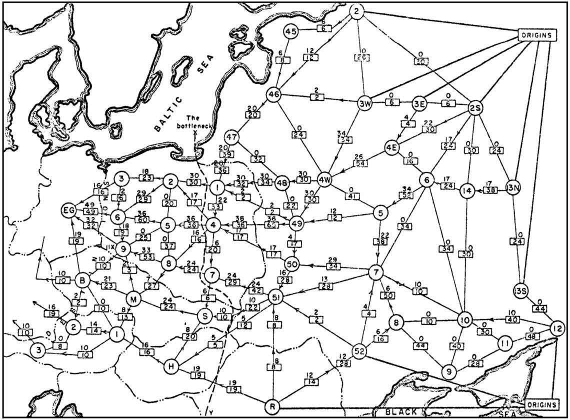
Flüsse in Netzwerken: Einführung & Modellierung



Ursprung: Interesse am russischen Schienennetz,
[A.N. Tolstoĭ '30] und [Harris&Ross '55] (diese Abb.).

Problemstellung

MaxFlow Problem. Gegeben ein Netzwerk, finde einen Fluss grössten Werts. (Netzwerk?, Fluss?, Wert?)

Problemstellung

MaxFlow Problem. Gegeben ein Netzwerk, finde einen Fluss grössten Werts. (Netzwerk?, Fluss?, Wert?)

Verkehrsflüsse
Geldflüsse
Transportprobleme

elektrische Leitungen mit Widerständen
Bildsegmentierung in der Bildverarbeitung

Problemstellung

MaxFlow Problem. Gegeben ein Netzwerk, finde einen Fluss grössten Werts. (Netzwerk?, Fluss?, Wert?)

Verkehrsflüsse
Geldflüsse
Transportprobleme

elektrische Leitungen mit Widerständen
Bildsegmentierung in der Bildverarbeitung

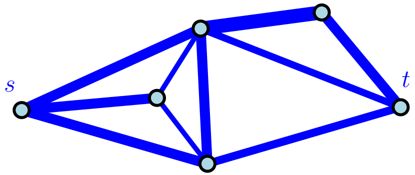
Matchings in Graphen
Schnitte (Cuts) in Graphen
Disjunkte Wege in Graphen

Grenzbereich polynomiell vs. nicht polynomiell

Netzwerk – Definition

Ein **Netzwerk** ist ein Tupel $N = (V, A, c, s, t)$, wobei gilt:

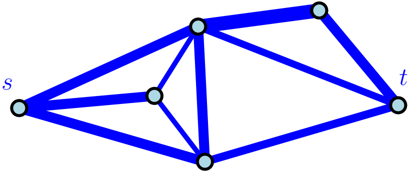
- (V, A) ist ein gerichteter Graph (ohne Schleifen),
- $s \in V$, die **Quelle**,
- $t \in V \setminus \{s\}$, die **Senke**, und
- $c : A \to \mathbb{R}_0^+$, die **Kapazitätsfunktion**.

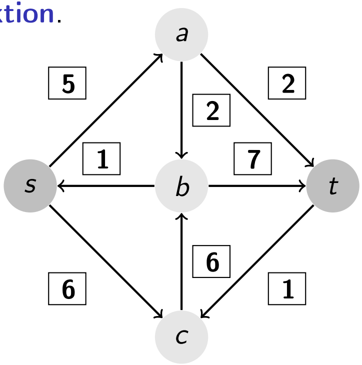


Netzwerk – Definition

Ein **Netzwerk** ist ein Tupel $N = (V, A, c, s, t)$, wobei gilt:

- (V, A) ist ein gerichteter Graph (ohne Schleifen),
- $s \in V$, die **Quelle**,
- $t \in V \setminus \{s\}$, die **Senke**, und
- $c : A \to \mathbb{R}_0^+$, die **Kapazitätsfunktion**.





Fluss – Definition

Sei $N = (V, A, c, s, t)$ ein Netzwerk. Ein **Fluss** in N ist eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit den Bedingungen

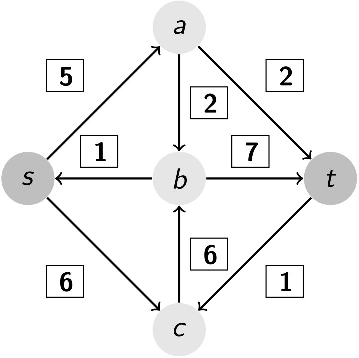
- **Zulässigkeit**: $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in A$.
- **Flusserhaltung**: Für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt

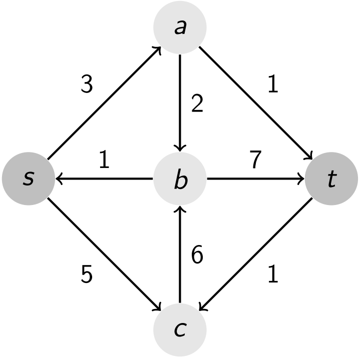
$$\sum_{u \in V:\,(u,v) \in A} f(u, v) = \sum_{u \in V:\,(v,u) \in A} f(v, u)\ .$$

Der **Wert** eines Flusses f ist definiert als

$$\mathrm{val}(f) := \mathrm{netoutflow}(s) := \sum_{u \in V:\,(s,u) \in A} f(s, u) - \sum_{u \in V:\,(u,s) \in A} f(u, s)\ .$$

Netzwerk und Fluss





Fluss mit Wert $3 - 1 + 5 = 7$

Nettozufluss der Senke

Intuition: Soviel, wie bei der Quelle herausfliesst, muss bei der Senke hineinfliessen.

Nettozufluss der Senke

Intuition: Soviel, wie bei der Quelle herausfliesst, muss bei der Senke hineinfliessen.

Lemma

Der **Nettozufluss** *der Senke t gleicht dem Wert des Flusses, d.h.*

$$\text{netinflow}(t) := \sum_{u \in V:\,(u,t) \in A} f(u,t) - \sum_{u \in V:\,(t,u) \in A} f(t,u) \quad = \quad \text{val}(f)\ .$$

Nettozufluss der Senke – Beweis

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{(v,u)\in A} f(v,u) - \sum_{(u,v)\in A} f(u,v) \\
&= \sum_{v\in V} \underbrace{\left(\sum_{u\in V\colon (v,u)\in A} f(v,u) - \sum_{u\in V\colon (u,v)\in A} f(u,v) \right)}_{=0 \text{ für } v\notin\{s,t\}} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{u\in V\colon (s,u)\in A} f(s,u) - \sum_{u\in V\colon (u,s)\in A} f(u,s) \right)}_{=\mathrm{val}(f)} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\sum_{u\in V\colon (t,u)\in A} f(t,u) - \sum_{u\in V\colon (u,t)\in A} f(u,t) \right)}_{=-\mathrm{netinflow}(t)}
\end{aligned}
$$

Problemstellung

MaxFlow Problem. Gegeben ein Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$, finde einen Fluss f grössten Werts (einen **maximalen Fluss**).

- Gibt es immer einen solchen maximalen Fluss? Es könnte ein ähnliches Phänomen auftreten wie beim offenen Intervall $(0, 1)$: Es gibt keine grösste Zahl, kein Maximum.
- Wie erkennt man, dass ein Fluss maximal ist? Was ist ein „einfacher“ Beweis für die Maximalität eines Flusses?

Wir betrachten dazu vorerst Schnitte in Graphen.

Schnitt - Definition

Ein ***s*-*t*-Schnitt** für ein Netzwerk (V, A, c, s, t) ist eine Partition (S, T) von V mit $s \in S$ und $t \in T$. Die **Kapazität** eines s-t-Schnitts (S, T) ist durch

$$\mathrm{cap}(S, T) := \sum_{(u,w) \in (S \times T) \cap A} c(u, w)$$

definiert. (Partition (S, T): $S \cup T = V$ und $S \cap T = \emptyset$)

Schnitt - Definition

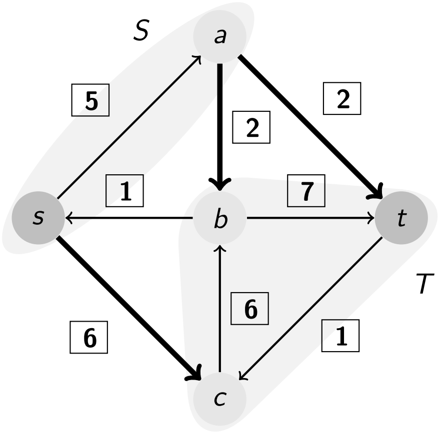
Ein ***s*-*t*-Schnitt** für ein Netzwerk (V, A, c, s, t) ist eine Partition (S, T) von V mit $s \in S$ und $t \in T$. Die **Kapazität** eines s-t-Schnitts (S, T) ist durch

$$\operatorname{cap}(S, T) := \sum_{(u,w) \in (S \times T) \cap A} c(u, w)$$

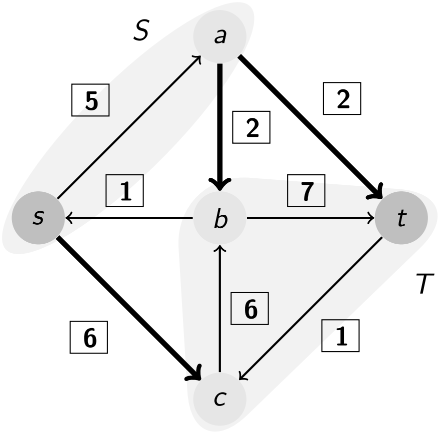
definiert. (Partition (S, T): $S \cup T = V$ und $S \cap T = \emptyset$)

