Kapitel 1

Graphentheorie

A&D:

- Breiten- und Tiefensuche
- Eulertouren
- Minimal spannende Bäume
- Kürzeste Wege

A&W:

- Zusammenhang
- Hamiltonkreise
- Matchings
- Färbungen

Kapitel 1.3

Zusammenhang

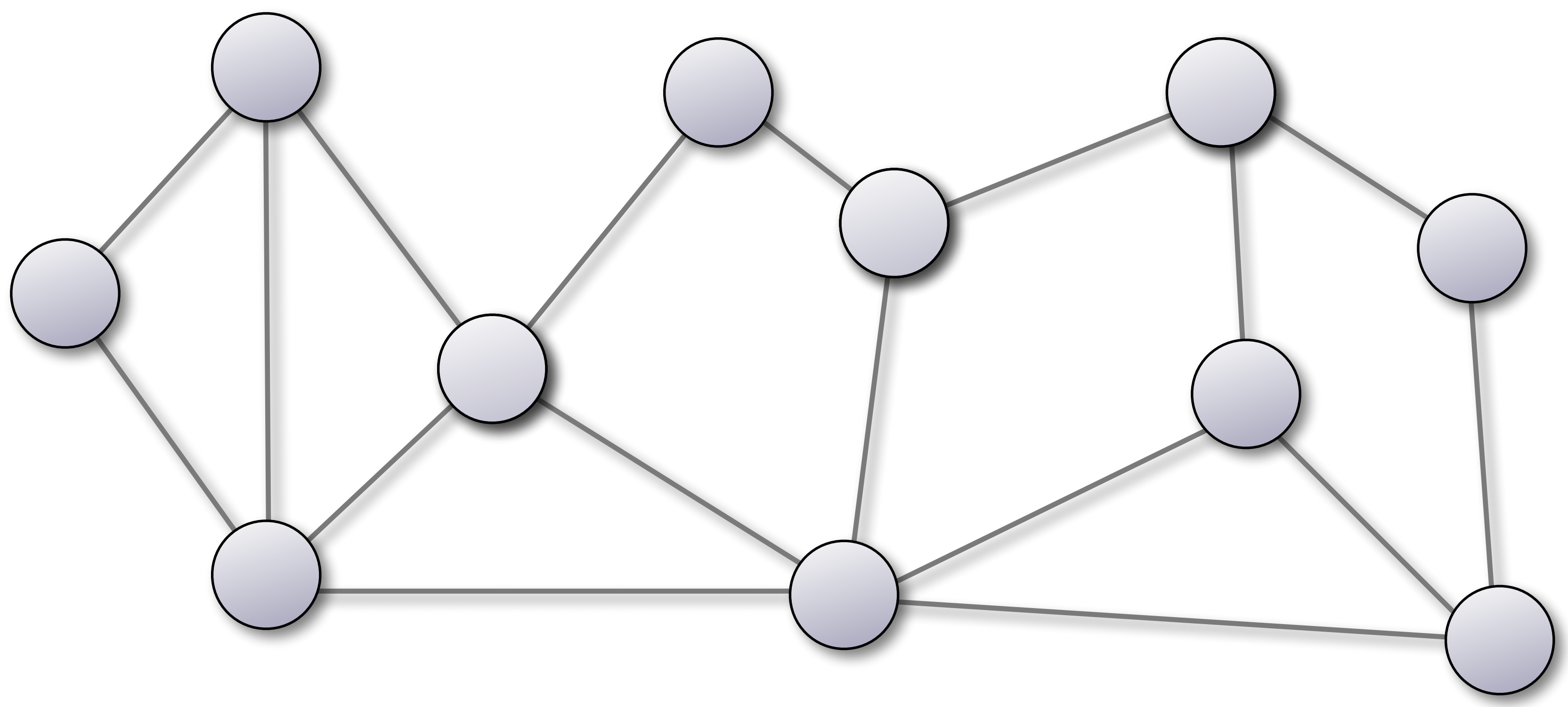
Zusammenhang

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G heisst zusammenhängend, wenn
$\forall u, v \in V, u \neq v$ gilt: es gibt einen u-v-Pfad in G.

Heute:

Gegeben ein zusammenhängender Graph.

Wie (sehr) zusammenhängend ist dieser Graph?



Wieviele Knoten / Kanten muss man (mindestens) löschen, um den Zusammenhang des Graphen zu zerstören?

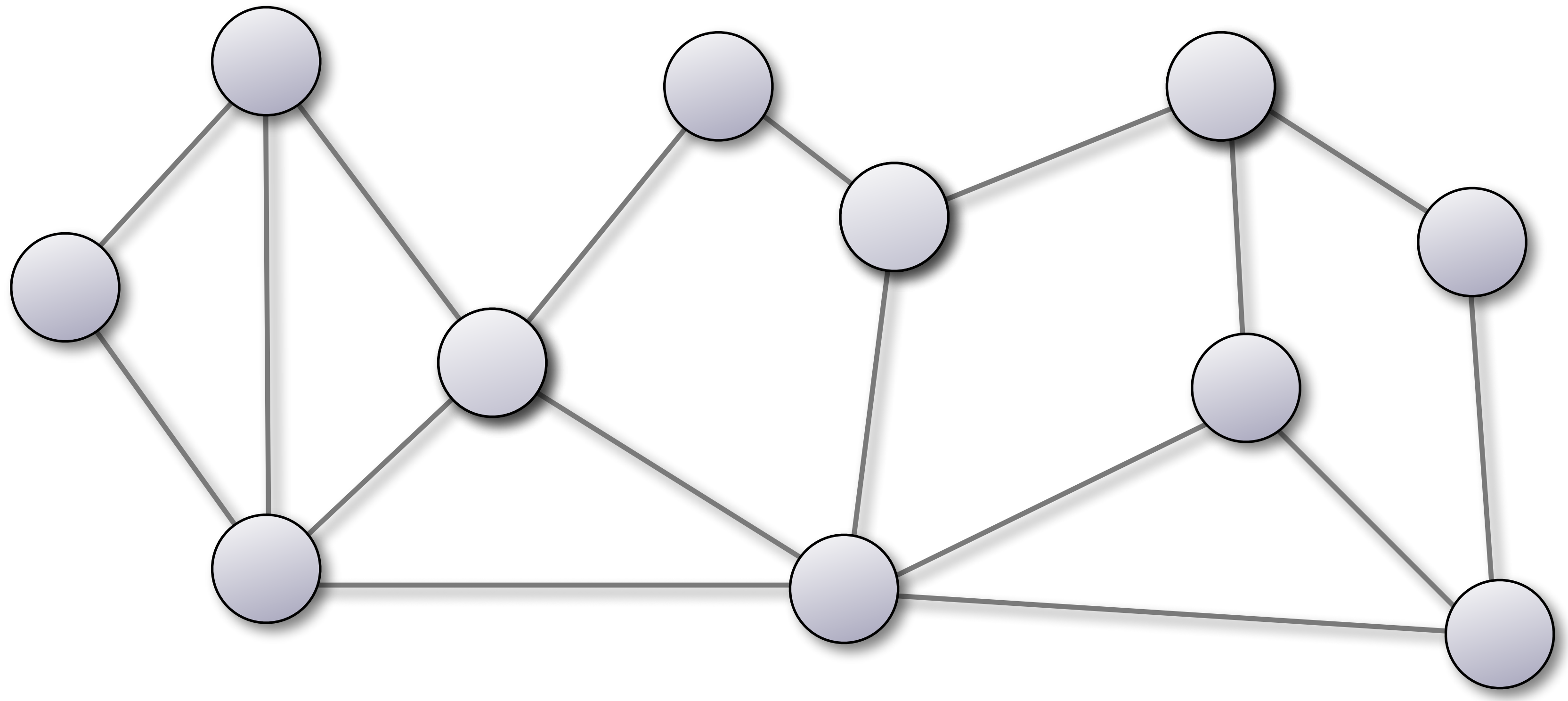
Definition: Sei $G=(V,E)$ ein Graph, .

