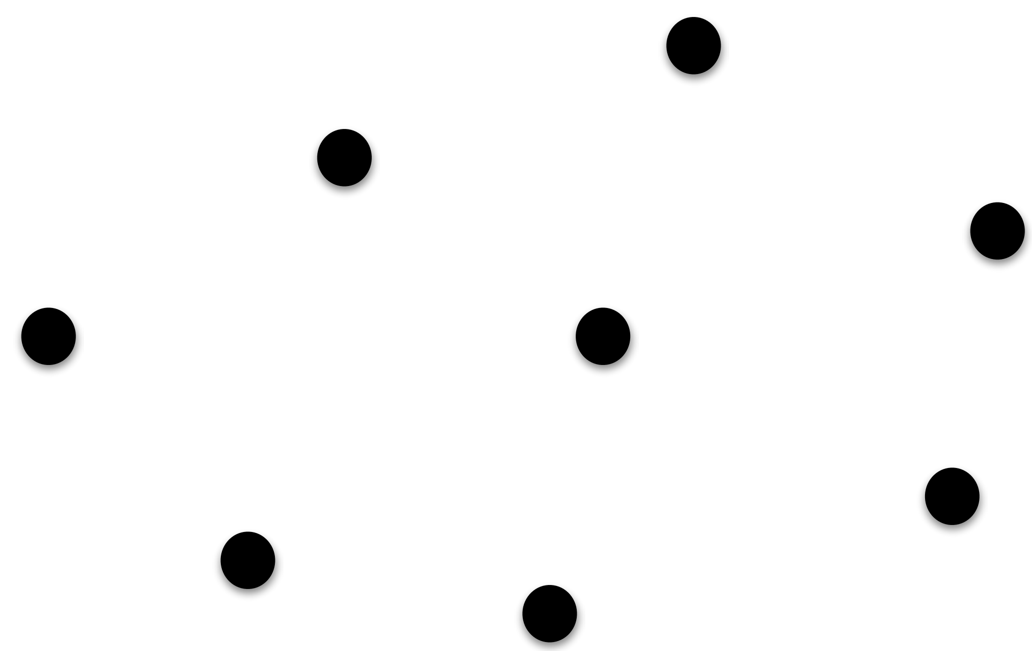
- kleinster umschliessender Kreis
- konvexe Hülle
- Voronoi-Diagramm

Problemstellung

Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^d

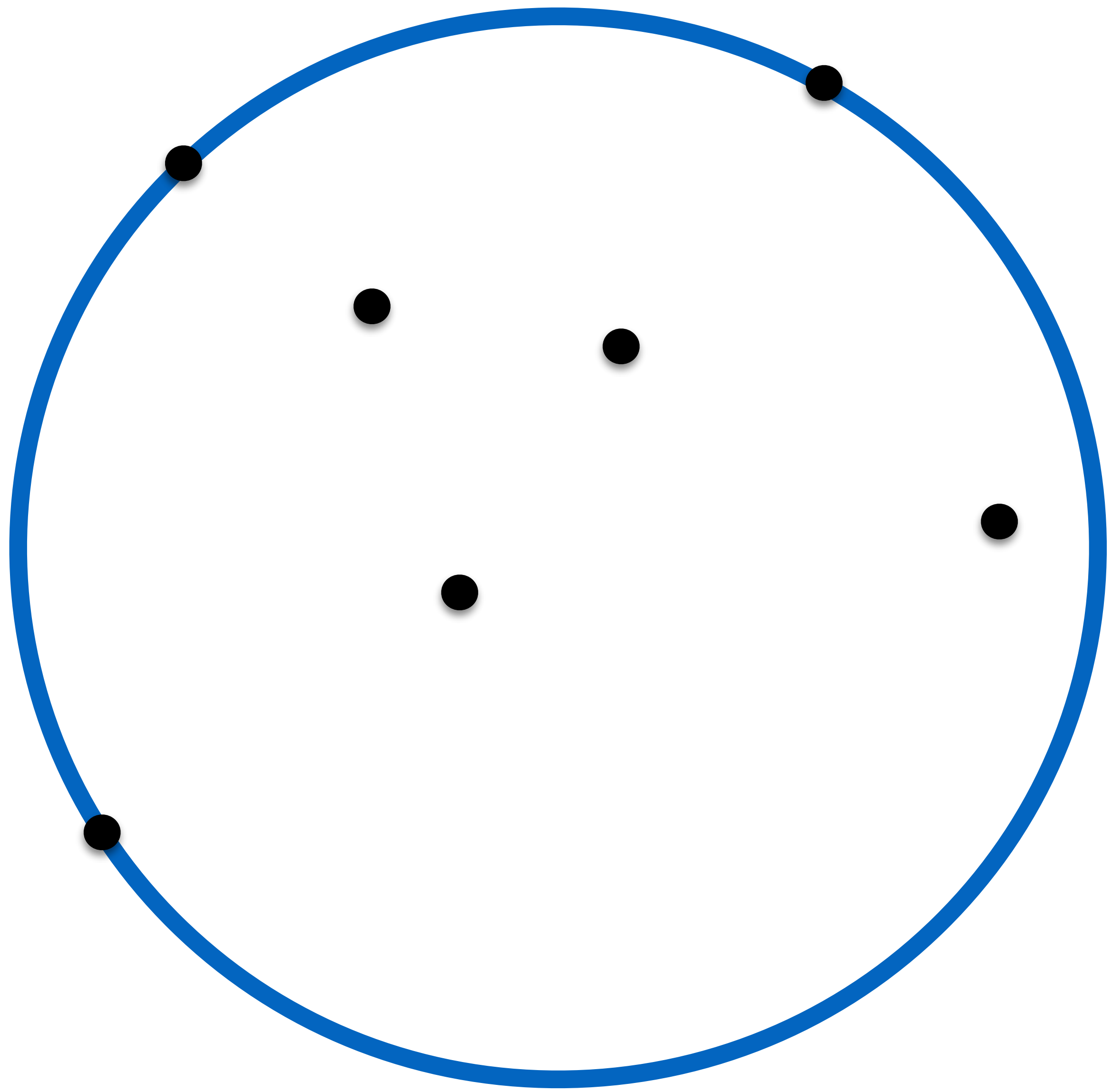
Gesucht: zB:
- kleinster umschliessender Kreis
- konvexe Hülle
- Voronoi-Diagramm

VL: $d=2$



Kleinster Umschliessender Kreis

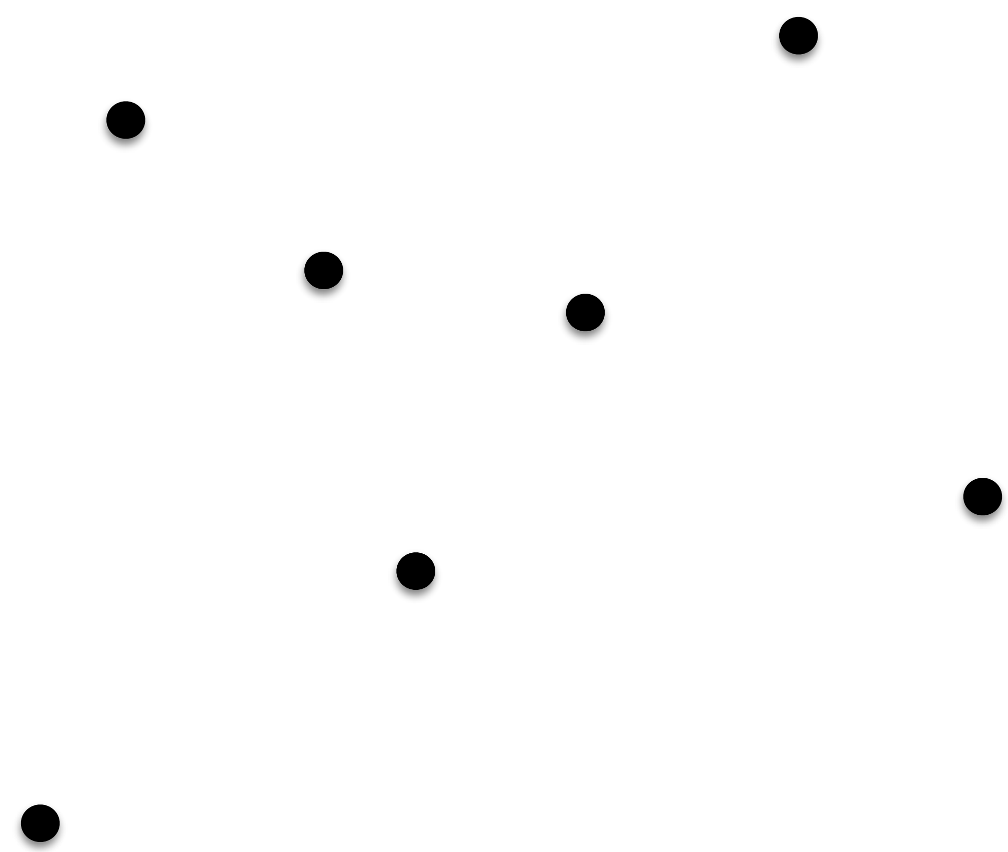
Gegeben: Punkte $x_1, \ldots, x_n$ in R^2



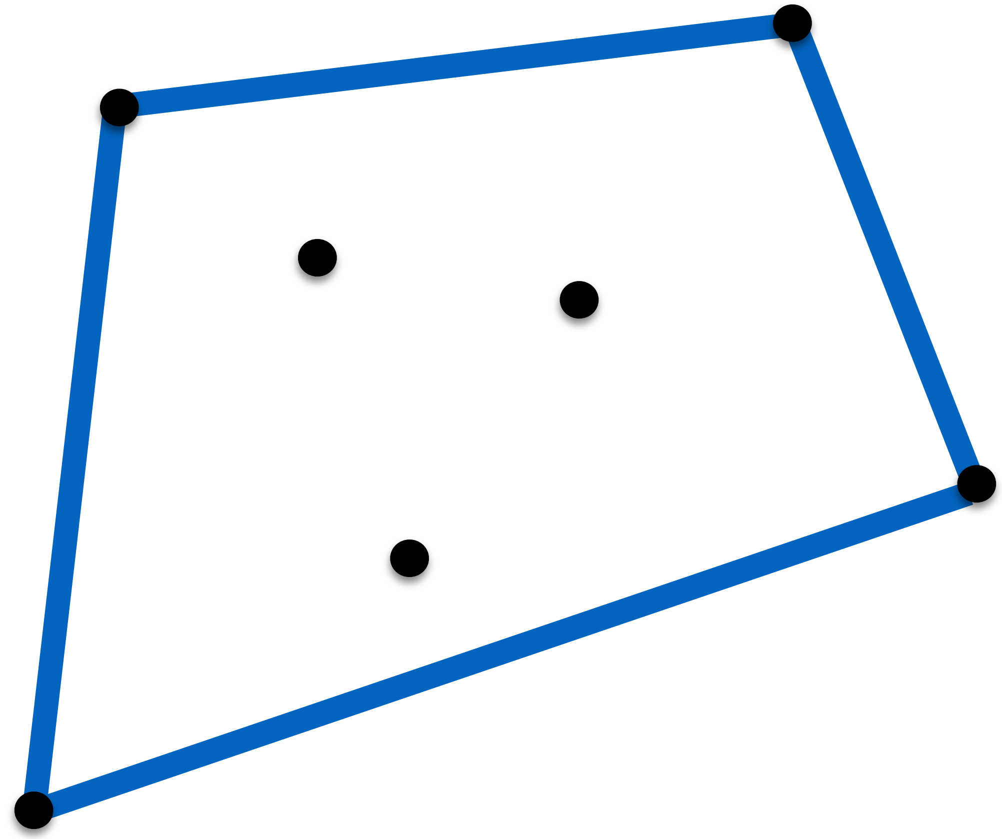
Ziel: **Radius des Kreises: … so klein wie möglich !!**