Wichtig: Die Kapazität eines Schnitts (S, T) ignoriert die Kanten von T nach S!

Schnitt



Schnitt



Schnitt mit Kapazität $6 + 2 + 2 = 10$.

Schnitt vs. Fluss

Lemma

Ist f ein Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt in einem Netzwerk (V, A, c, s, t), so gilt

$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S, T) \ .$$

Schnitt vs. Fluss

Lemma

Ist f ein Fluss und (S, T) ein s-t-Schnitt in einem Netzwerk (V, A, c, s, t), so gilt

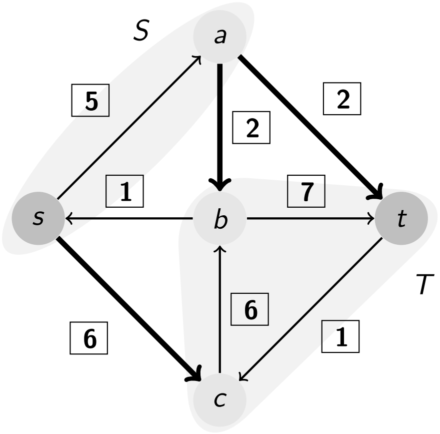
$$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S, T) \ .$$

Ein Fluss kann nie grösser sein als die Kapazität eines s-t-Schnitts.

Finden wir zu einem Fluss f einen s-t-Schnitt (S, T) mit $\mathrm{cap}(S, T) = \mathrm{val}(f)$, so ist f ein maximaler Fluss.

Der Schnitt (S, T) is ein einfacher Beweis (ein einfaches Zertifikat) für die Maximalität von f.

Schnitt vs. Fluss



Schnitt mit Kapazität $6 + 2 + 2 = 10$.

Lemma „$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S, T)$“ - Beweis

Für eine Partition (U, W) von V sei

$$f(U, W) := \sum_{(u,w) \in (U \times W) \cap A} f(u, w) \ .$$

Wir behaupten

$$\mathrm{val}(f) \stackrel{\text{(i)}}{=} f(S, T) - f(T, S) \stackrel{\text{(ii)}}{\leq} f(S, T) \stackrel{\text{(iii)}}{\leq} \mathrm{cap}(S, T),$$

(ii) Folgt aus Nichtnegativität des Flusses auf jeder Kante.
(iii) Folgt aus der Kapazitätsbeschränkung „$f(u, w) \leq c(u, w)$“.

(i) gilt für $S = \{s\}$ bei Definition, und für $T = \{t\}$ wg. $\mathrm{netinflow}(t) = \mathrm{val}(f)$. Allgemein ...

Lemma „$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(S, T)$" - Beweis

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(f) &= \sum_{u \in V \colon (s,u) \in A} f(s, u) - \sum_{u \in V \colon (u,s) \in A} f(u, s) \\
&= \sum_{v \in S} \underbrace{\left(\sum_{u \in V \colon (v,u) \in A} f(v, u) - \sum_{u \in V \colon (u,v) \in A} f(u, v) \right)}_{=0 \;\; \text{für} \;\; v \neq s} \\
&= \sum_{(u,w) \in (S \times T) \cap A} f(u, w) - \sum_{(u,w) \in (T \times S) \cap A} f(u, w) \\
&= f(S, T) - f(T, S)
\end{aligned}$$

Maxflow-Mincut

Ein einfaches Maximalitätszertifikat existiert immer.

Satz („Maxflow-Mincut Theorem“)

Jedes Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ erfüllt

$$\max_{f \text{ Fluss}} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T) \text{ s-t-Schnitt}} \mathrm{cap}(S, T)$$

Beachte: Da es nur endlich viele s-t-Schnitte gibt, d.h.

- s-t-MinCut ist ein endliches algorithmisches Problem, und
- ein minimaler Schnitt existiert immer.

Am Ende werden wir doch s-t-MinCut mit MaxFlow lösen.