G heisst k-zusammenhängend, wenn gilt:

- $|V| \geq k+1$ und
- $\forall X \subseteq V$ mit $|X| < k$ ist $G[V \setminus X]$ zusammenhängend

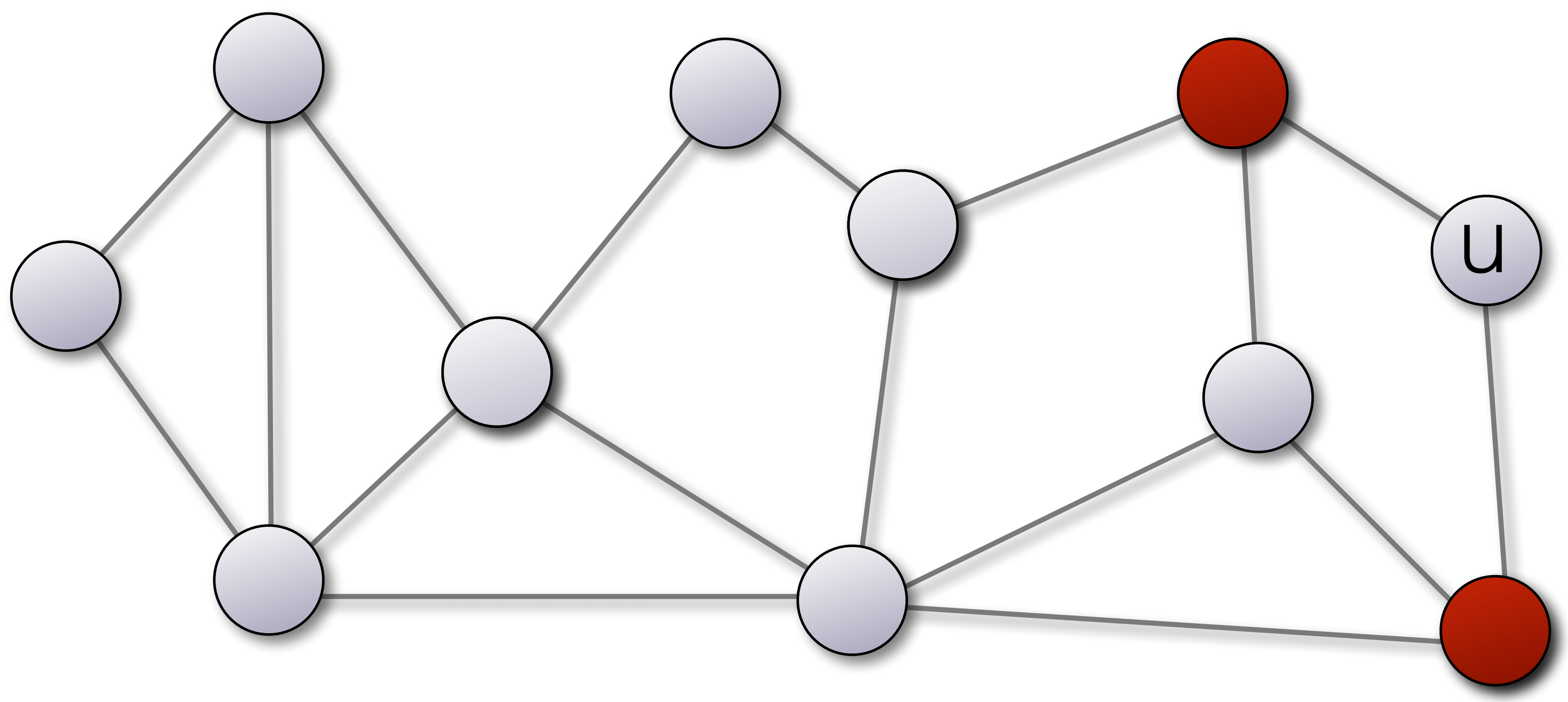
Anschaulich:

Man muss mindestens k Knoten (und die inzidenten Kanten) löschen, um den Zusammenhang zu zerstören.



Ausprobieren:

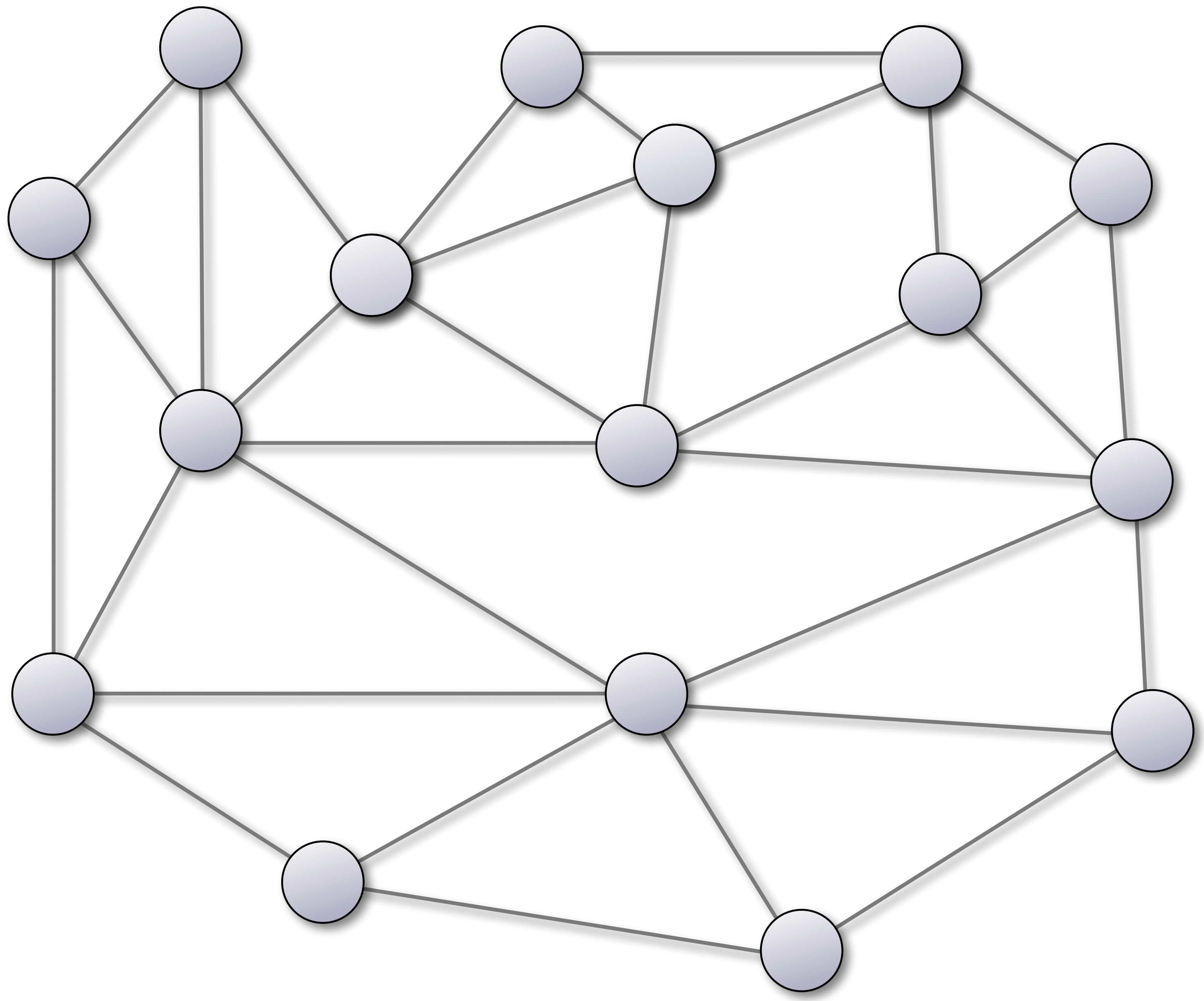
- Graph ist 2-zusammenhängend
- Graph ist nicht 3-zusammenhängend