Konvexe Hülle

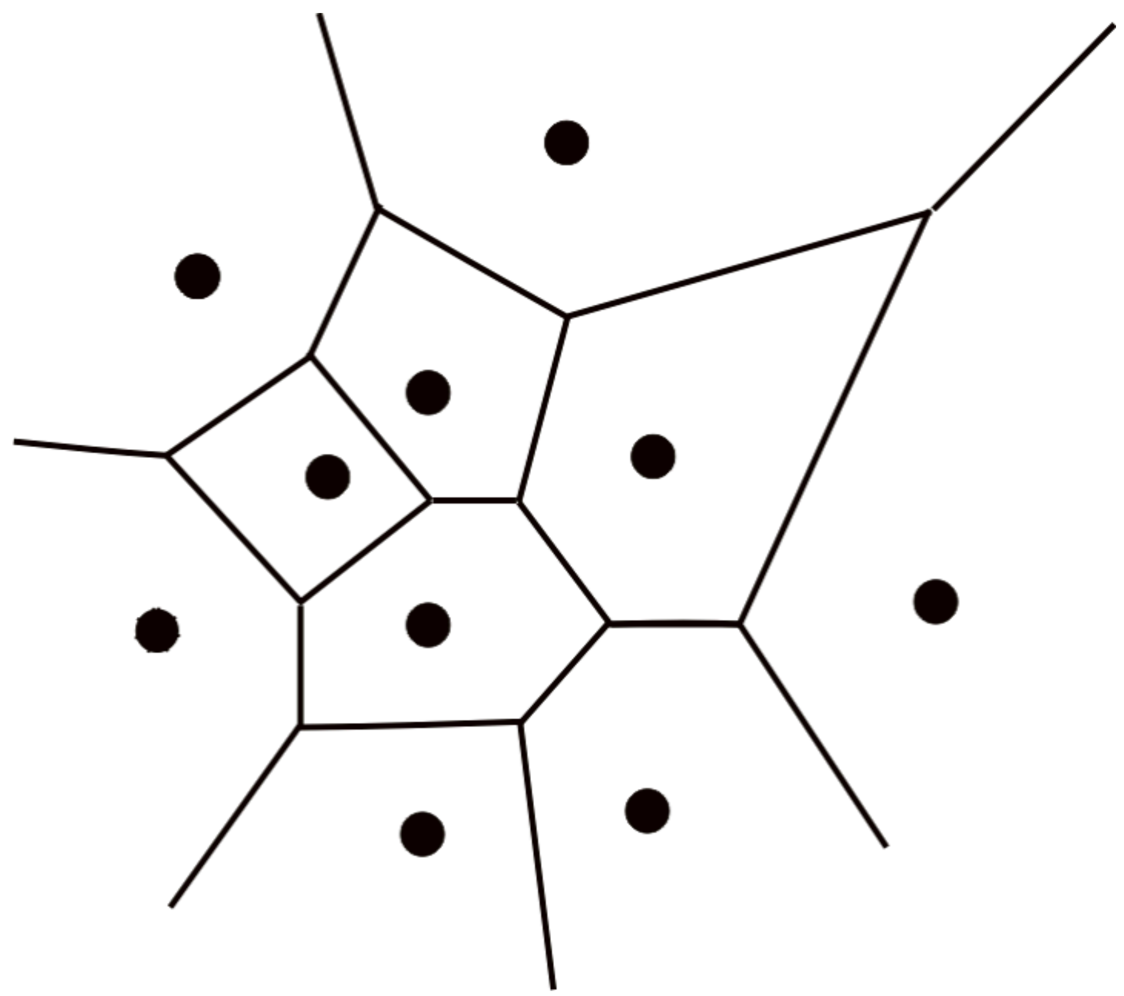
Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^2



Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^2



Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^2

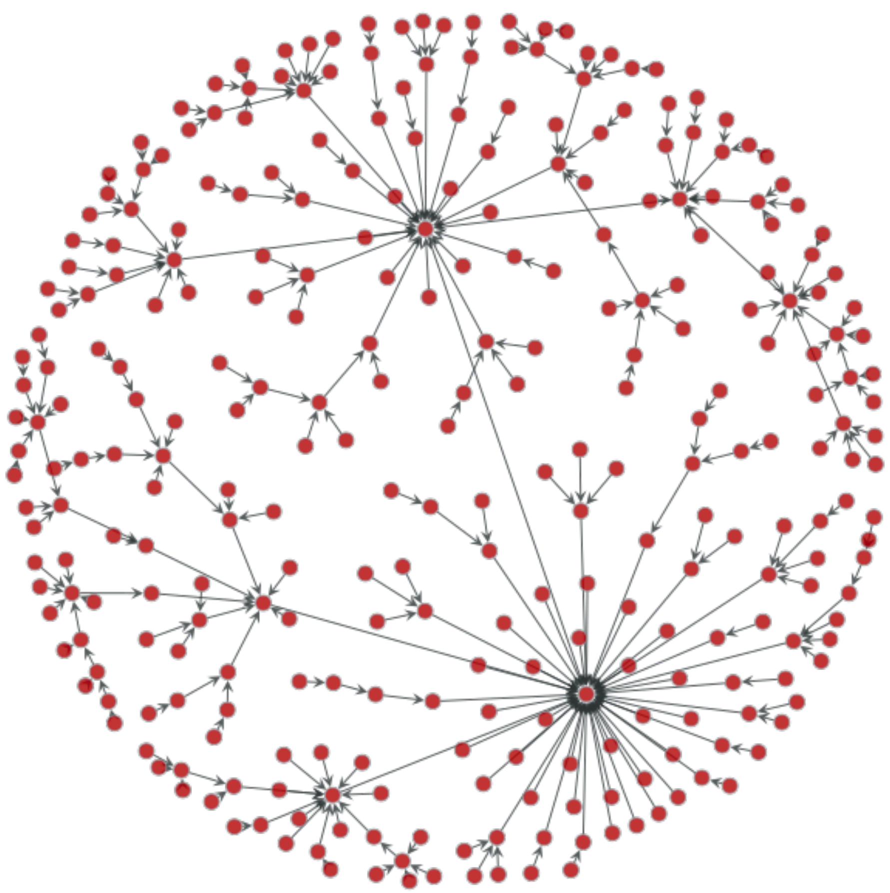


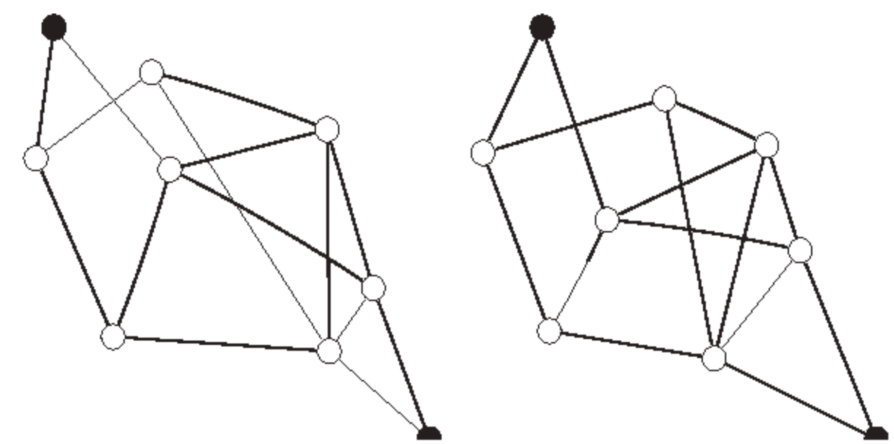
Idee: **Region um x = Punkte näher zu x als zu allen anderen Punkten**

Graph-Zeichnen

Gegeben: Graph G=(V,E)

Gesucht: „schöne“ Darstellung

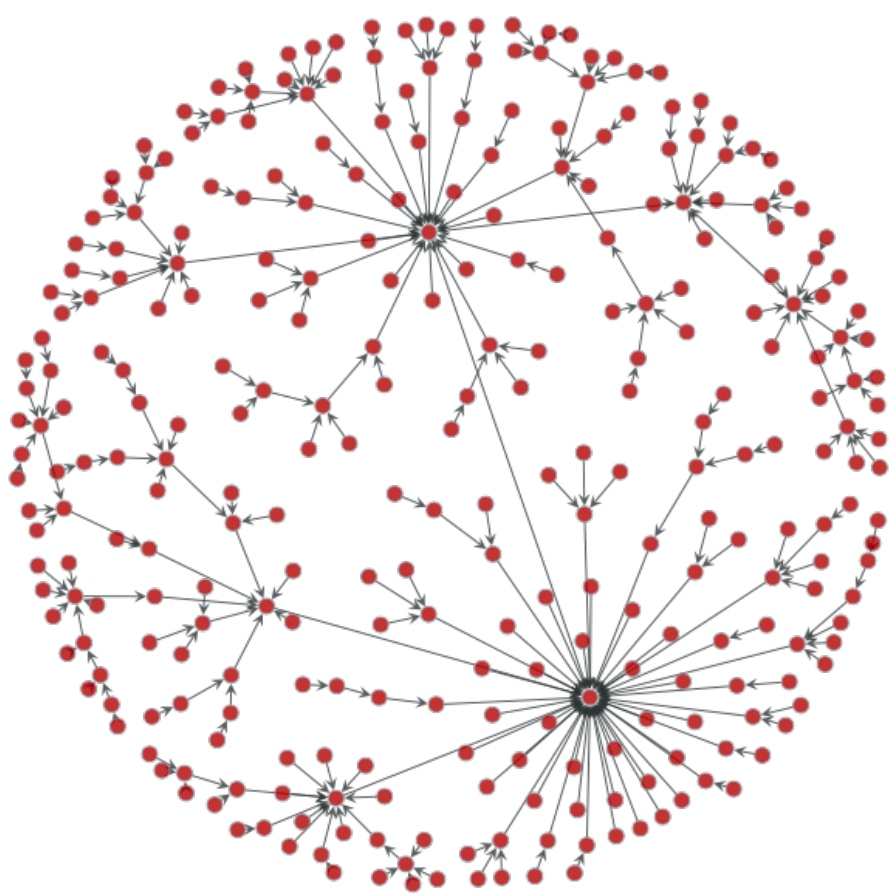


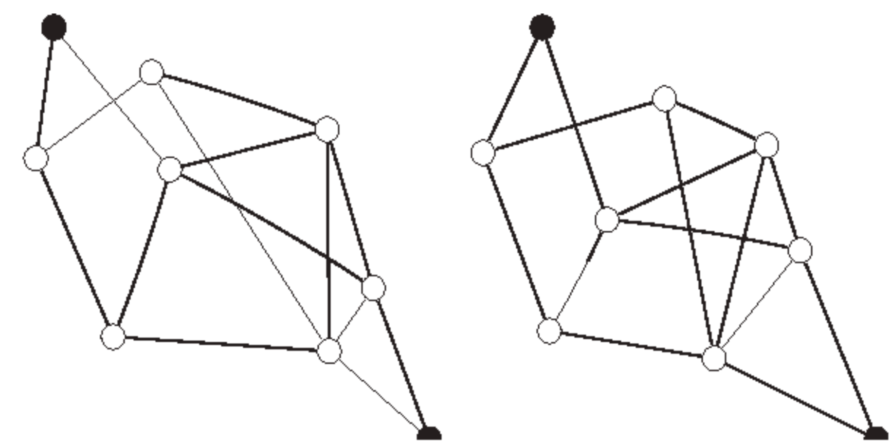


Graph-Zeichnen

Gegeben: Graph G=(V,E)

