Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Angelika Steger

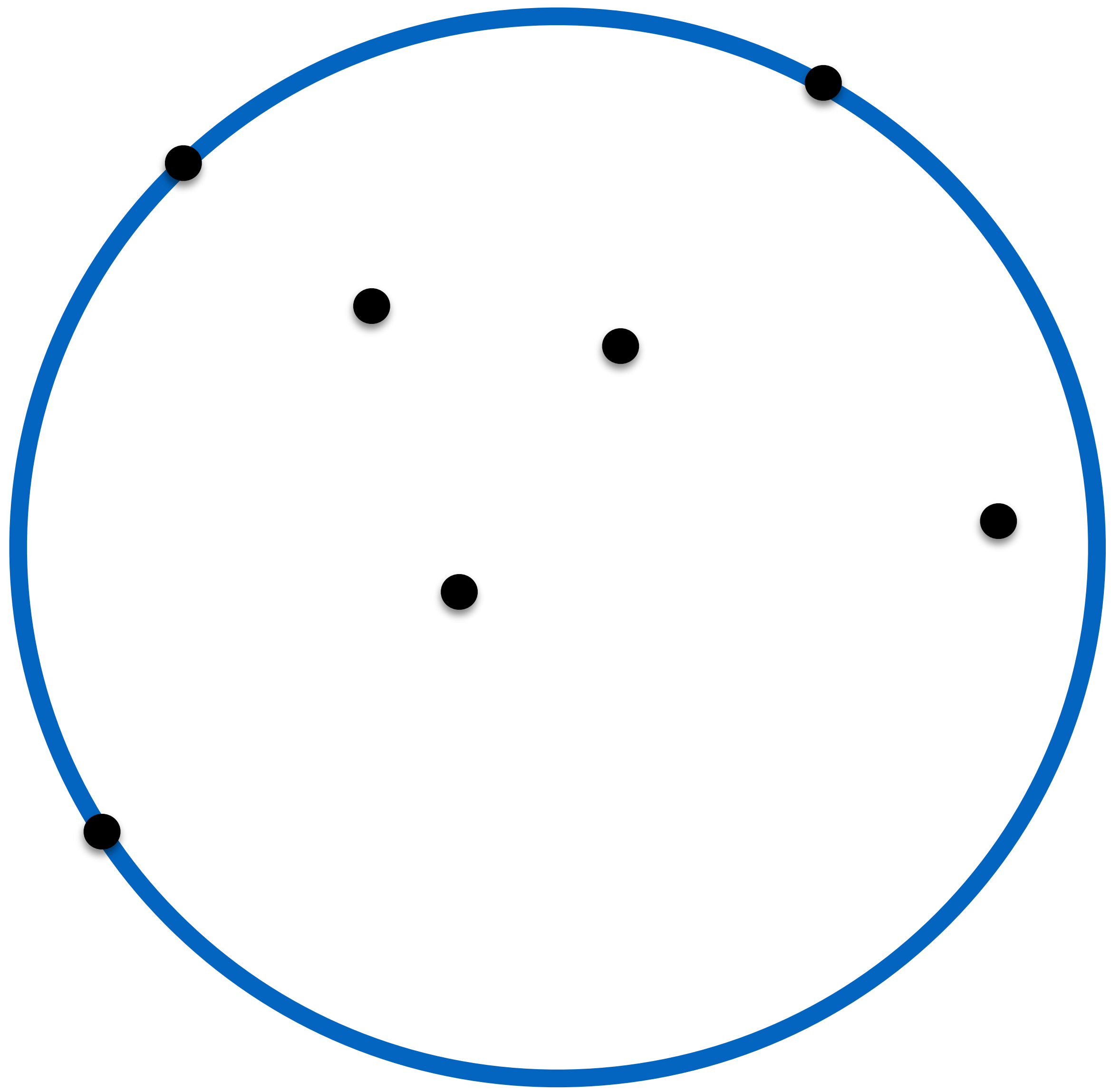
Institut für Theoretische Informatik

Kapitel 3.2.1

Kleinster Umschliessender Kreis

Kleinster Umschliessender Kreis

Gegeben: Punkte $x_1, \ldots, x_n$ in R^2



Ziel: **Radius des Kreises: … so klein wie möglich !!**

Kleinster Umschliessender Kreis - Eigenschaften:

- eindeutig bestimmt
- durch (höchstens) 3 Punkten definiert

Naiver Algorithmus:

```
COMPLETEENUMERATION(𝒫)
1: for all Q ⊆ P mit |Q| = 3 do
2:     bestimme C(Q)
3:     if 𝒫 ⊆ C(Q) then
4:         return C(Q)
```