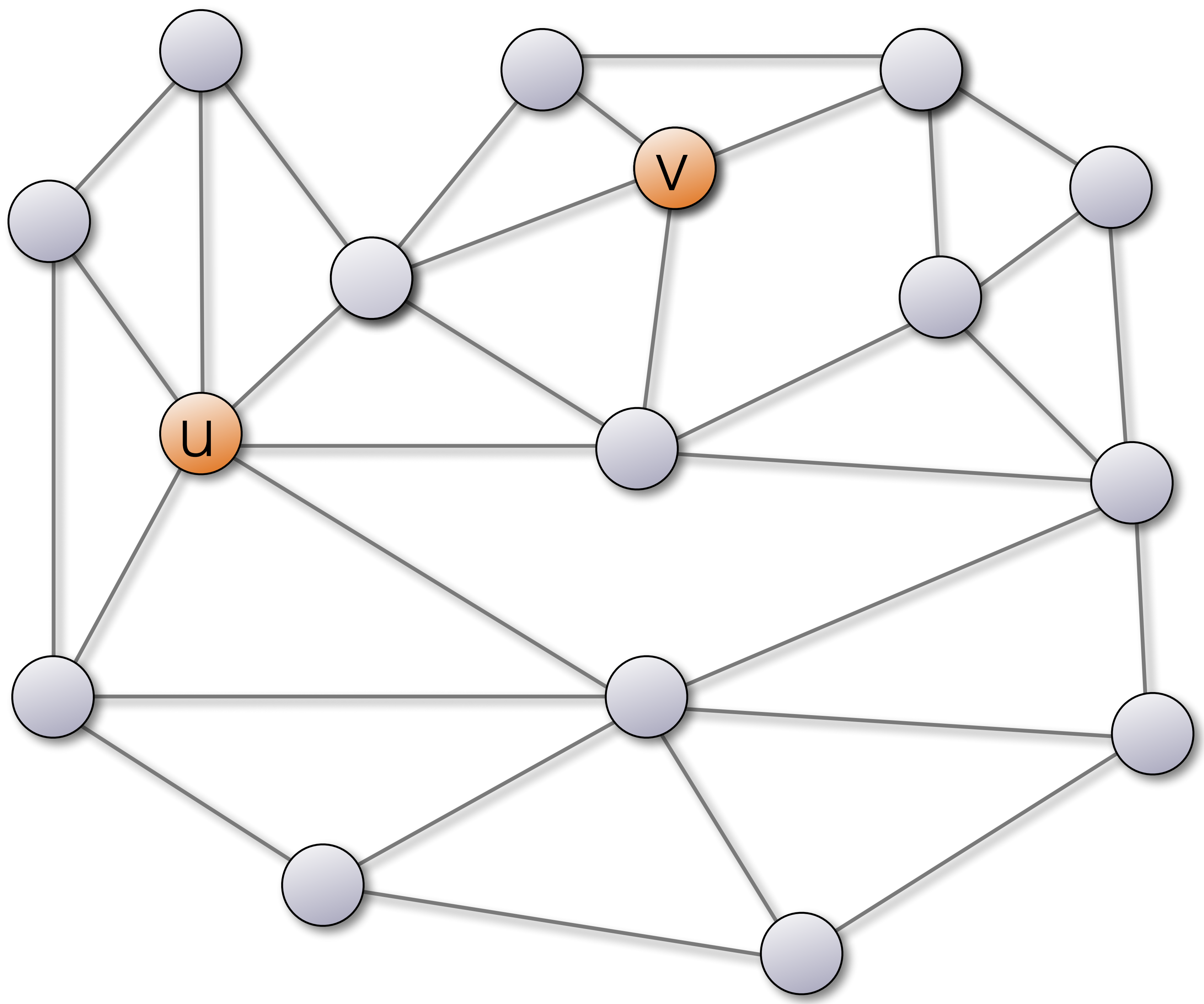


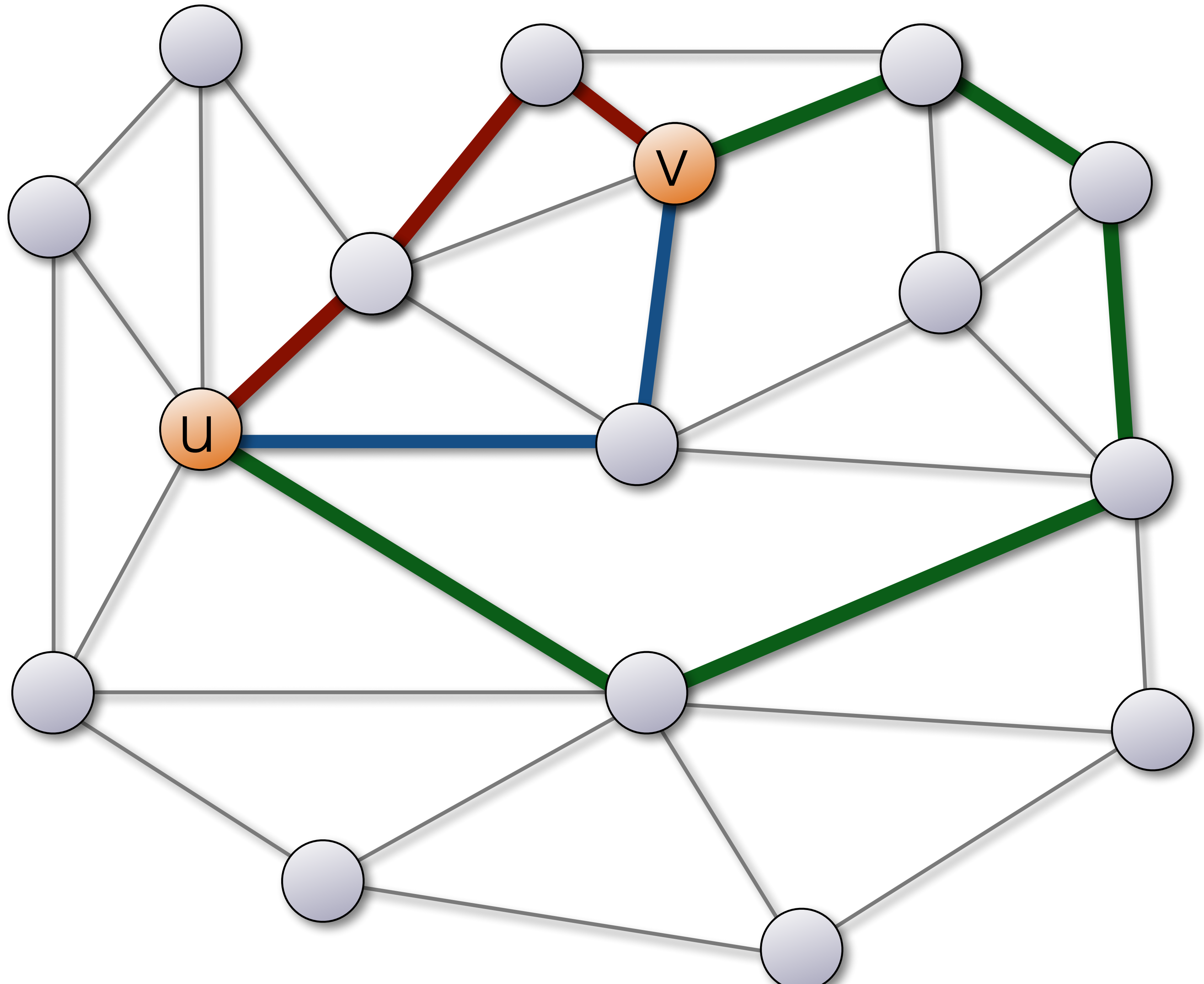
Graph ist **nicht** 3-zusammenhängend

Es gilt allgemein:

Enthält G einen Knoten mit **Grad < k** so ist G **nicht k-zusammenhängend**.




v
u



u
v

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

G heisst k-zusammenhängend, wenn gilt:

- $|V| \geq k + 1$ und
- $\forall X \subseteq V$ mit $|X| < k$ ist $G[V \setminus X]$ zusammenhängend

Satz von Menger:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

G ist **k-zusammenhängend** genau dann wenn (gdw.)

$\forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es **k intern-knotendisjunkte** u-v-Pfade

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