Gesucht: „schöne“ Darstellung





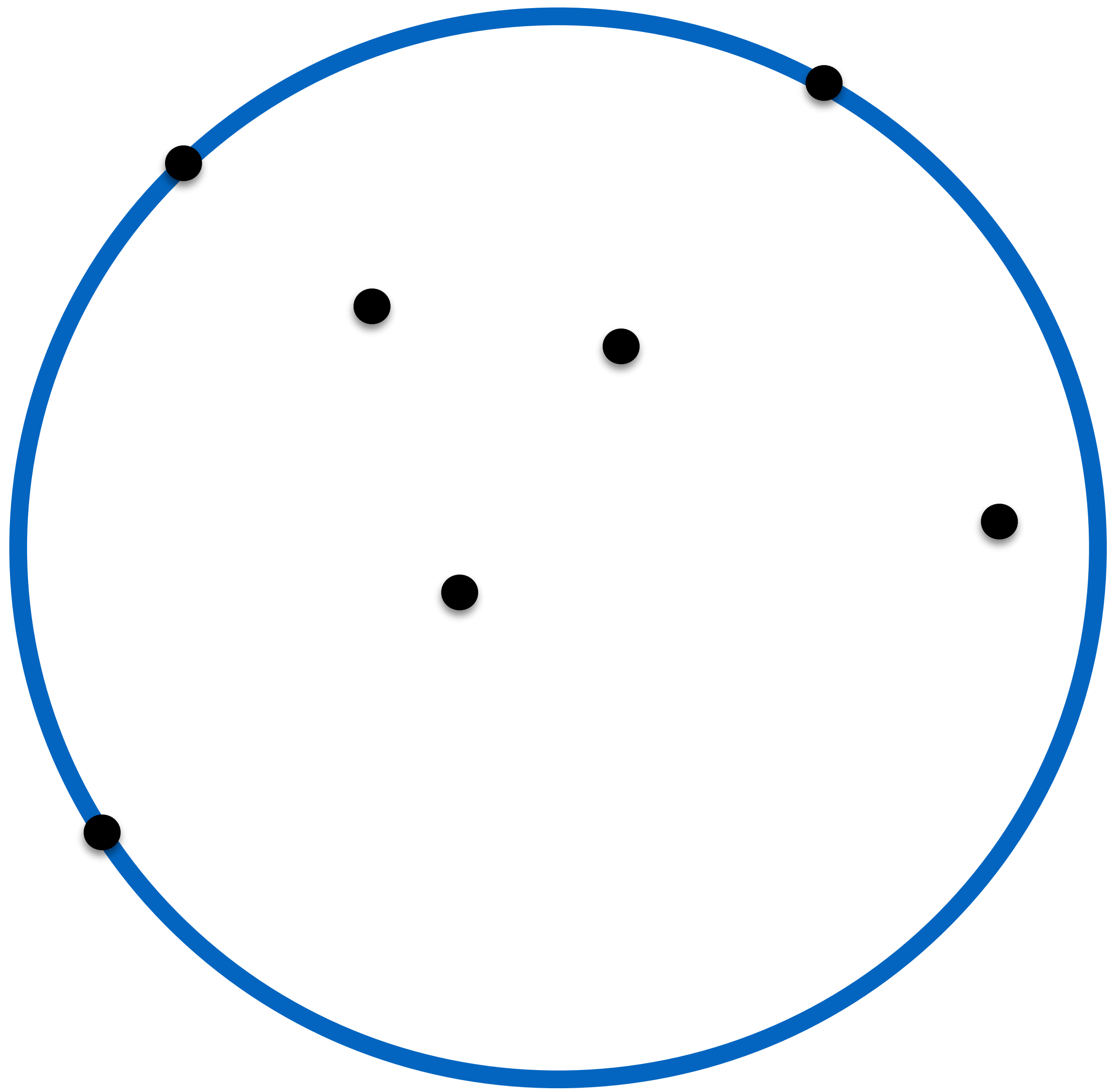
planerer Graph ⇔ es gibt eine kreuzungsfreie Darstellung

Kapitel 3.2.1

Kleinster Umschliessender Kreis

Kleinster Umschliessender Kreis

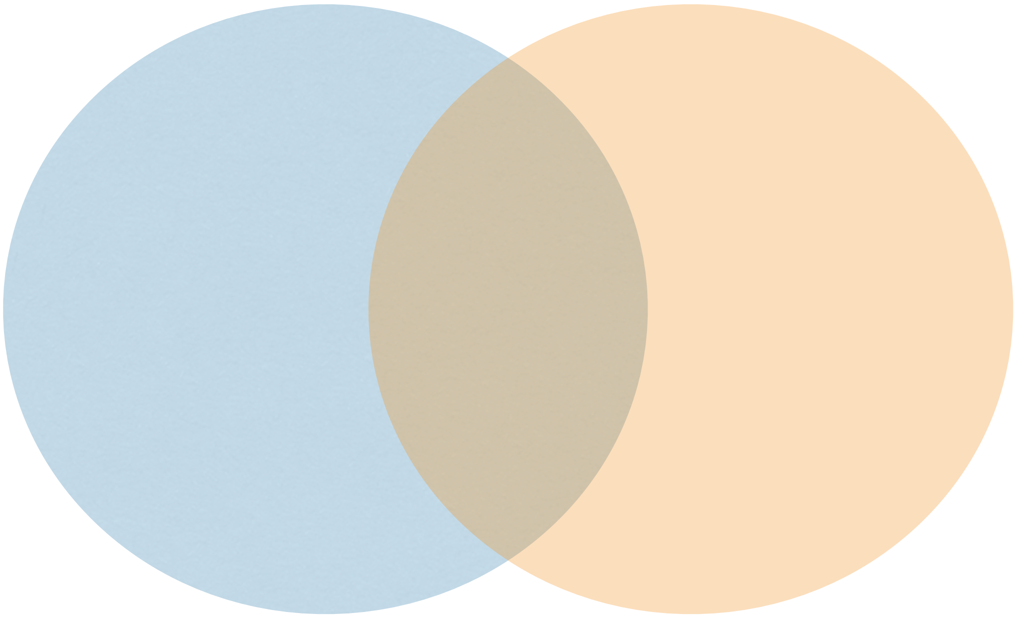
Gegeben: Punkte $x_1,\ldots,x_n$ in R^2



Ziel: **Radius des Kreises: … so klein wie möglich !!**

Lemma: Für jede Punktemenge P gibt es genau einen kleinsten umschliessenden Kreis

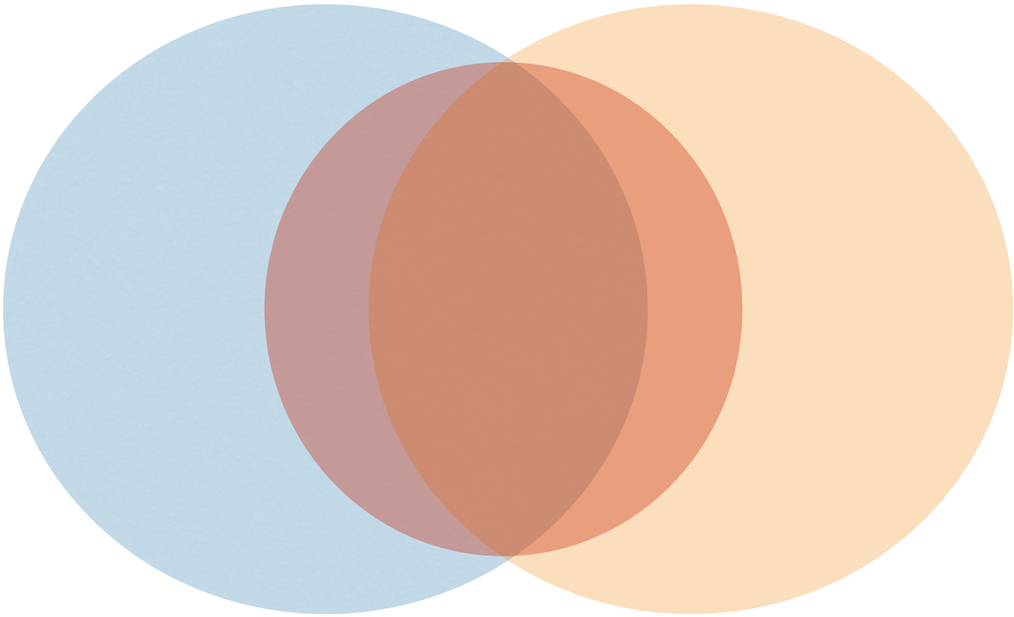
Beweis:



$P \subseteq C_1 \cap C_2$

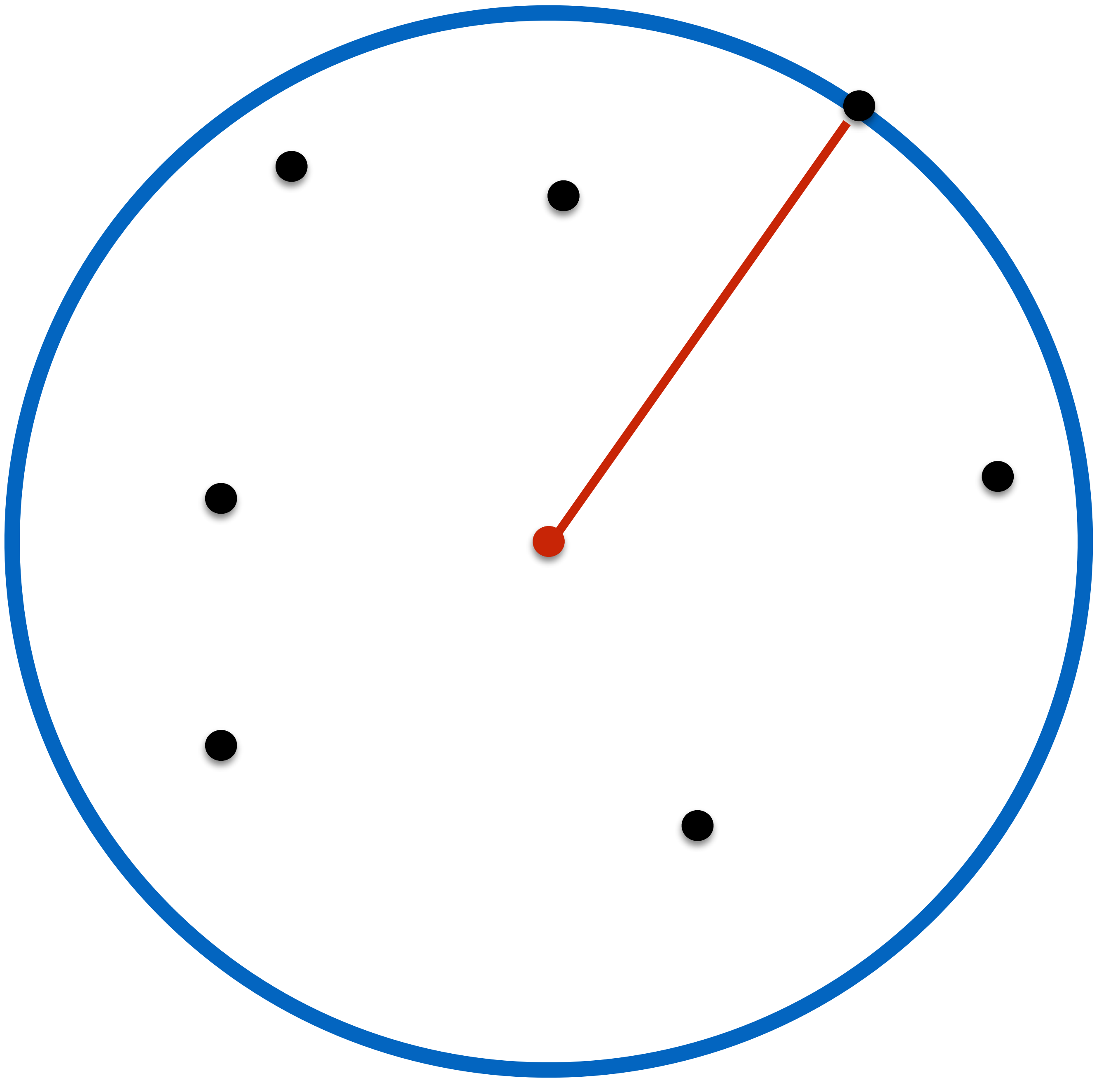
Lemma: Für jede Punktemenge P gibt es genau einen kleinsten umschliessenden Kreis