Laufzeit:

n^3

x

n

Ziel: Algorithmus mit Laufzeit **O(n log n)**

Kleinster Umschliessender Kreis

$\textsc{Randomised\_PrimitiveVersion}(P)$

```
repeat forever
    wähle Q ⊆ P mit |Q| = 3 zufällig und gleichverteilt
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
```

Erfolgsw'lichkeit (für „richtige" Menge Q): $1/\binom{n}{3}$

$\Longrightarrow$ erwartete Laufzeit $O(n^4)$

Kleinster Umschliessender Kreis

```
RANDOMISED_CLEVERVERSION(P)
repeat forever
    wähle Q ⊆ P mit |Q| = 11 zufällig und gleichverteilt
    bestimme C(Q)
    if P ⊆ C•(Q) then
        return C(Q)
    verdoppele alle Punkte von P ausserhalb von C(Q)
```

X_k := Anzahl Punkte nach k Runden

T := Anzahl Runden

$$\mathbb{E}[X_k] \leq (1 + \frac{3}{11+1})\mathbb{E}[X_{k-1}] \leq \ldots \leq (1 + \frac{3}{11+1})^k \cdot n$$

$$\mathbb{E}[X_k \mid T > k] \geq 2^{k/3}$$

$$1 + 3/(11+1) = 1.25$$

$$2^{1/3} = 1.2599...$$

Kapitel 3.1.1

Lange Pfade

Bunte Pfade

Eingabe: $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$, Färbung $c : V \rightarrow [k]$

Frage: Gibt es in G einen bunten Pfad der Länge k-1?

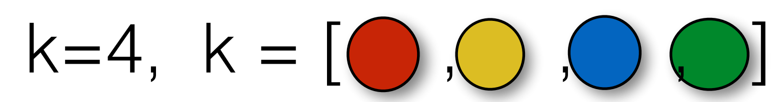
bunter Pfad der Länge k: Pfad mit k-1 Kanten (und somit k Knoten), dessen Knoten alle verschiedene Farben haben