G heisst k-zusammenhängend, wenn gilt:

- $|V| \geq k + 1$ und
- $\forall X \subseteq V$ mit $|X| < k$ ist $G[V \setminus X]$ zusammenhängend

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

G heisst k-kanten-zusammenhängend, wenn gilt:

- $\forall X \subseteq E$ mit $|X| < k$ ist $(V, E \setminus X)$ zusammenhängend

k-Kanten-Zusammenhang

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

G heisst k-kanten-zusammenhängend, wenn gilt:

- $\forall X \subseteq E$ mit $|X| < k$ ist $(V, E \setminus X)$ zusammenhängend

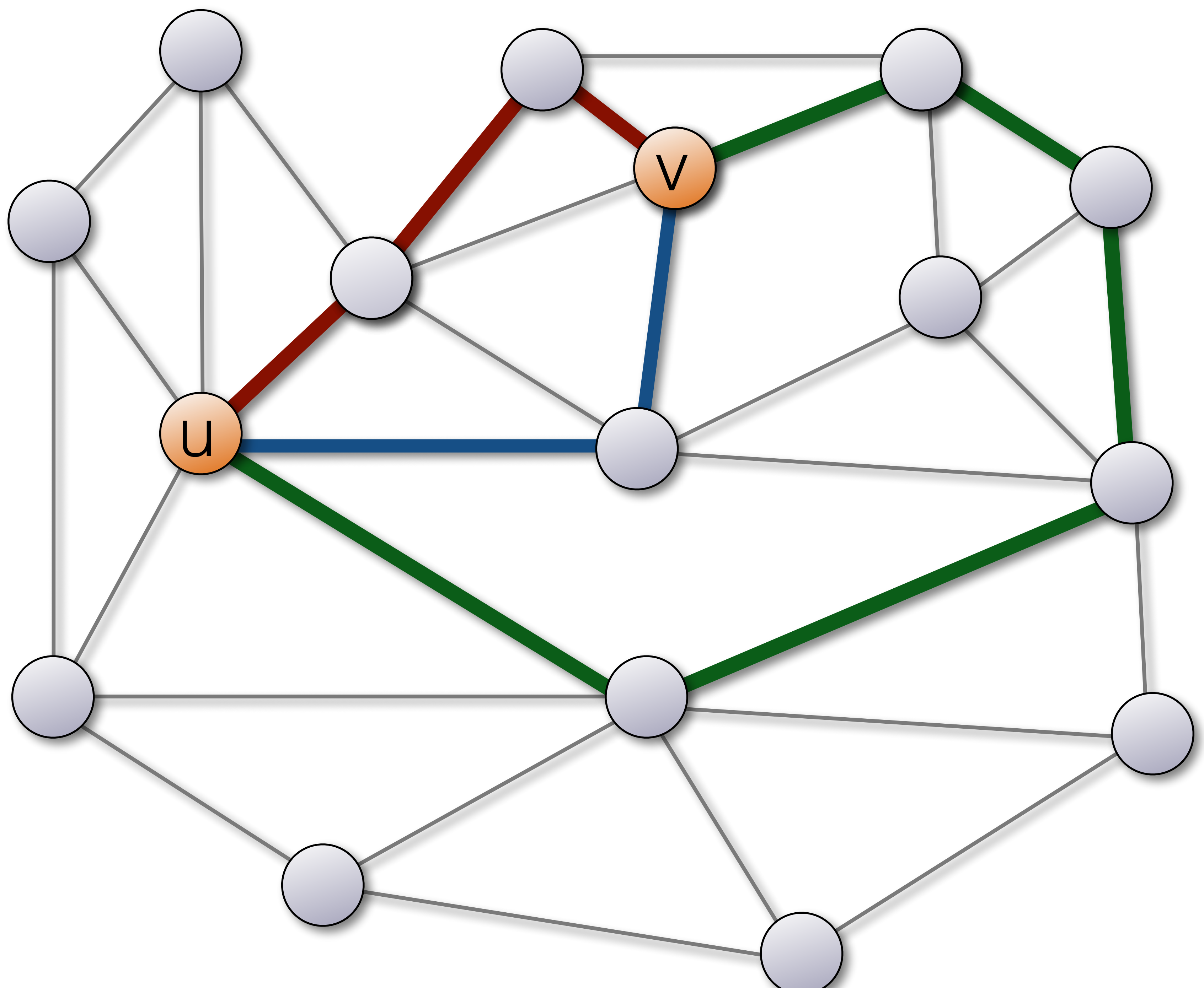
Satz von Menger (Kanten-Version):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

G ist **k-kanten-zusammenhängend** genau dann wenn (gdw.)