Beweis:

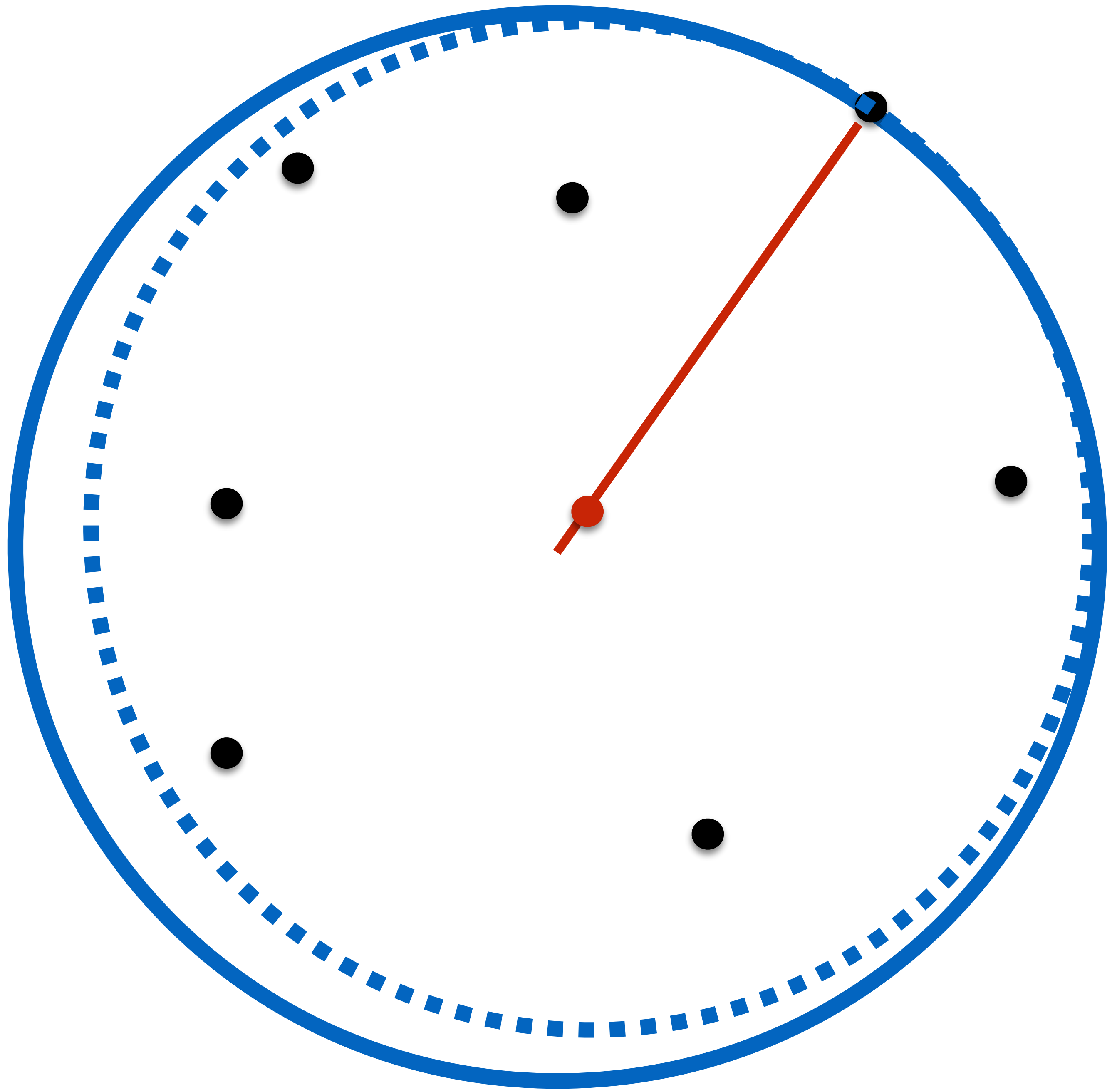


$P \subseteq C_1 \cap C_2$

(1) Der Rand von C(P) enthält mindestens zwei Punkte von P



(1) Der Rand von C(P) enthält mindestens zwei Punkte von P

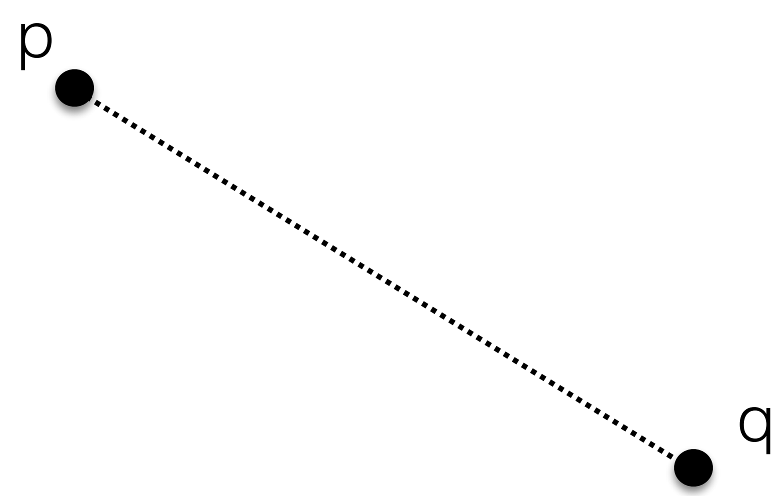


Eigenschaften

(2) Wenn der Rand von C(P) nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt $C(P) = C(\{p,q\})$.

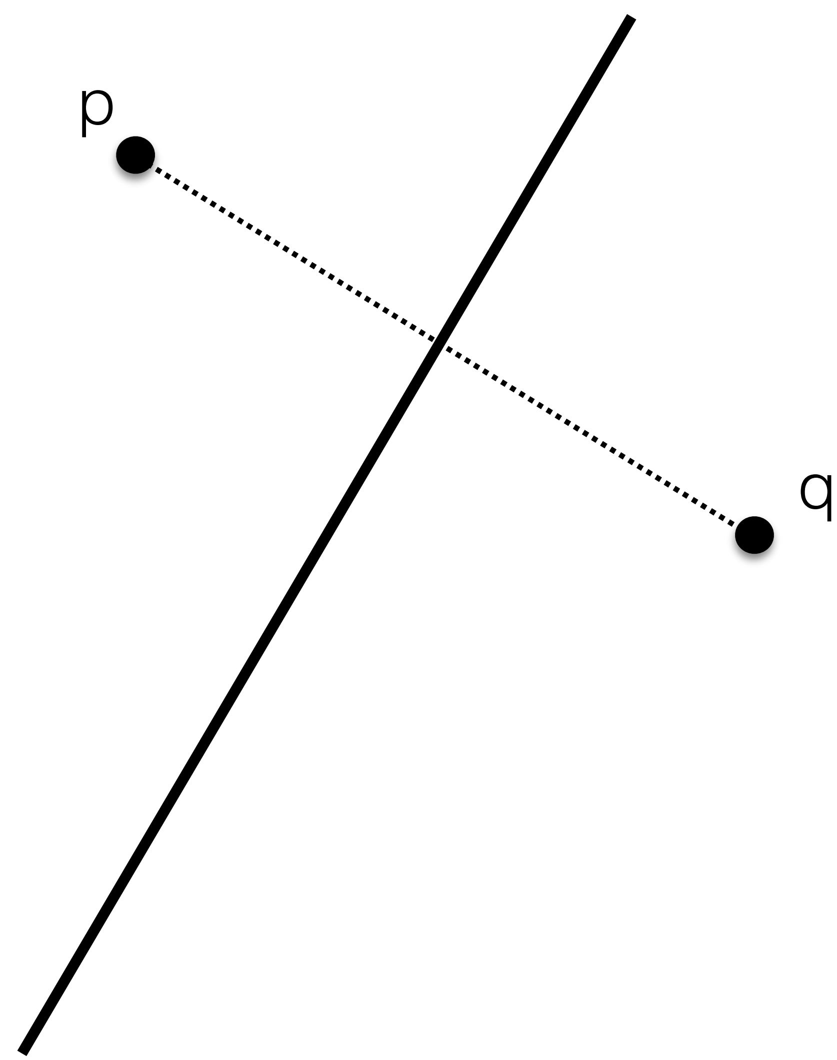
Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

(2) Wenn der Rand von C(P) nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt $C(P) = C(\{p,q\})$.



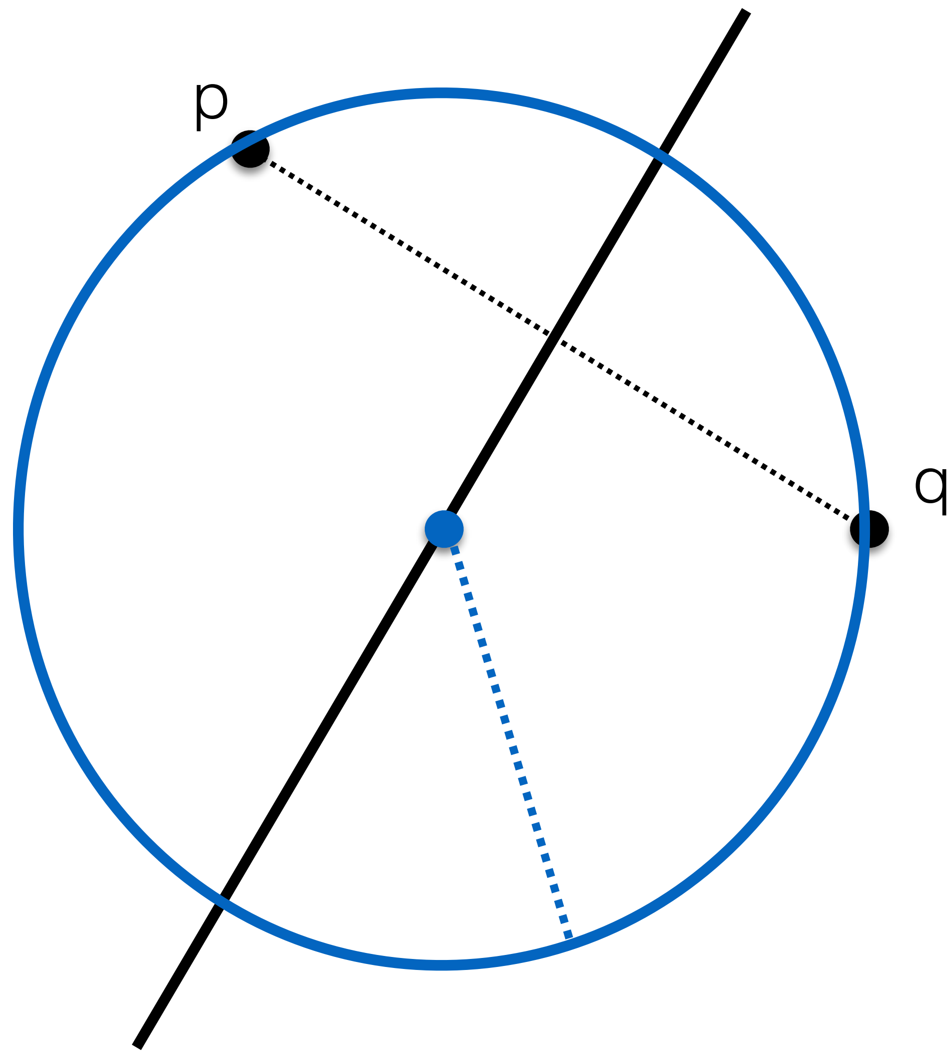
Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

(2) Wenn der Rand von $C(P)$ nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt $C(P) = C(\{p,q\})$.