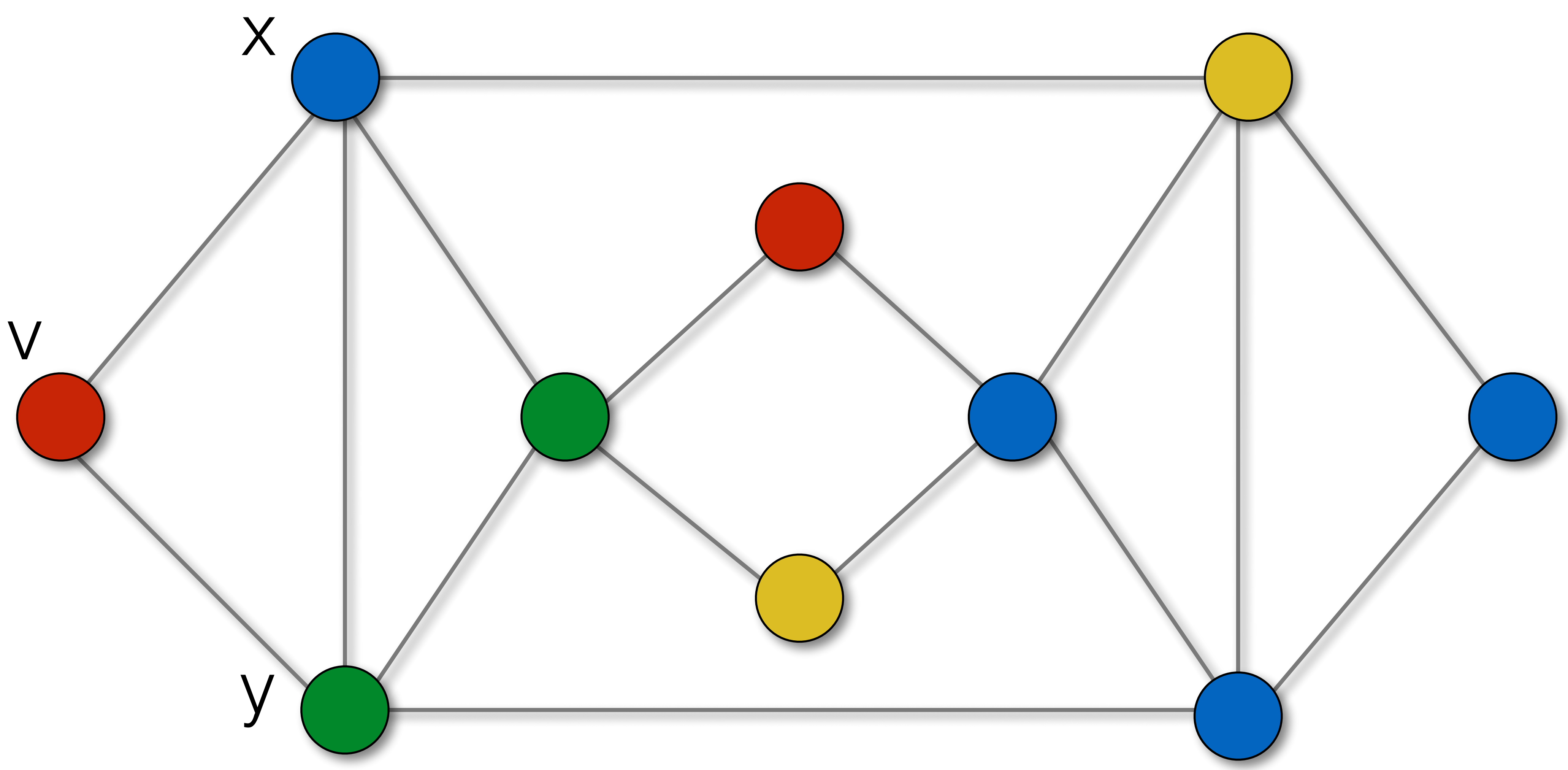
Idee: dynamische Programmierung

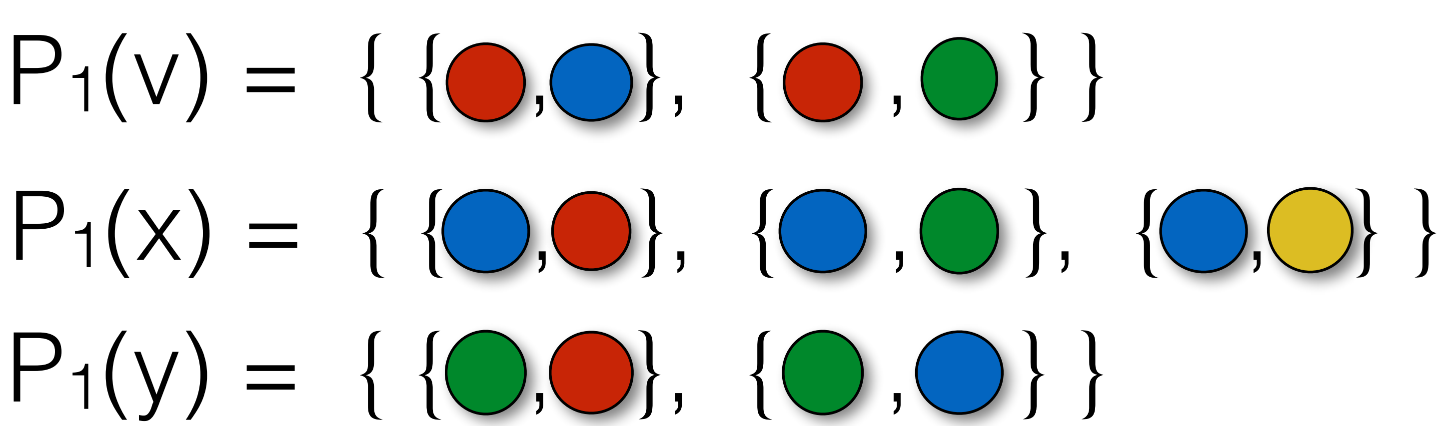
dazu definieren wir $\forall\, v \in V$, $\forall\, i \in [k]$:

$$P_i(v) := \left\{ S \in \binom{[k]}{i+1} \middle| \exists \text{ in } v \text{ endender genau mit } S \text{ gefärbter bunter Pfad} \right\}$$