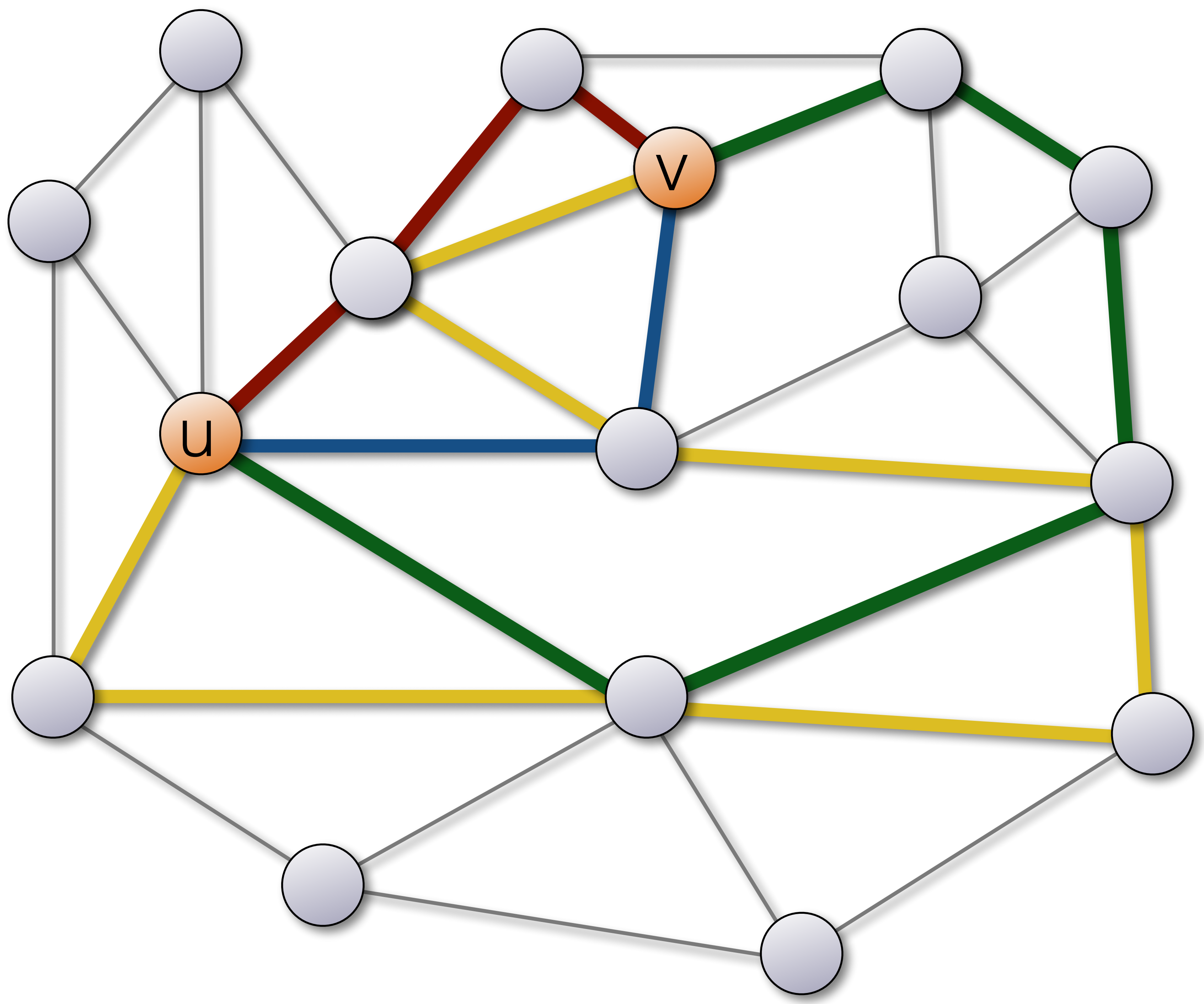
$\forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es **k kantendisjunkte** u-v-Pfade

(Beweis: später im Semester, im Kapitel über Flüsse)


v
u

Es gilt immer:

(Knoten-)Zusammenhang ≦ Kanten-Zusammenhang ≦ minimaler Grad



Heute:

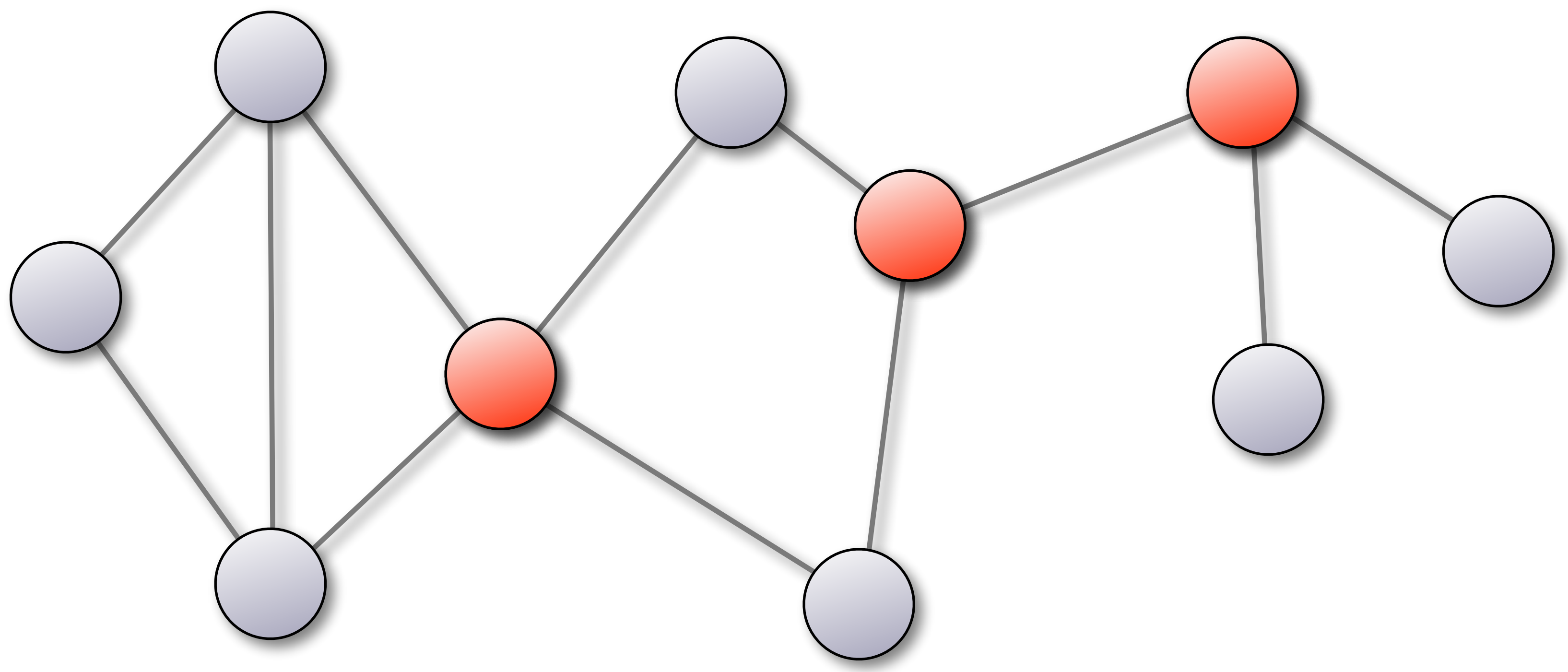
Spezialfall $k=1$

Artikulationsknoten

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

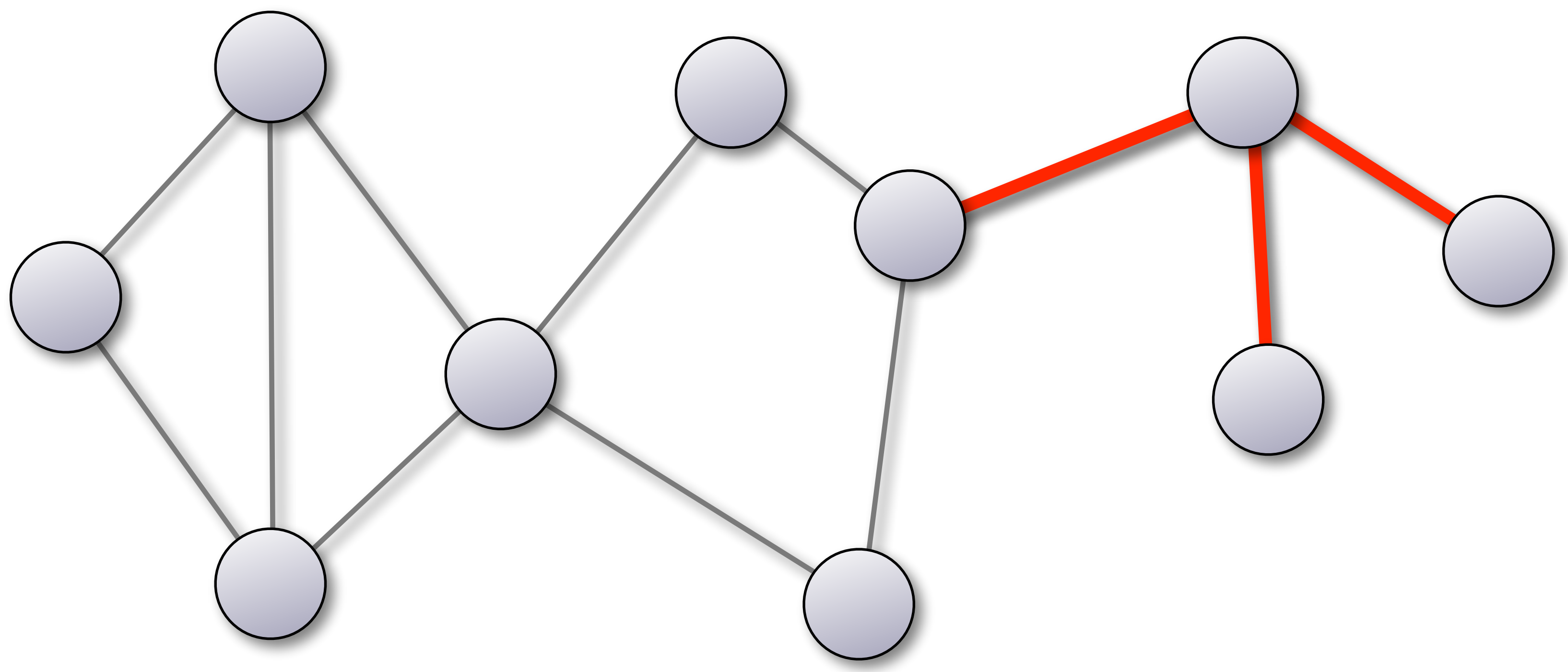
Ein Knoten $v \in V$ heisst *Artikulationsknoten* (engl. cut vertex)

gdw. $G[V \setminus \{v\}]$ nicht zusammenhängend ist



Brücken

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Ein Kante $e \in E$ heisst *Brücke* (engl. cut edge)
gdw. $G - e$ nicht zusammenhängend ist

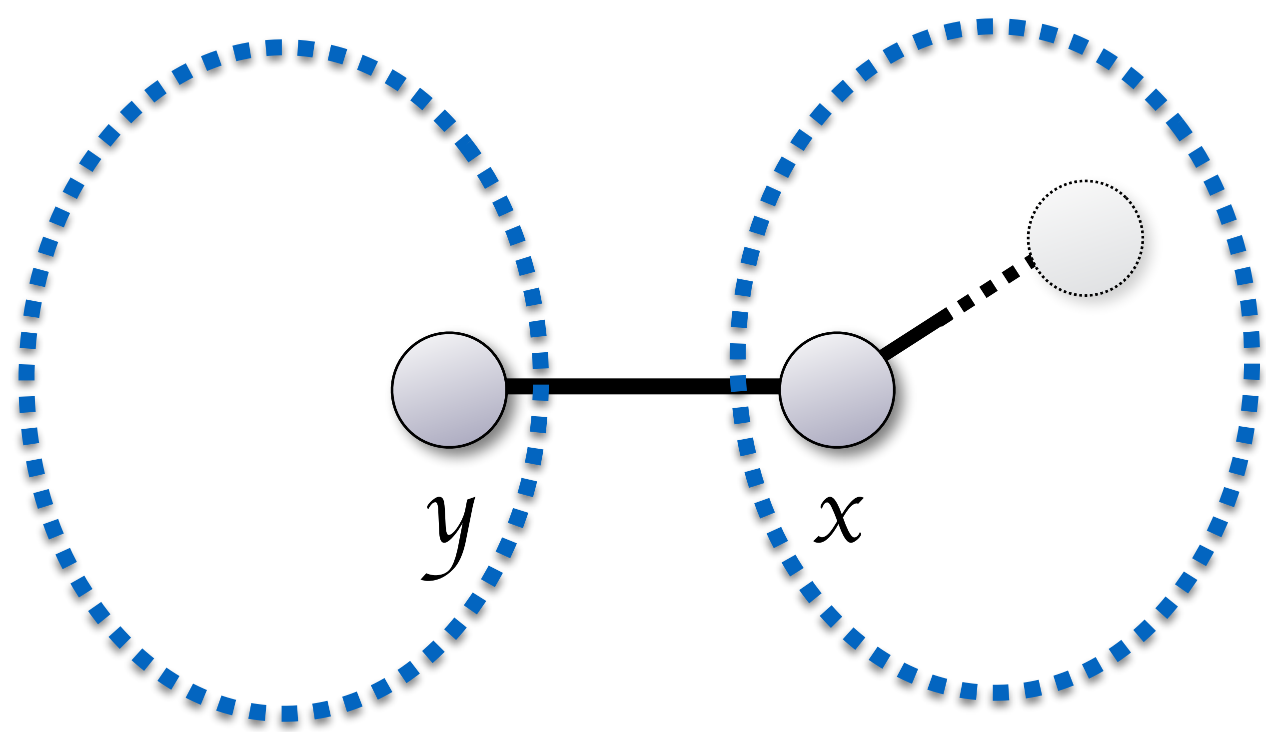


Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Ist $\{x, y\} \in E$ eine Brücke so gilt:

deg(x) = 1 oder x ist Artikulationsknoten

(und analog für y).