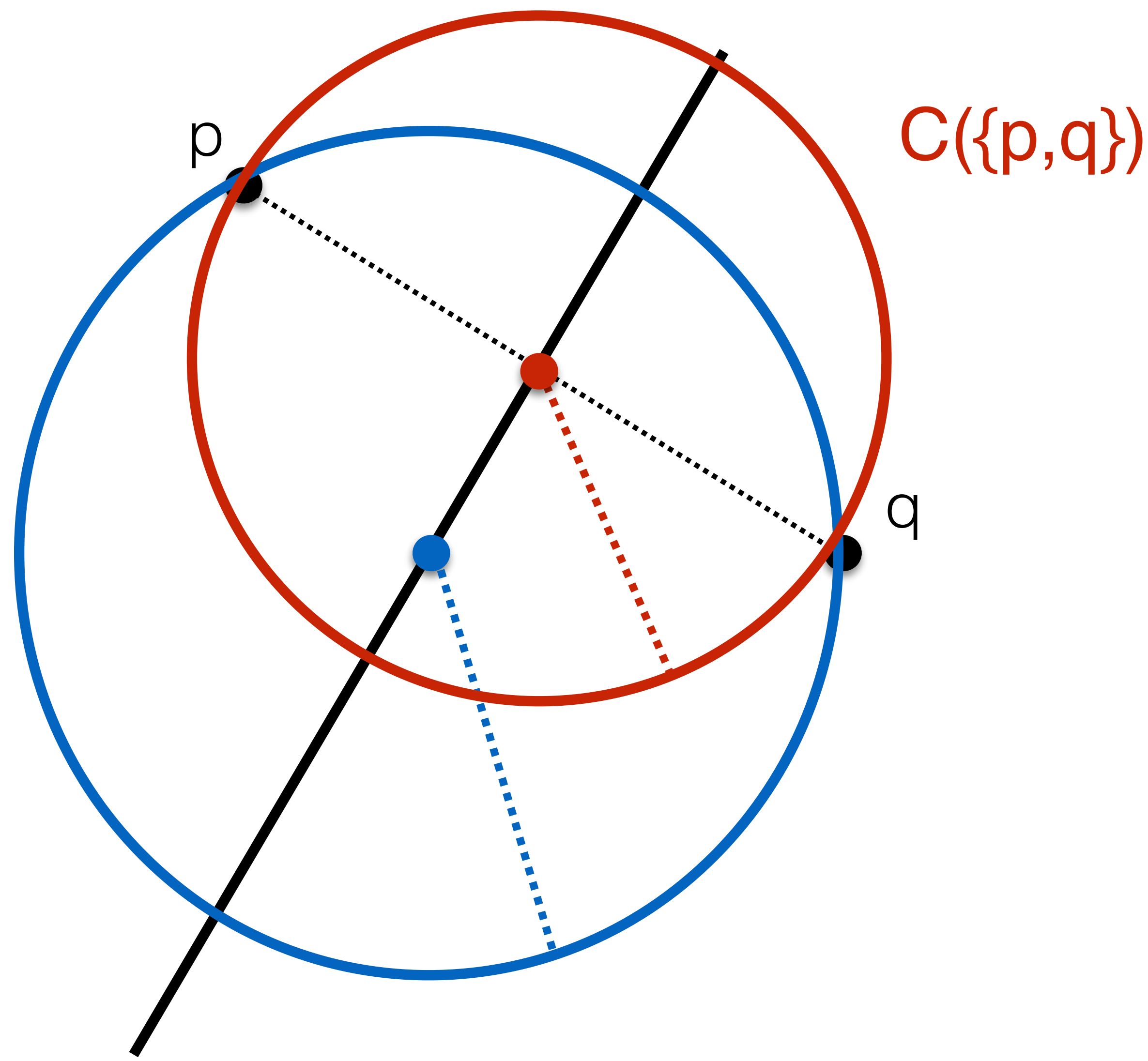
Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

(2) Wenn der Rand von C(P) nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt $C(P) = C(\{p,q\})$.



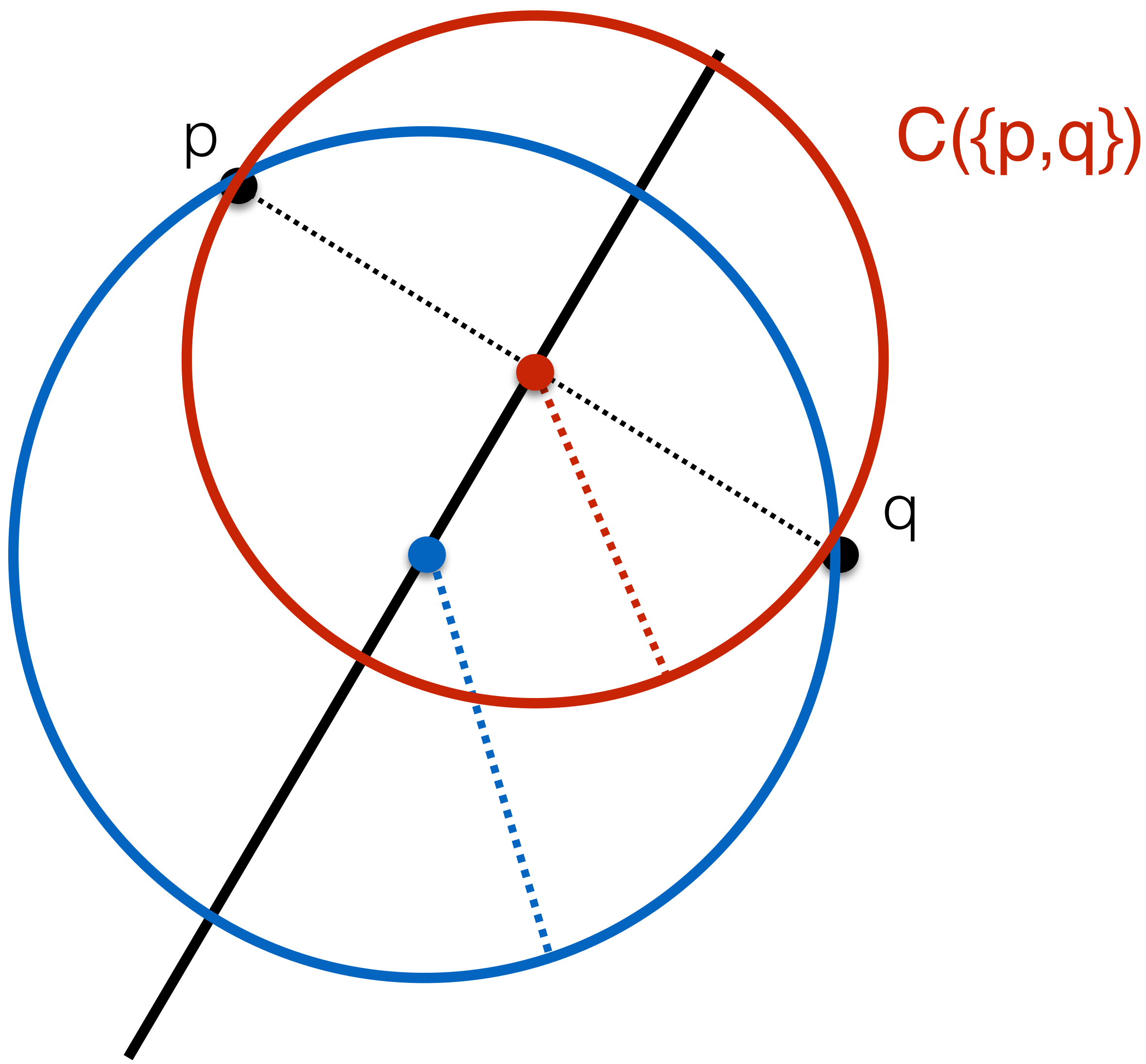
Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

(2) Wenn der Rand von C(P) nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt C(P) = C({p,q}).



Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

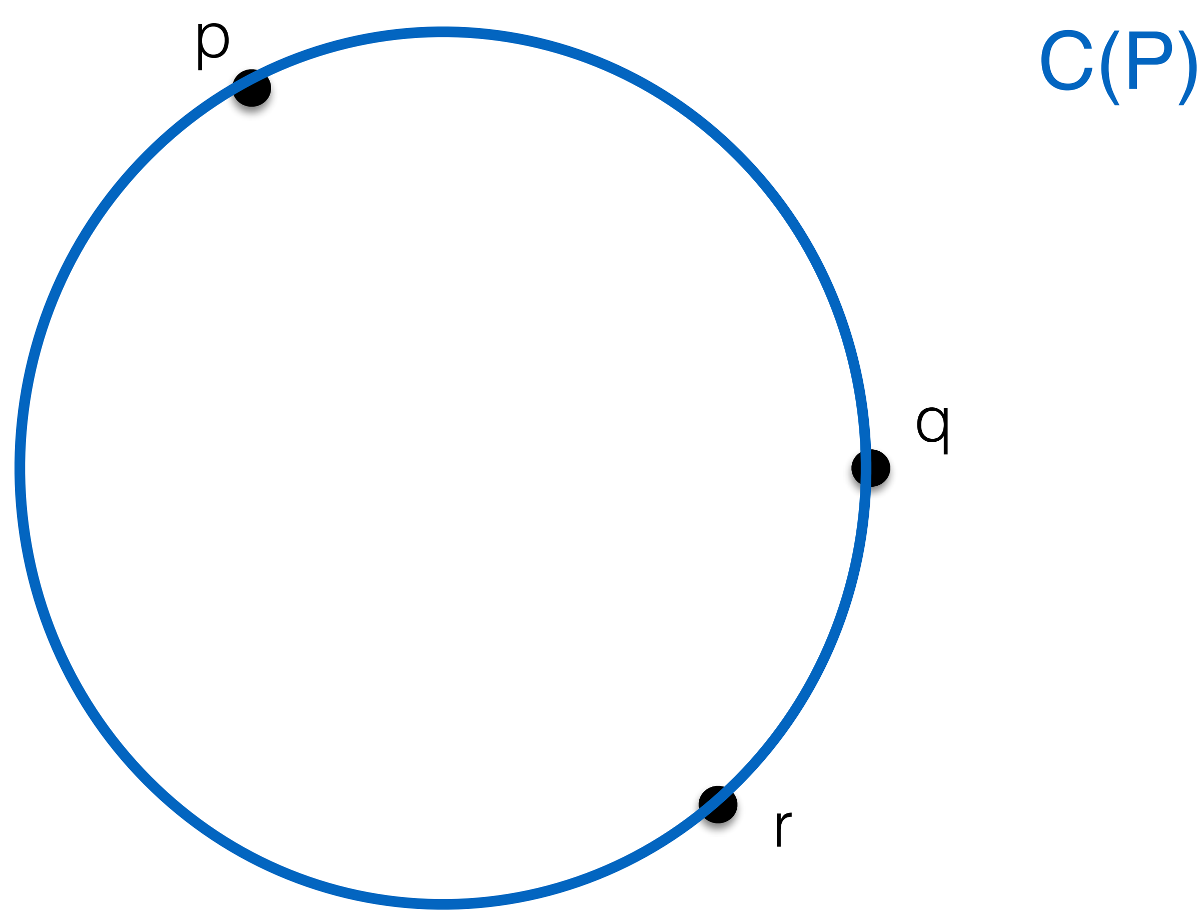
(2) Wenn der Rand von C(P) nur genau zwei Punkte von P enthält, sagen wir p und q, so gilt C(P) = C({p,q}).