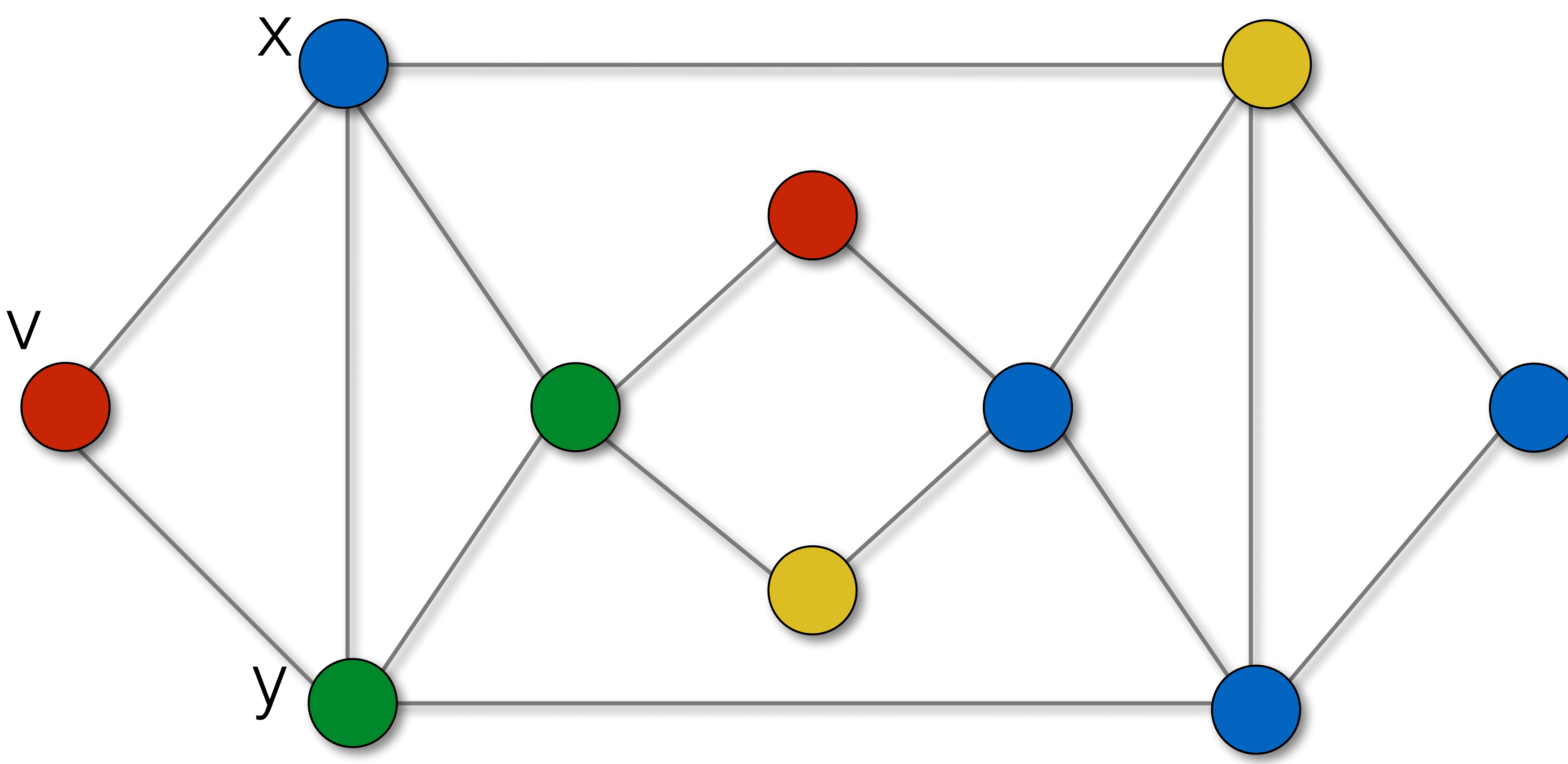
Bunte Pfade







$k=4,\ \ k = [{\color{red}\bullet}, {\color{gold}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}]$



$$P_2(v) = \bigcup_{w \in N(v)} \ \bigcup_{S \in P_1(w),\ {\color{red}\bullet} \notin S} \{S \cup \{{\color{red}\bullet}\}\}$$

$$= \underbrace{\{ \{{\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}\} \cup \{{\color{red}\bullet}\},\ \ \{{\color{blue}\bullet}, {\color{gold}\bullet}\} \cup \{{\color{red}\bullet}\} \}}_{P_1(x)} \ \cup \ \underbrace{\{ \{{\color{green}\bullet}, {\color{blue}\bullet}\} \cup \{{\color{red}\bullet}\}\}}_{P_1(y)}$$

$$= \{ \{{\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}\},\ \ \{{\color{blue}\bullet}, {\color{gold}\bullet}, {\color{red}\bullet}\} \}$$