Beweisidee:



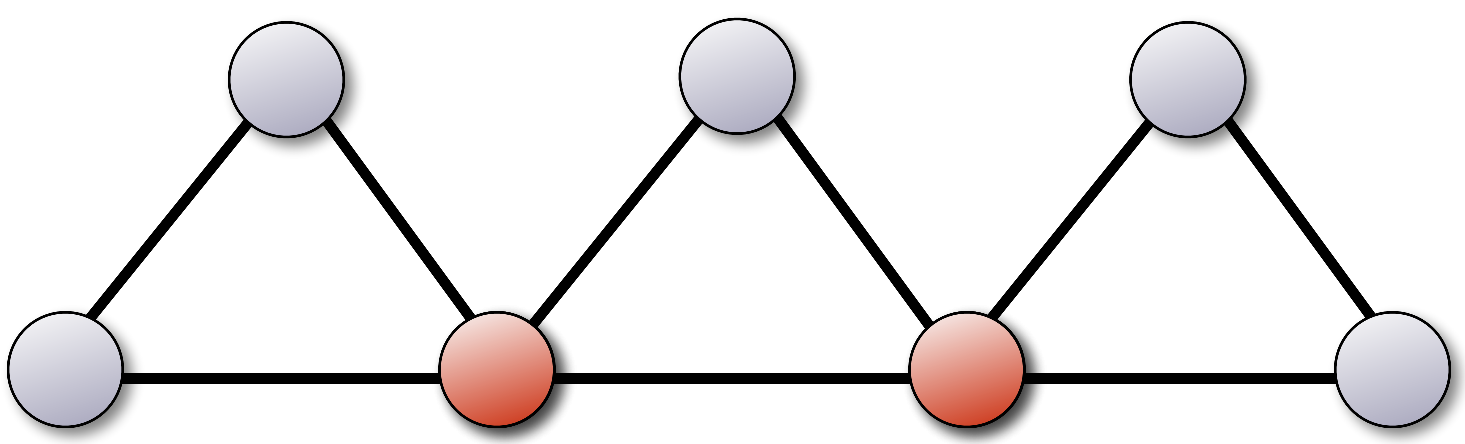
Artikulationsknoten und Brücken

Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.
Ist $\{x, y\} \in E$ eine Brücke so gilt:

deg(x) = 1 oder x ist Artikulationsknoten

(und analog für y).

Aber: die Umkehrung gilt i.A. nicht …!!

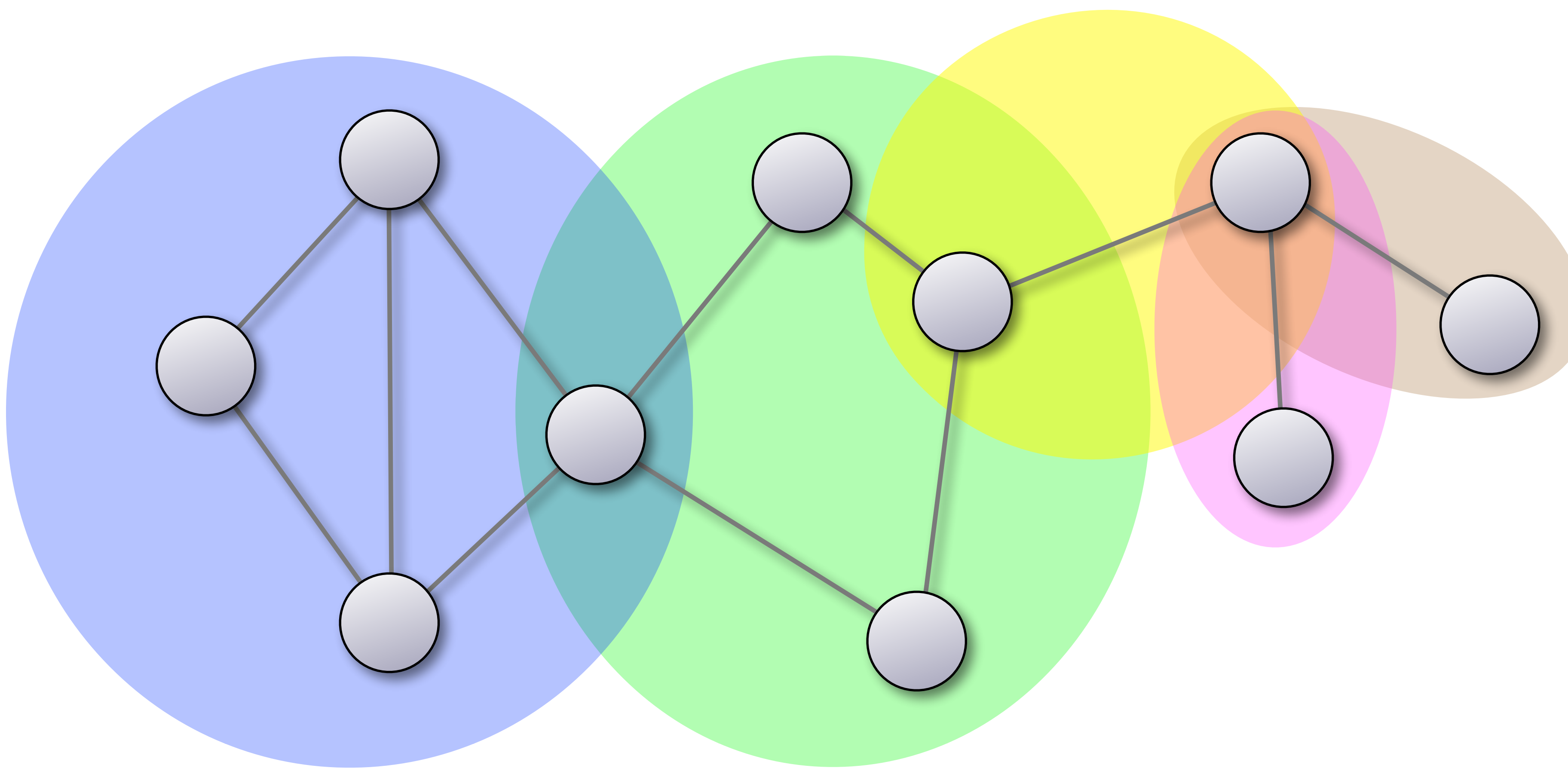


Artikulationsknoten

Definition: Sei $G = (V, E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow \begin{cases} e = f, & \text{oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

Die Äquivalenzklassen nennen wir Blöcke.