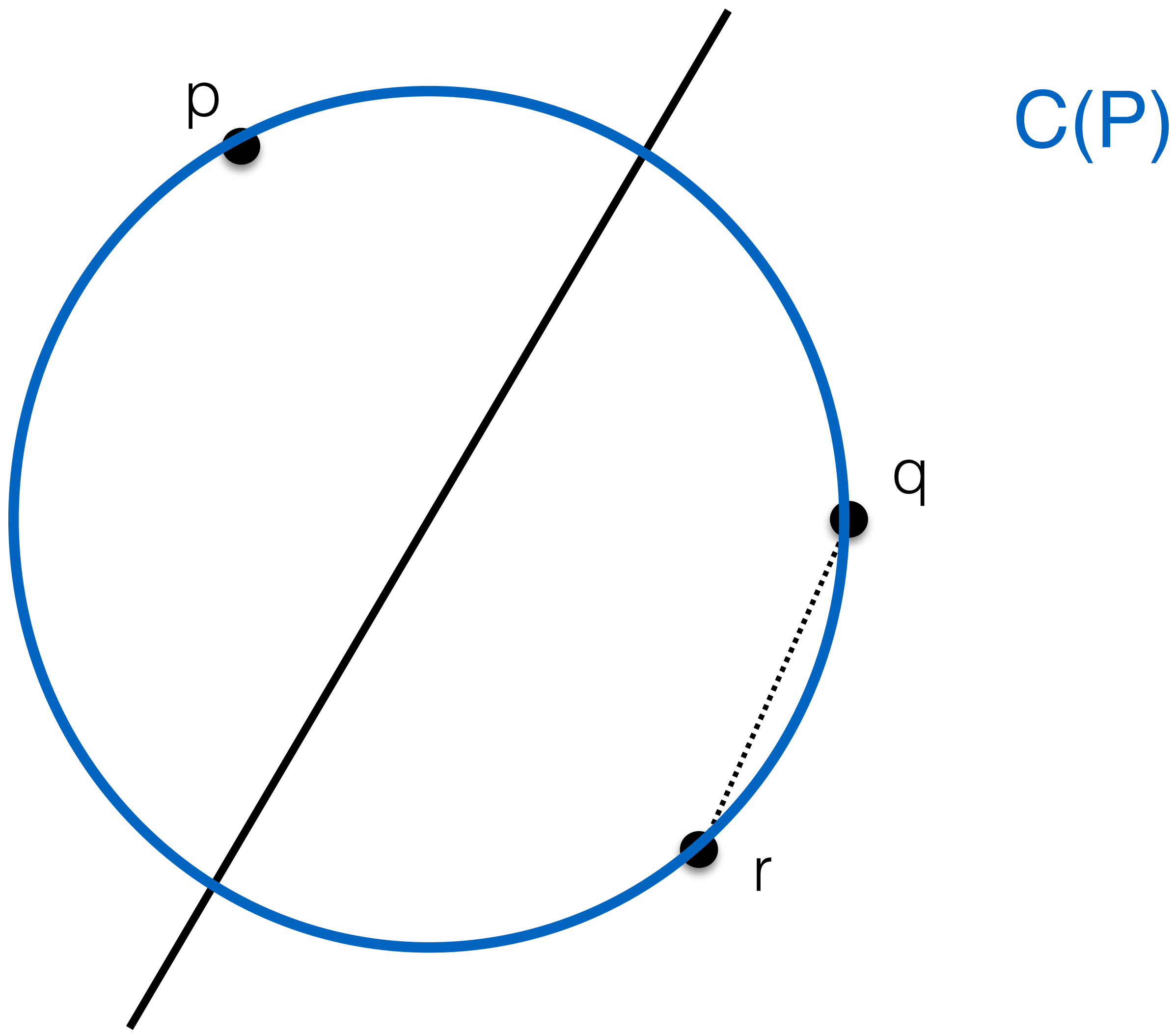
Alle Kreise durch p und q haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch p und q.

Solange es keinen zusätzlichen Punkt auf dem Rand des blauen Kreises gibt, können wir ihn in Richtung roten Kreis schieben - und dabei verkleinern.

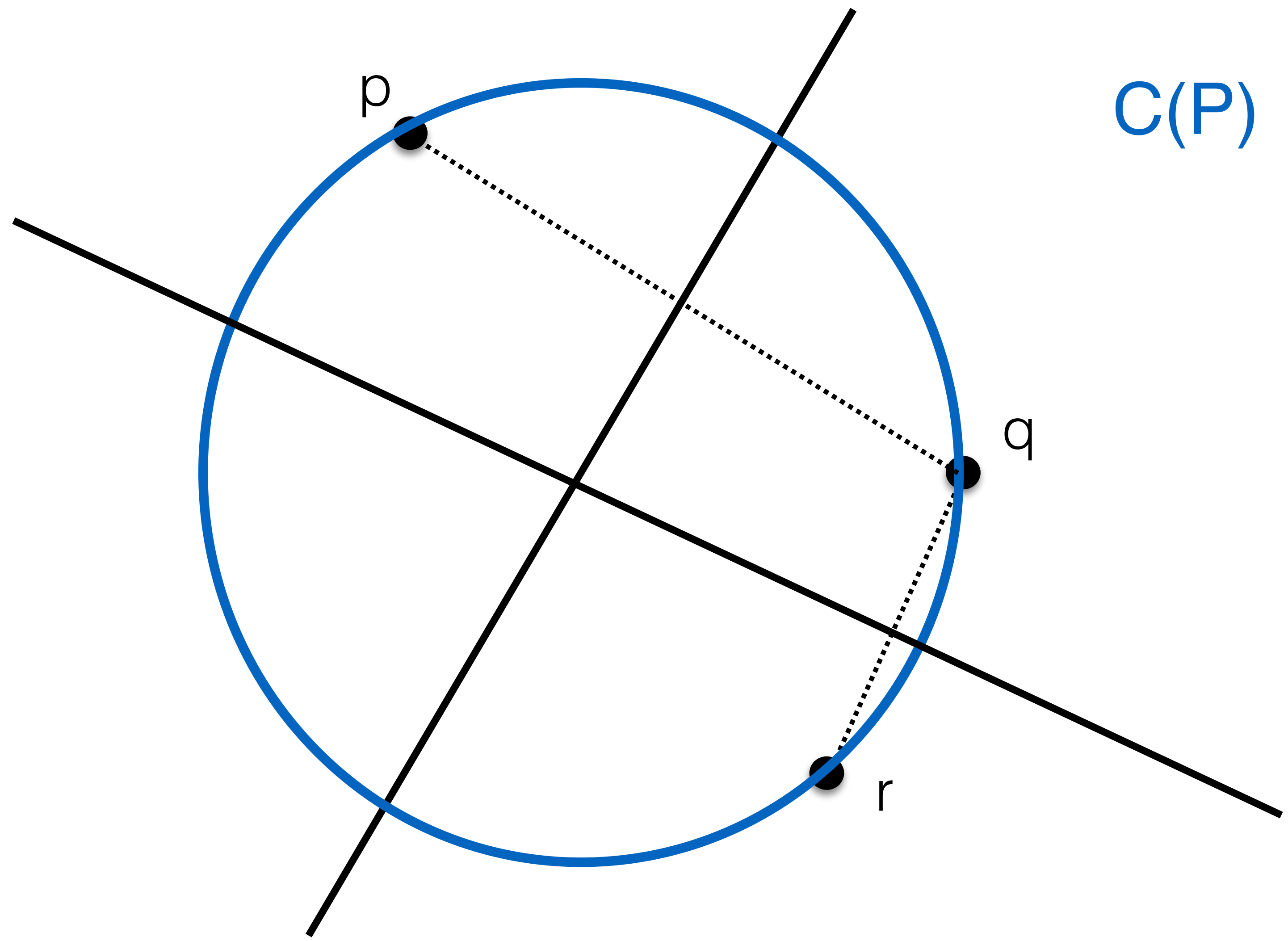
(3) Enthält der Rand von $C(P)$ mindestens drei Punkte von P, so gilt für beliebige drei dieser Punkte p,q,r: $C(P) = C(\{p,q,r\})$.



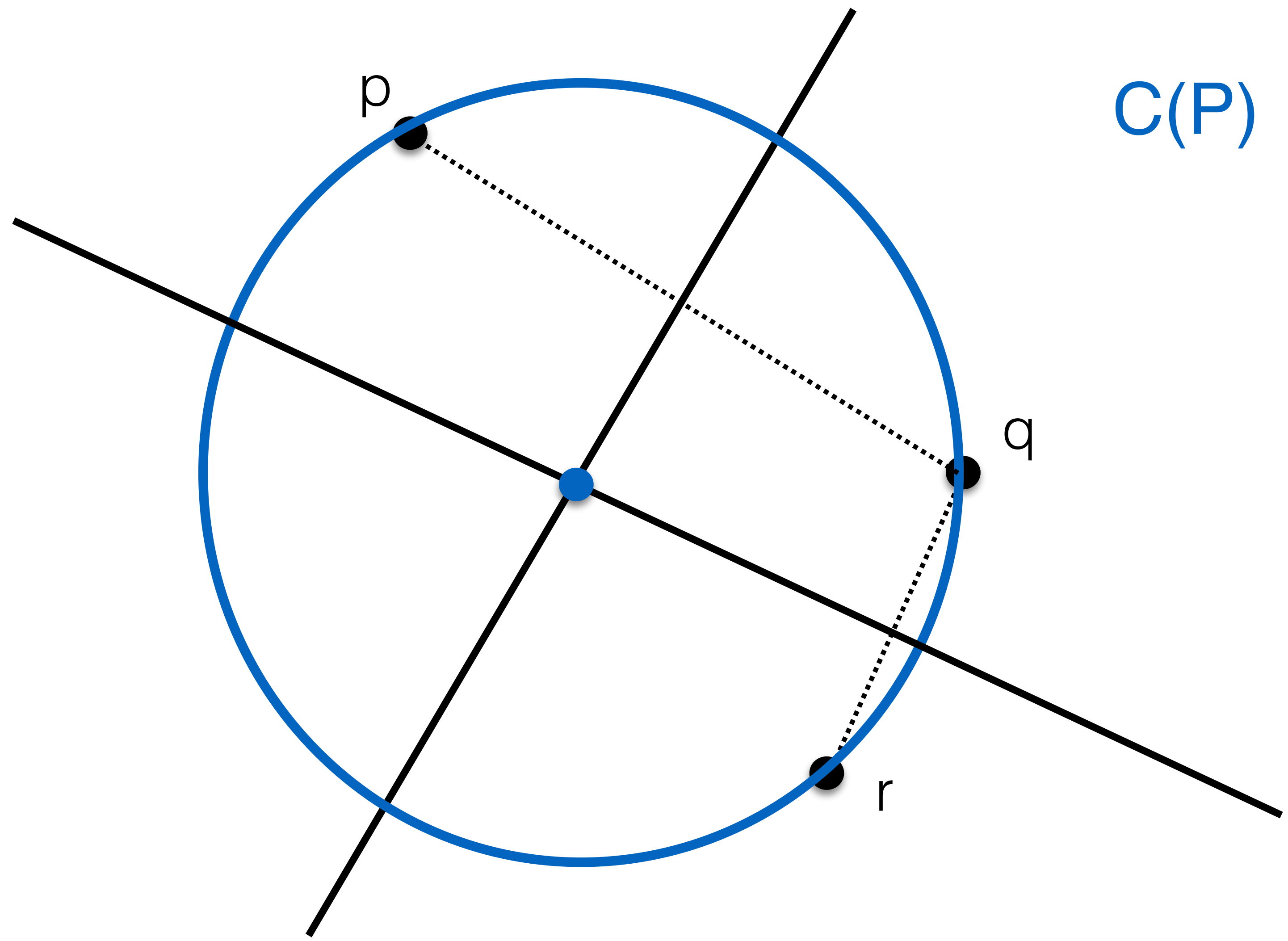
(3) Enthält der Rand von C(P) mindestens drei Punkte von P, so gilt für beliebige drei dieser Punkte p,q,r: $C(P) = C(\{p,q,r\})$.