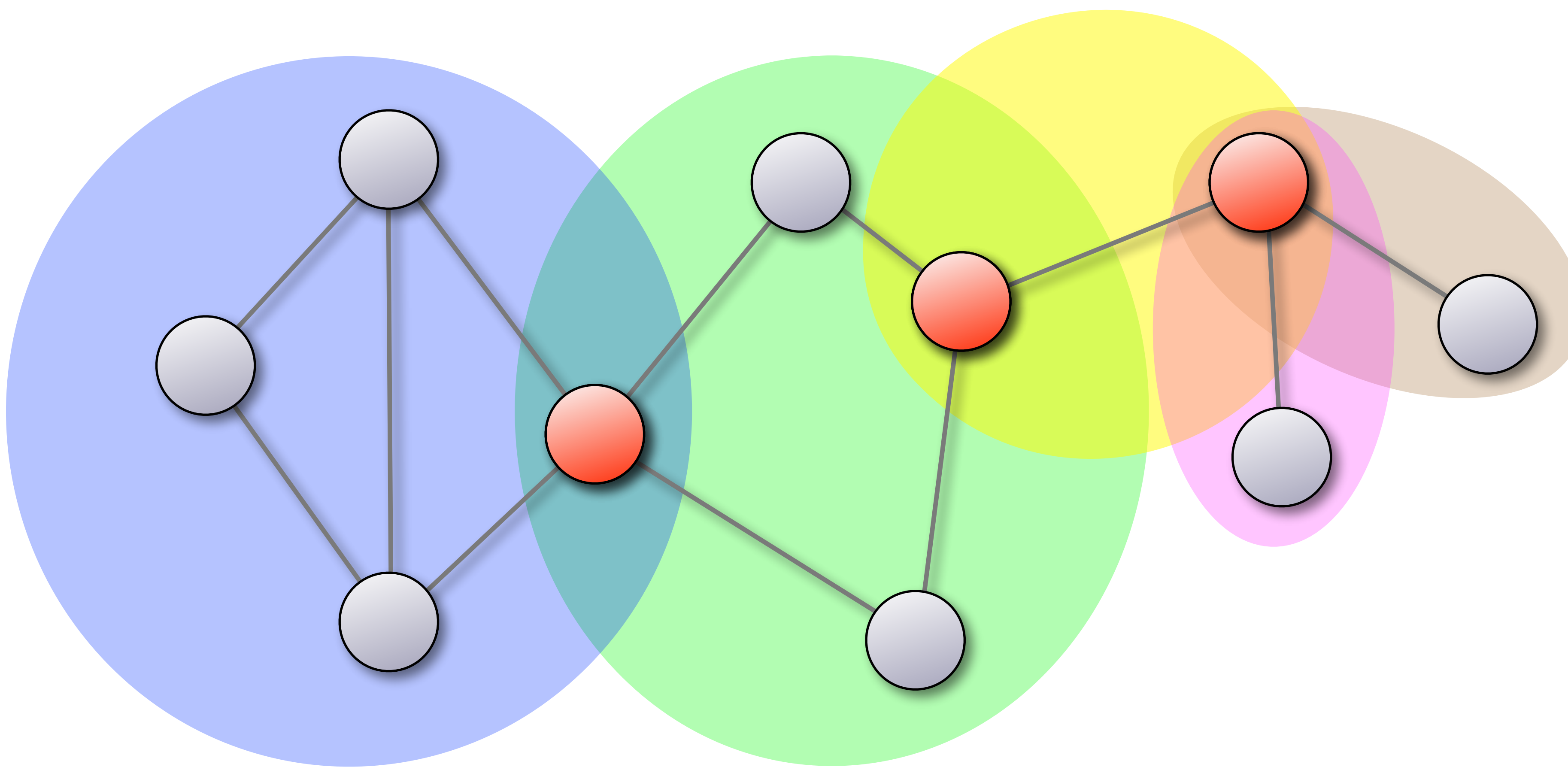


Transitiv? $e \sim f$ und $f \sim g$ dann $e \sim g$

Definition: Sei $G = (V, E)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$e \sim f :\Longleftrightarrow \begin{cases} e = f, & \text{oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$$

Die Äquivalenzklassen nennen wir Blöcke.

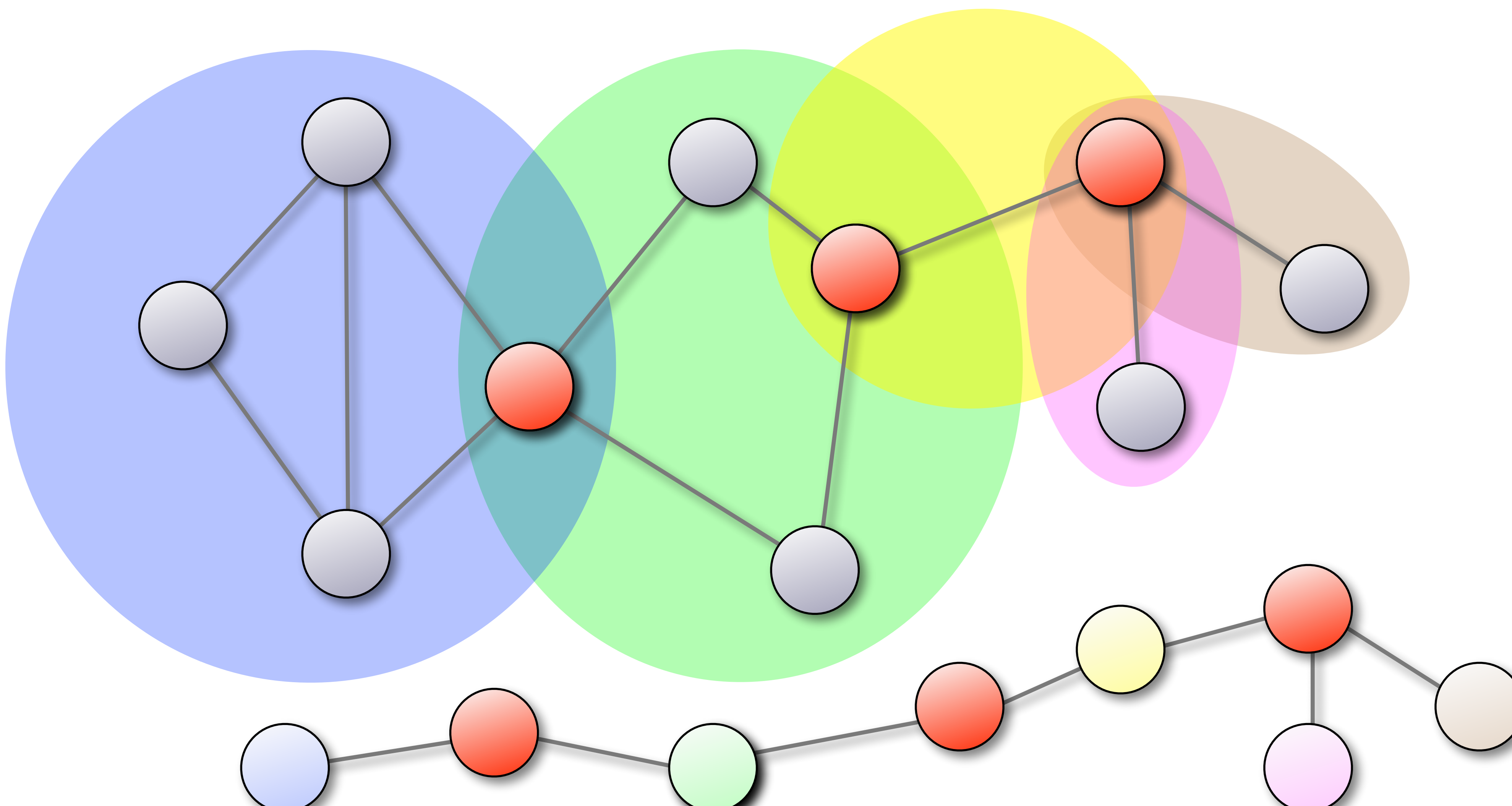


Lemma: Zwei Blöcke schneiden sich — wenn überhaupt — immer in einem Artikulationsknoten.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

Der Block-Graph von G ist der bipartite Graph $T = (A \uplus B, E_T)$ mit

- $\text{A} = \{\text{Artikulationsknoten von } G\}$.
- $\text{B} = \{\text{Blöcke von } G\}$.
- $\forall a \in A, b \in B : \quad \{a, b\} \in E_T \iff a \text{ inzident zu einer Kante in } b$.



Satz: Ist G zusammenhängend, so ist der Blockgraph von G ein Baum.