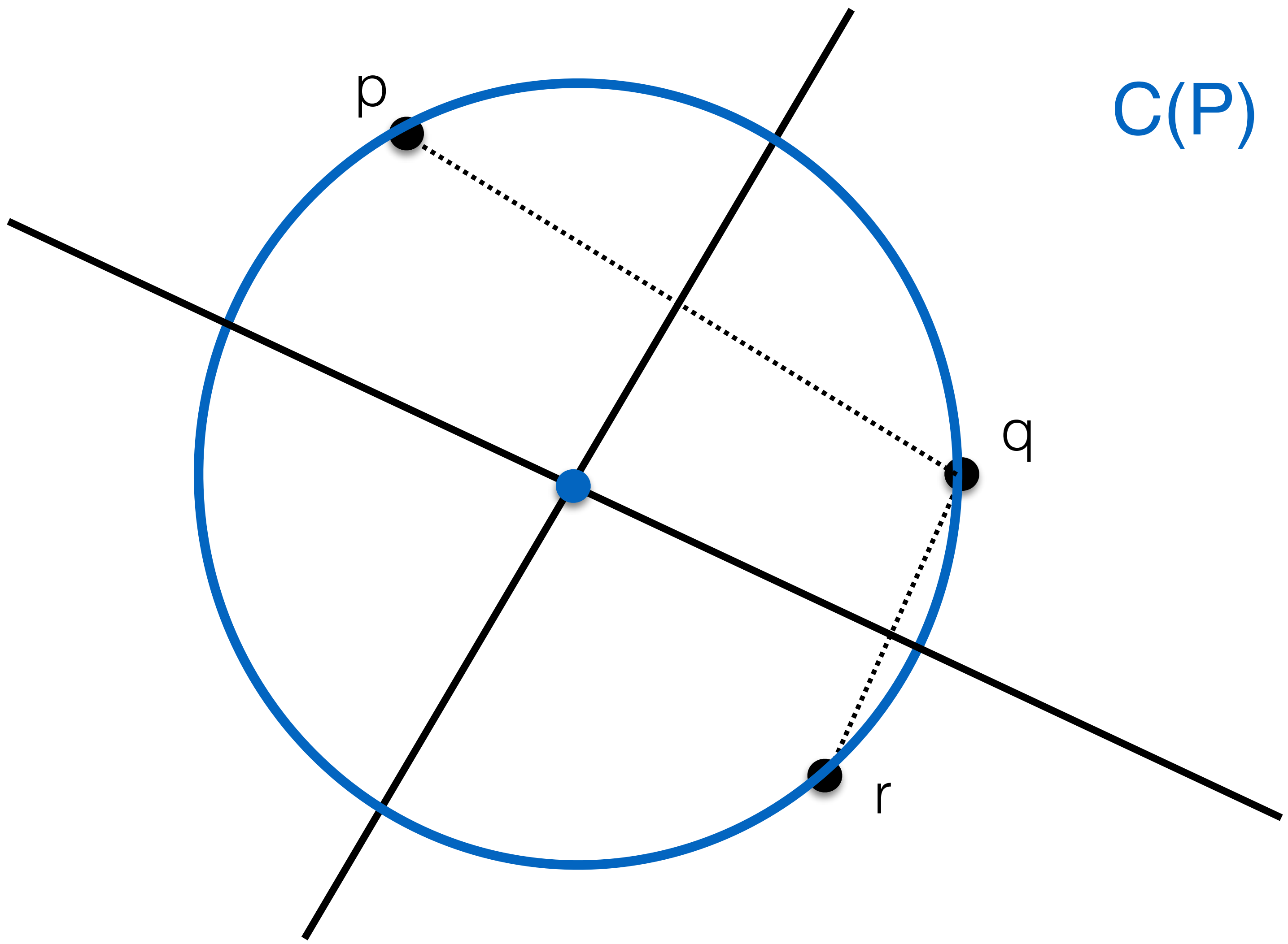
(3) Enthält der Rand von $C(P)$ mindestens drei Punkte von P, so gilt für beliebige drei dieser Punkte p,q,r: $C(P) = C(\{p,q,r\})$.



(3) Enthält der Rand von C(P) mindestens drei Punkte von P, so gilt für beliebige drei dieser Punkte p,q,r: $C(P) = C(\{p,q,r\})$.

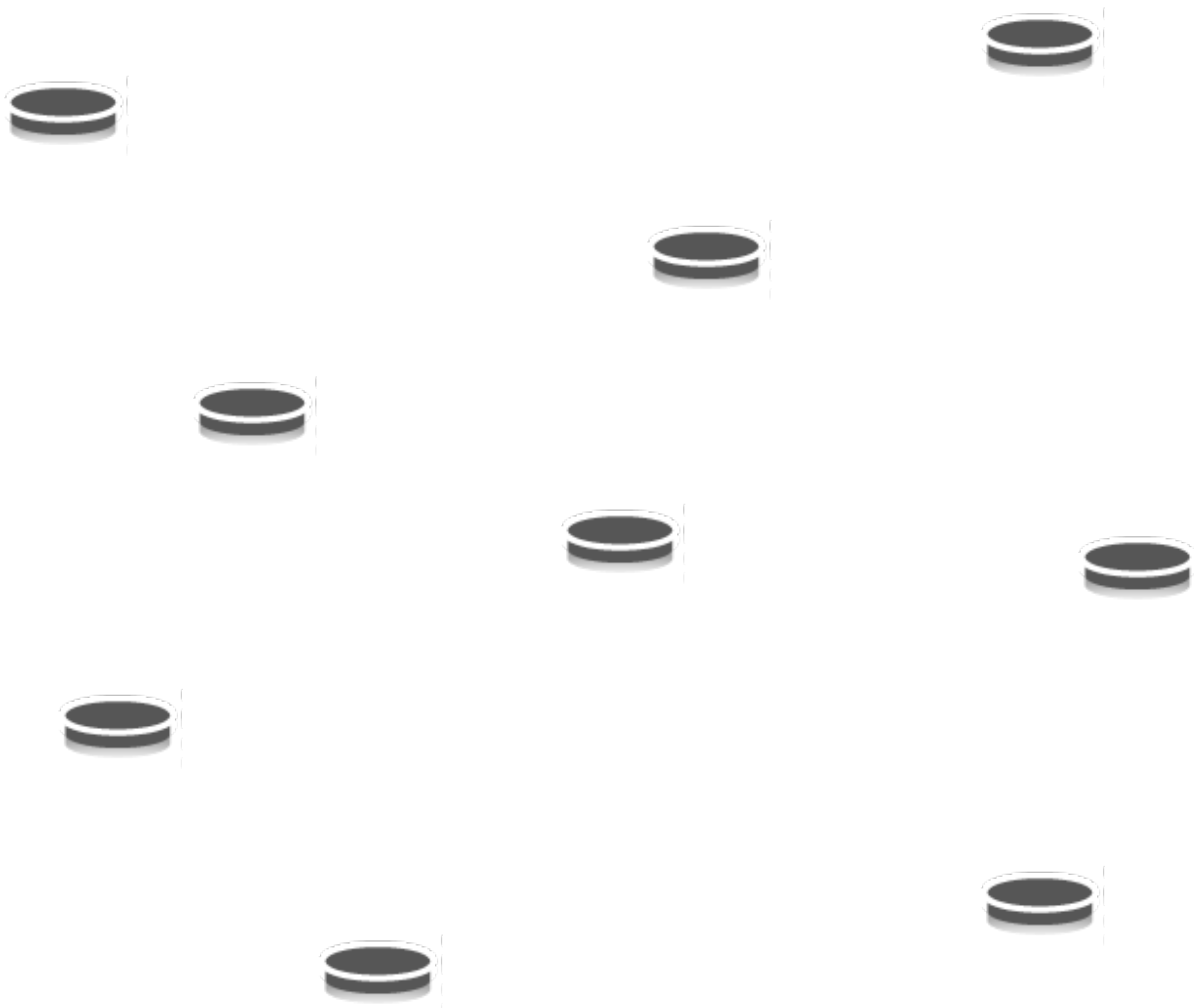


(3) Enthält der Rand von $C(P)$ mindestens drei Punkte von P, so gilt für beliebige drei dieser Punkte p,q,r: $C(P) = C(\{p,q,r\})$.

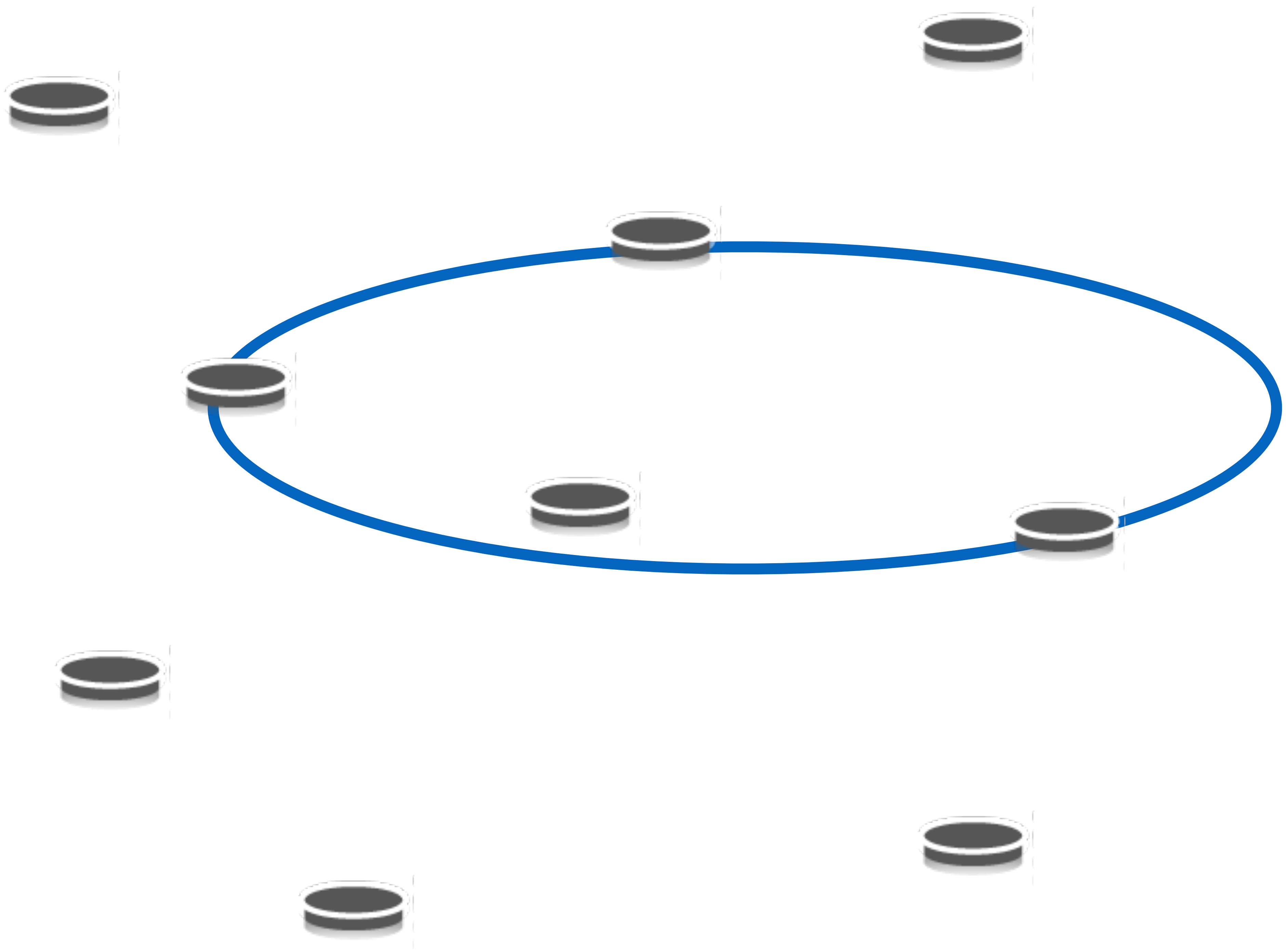


$\Longrightarrow$ es gibt nur einen Kreis, dessen Rand p,q und r enthält

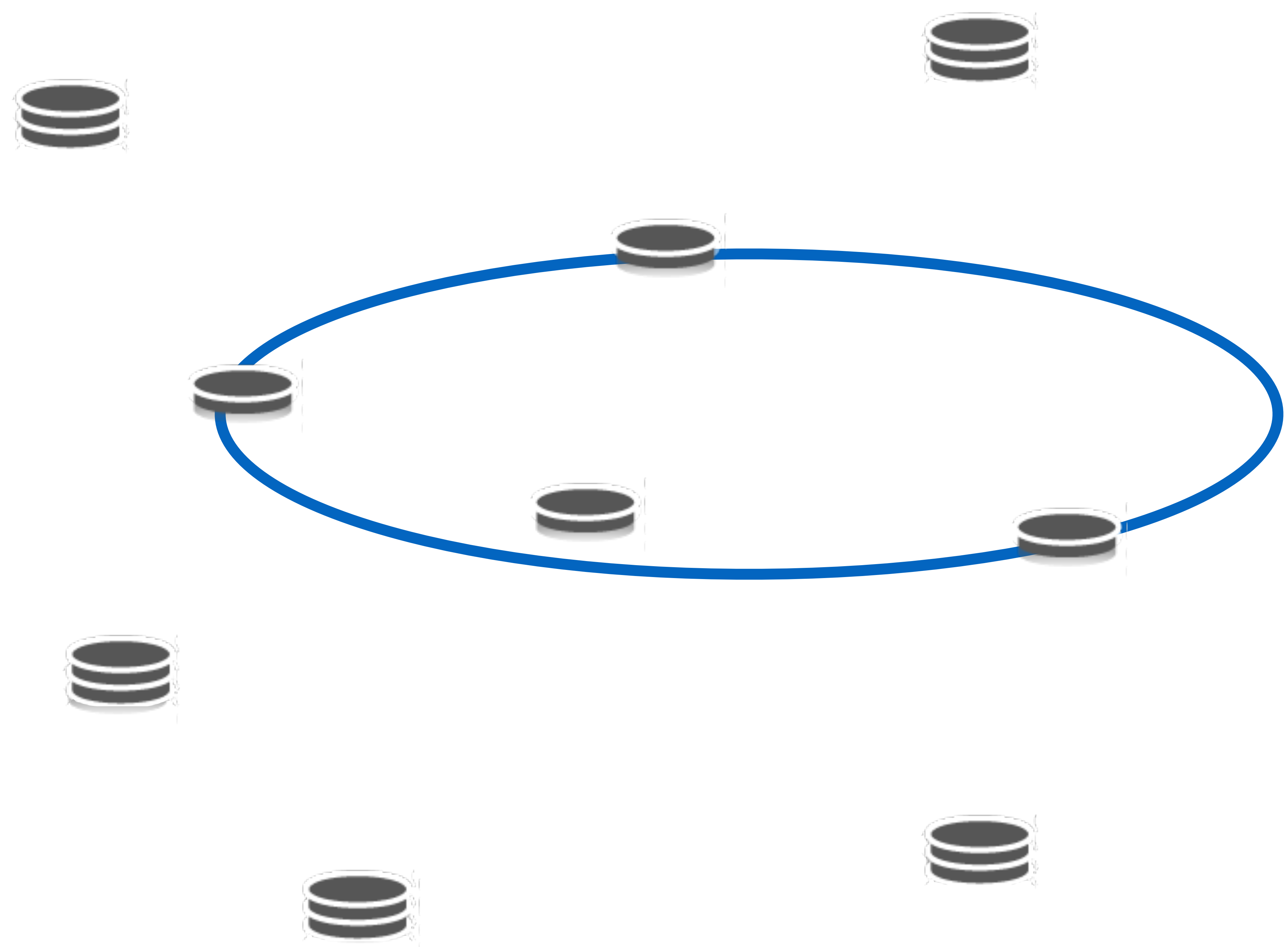
Kleinster Umschliessender Kreis



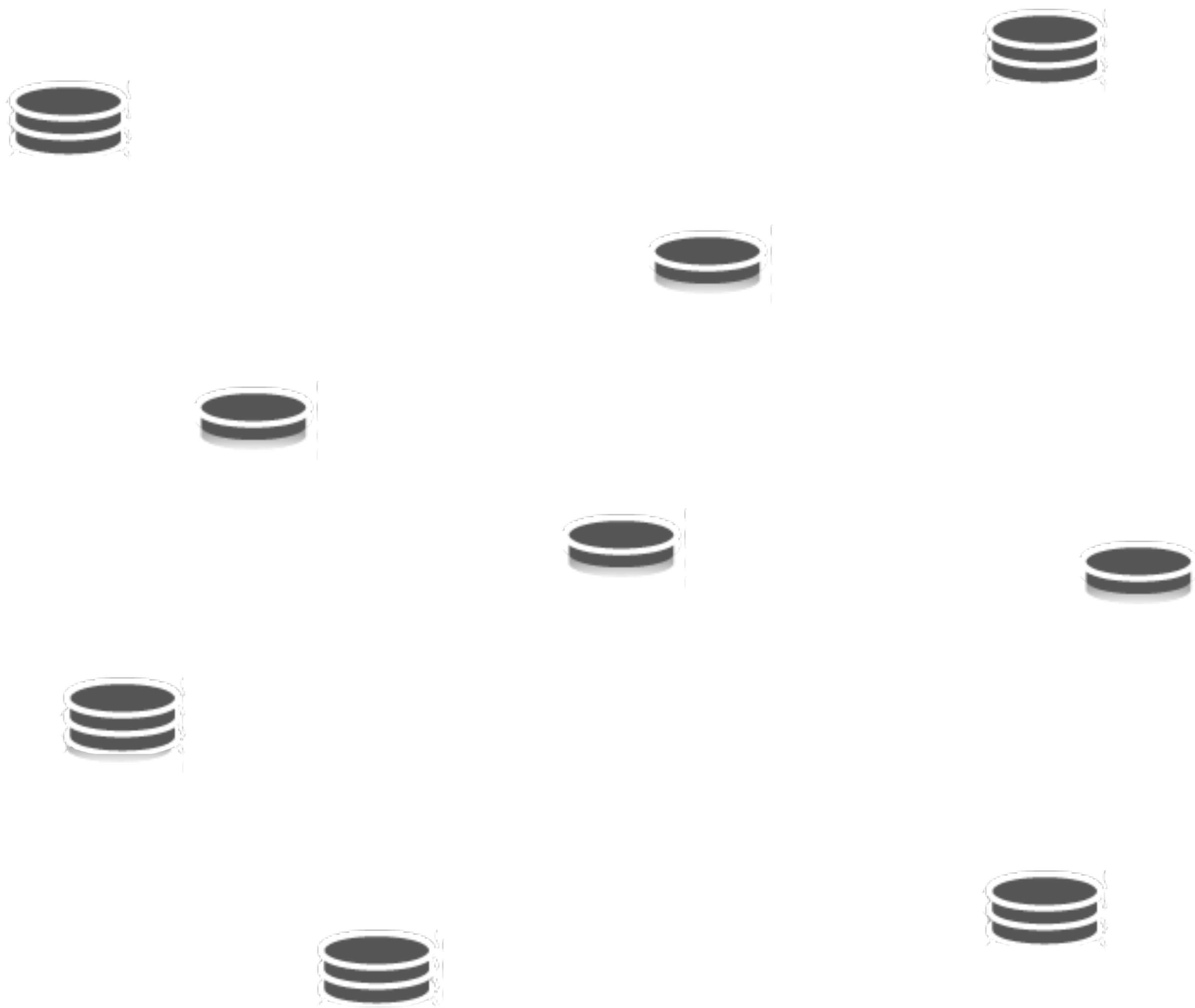
Kleinster Umschliessender Kreis



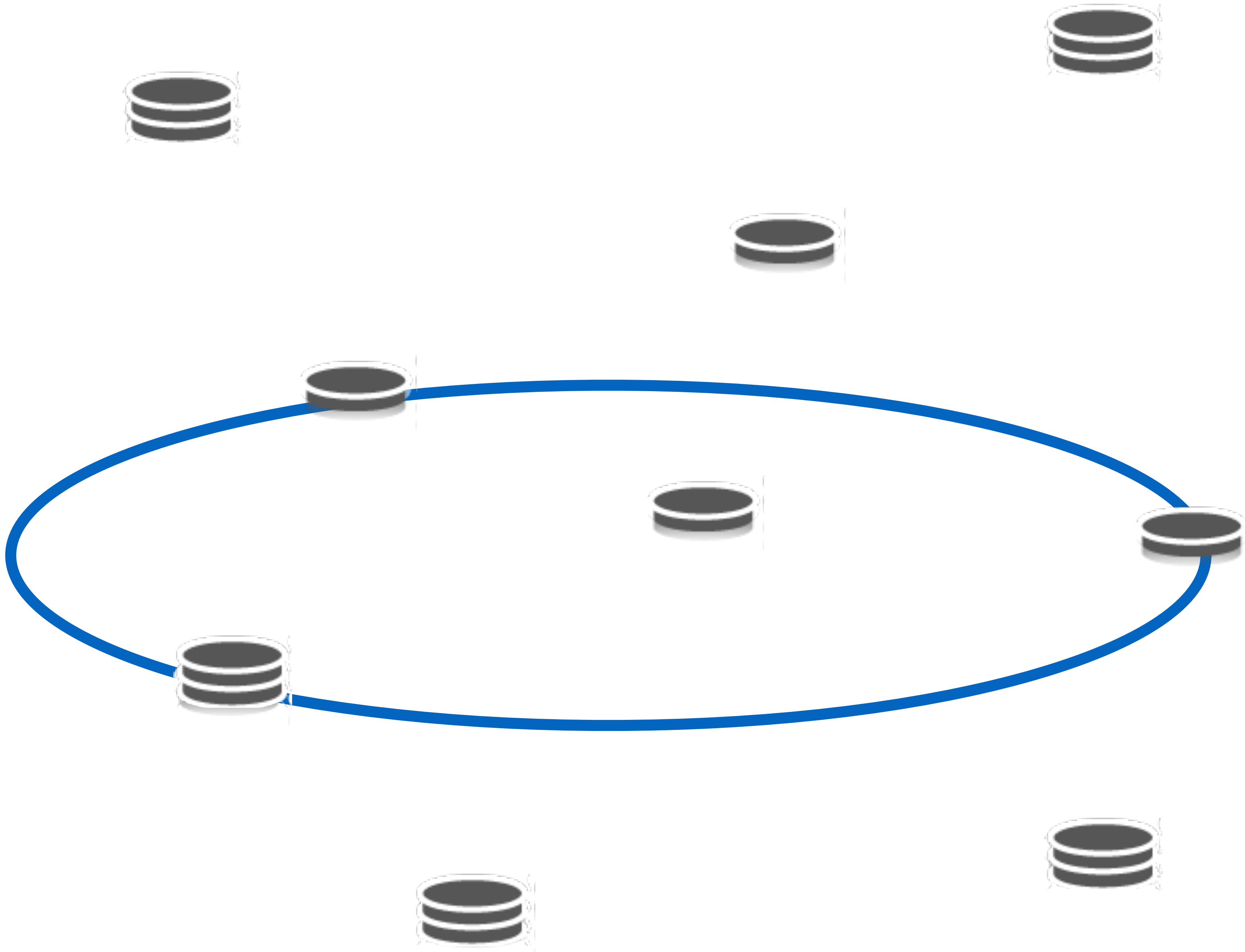
Kleinster Umschliessender Kreis



Kleinster Umschliessender Kreis



Kleinster Umschliessender Kreis



Kleinster Umschliessender Kreis