

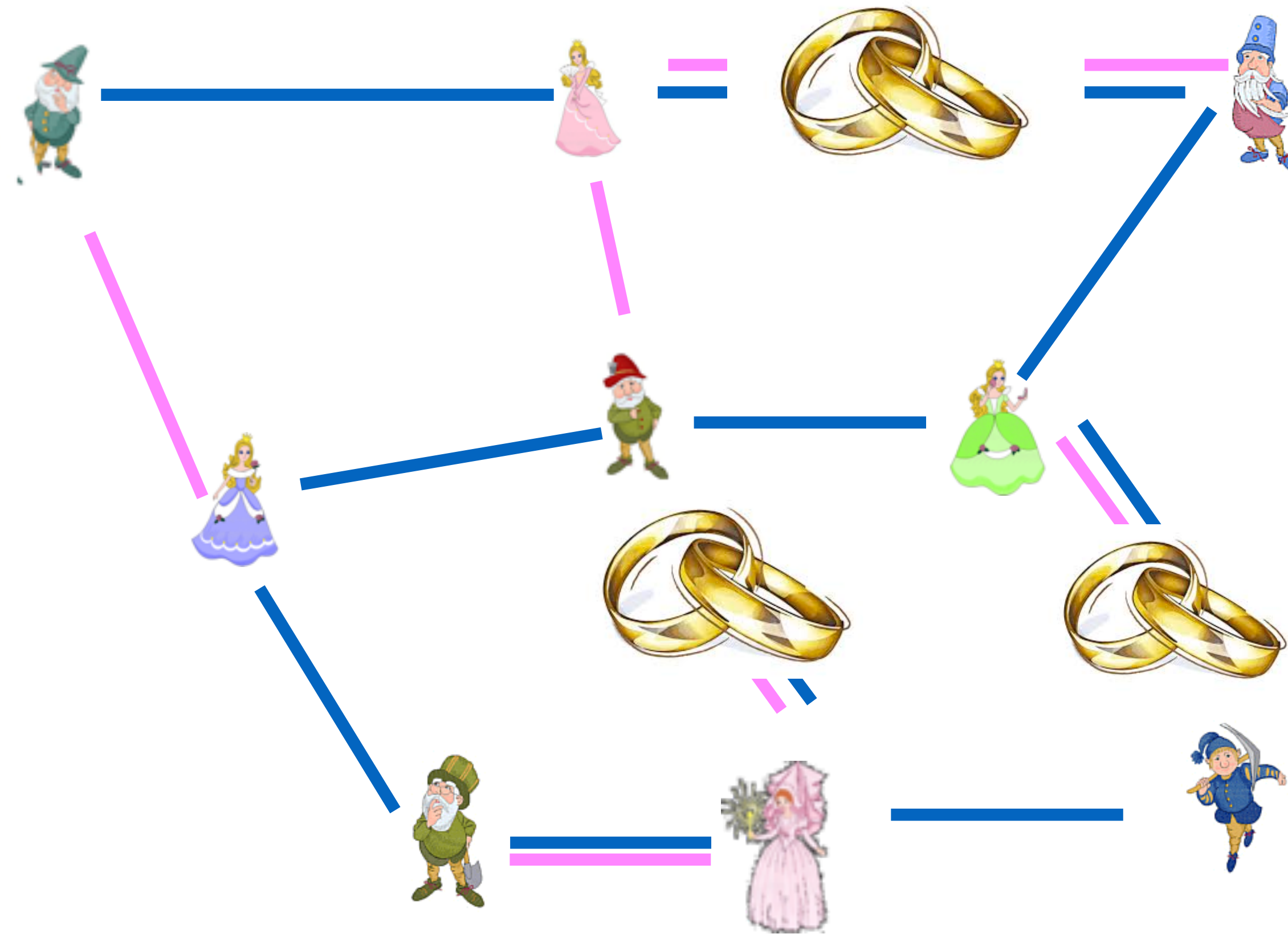
Matchings

<http://tinyurl.com/3v83ck66>

Der Satz von Hall (Heiratssatz)



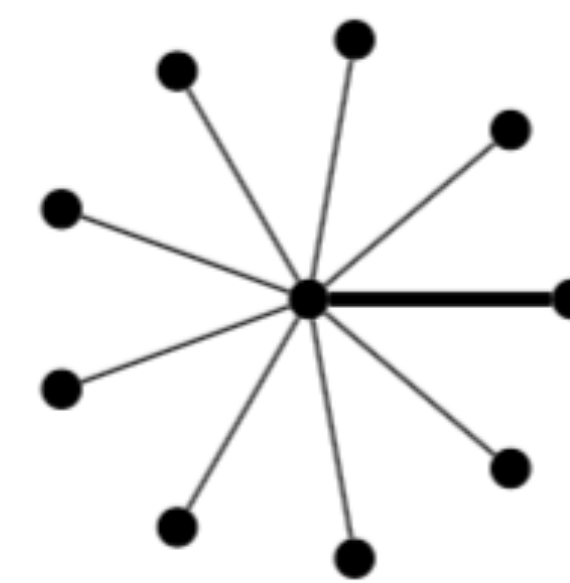
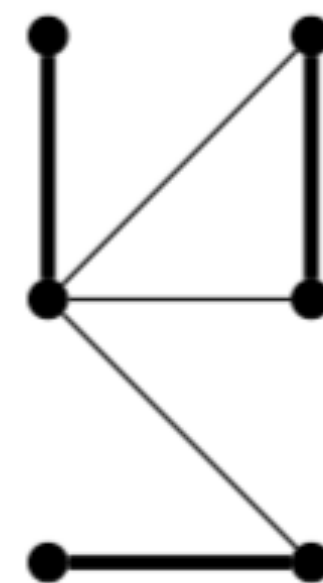
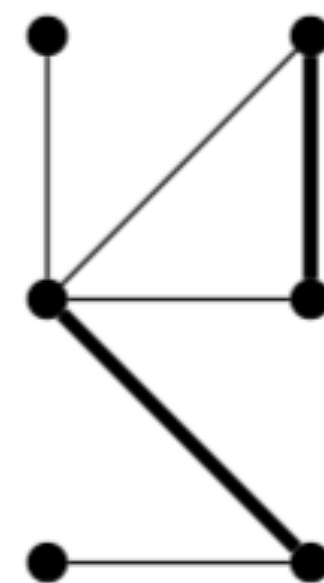
Der Satz von Hall (Heiratssatz)



Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heisst **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist.

Ein Knoten v wird von M **überdeckt**, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält.

Ein Matching M heisst **perfektes Matching**, wenn jeder Knoten durch genau eine Kante aus M überdeckt wird, oder, anders ausgedrückt, wenn $|M| = |V|/2$.



Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **inklusionsmaximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$.

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **(kardinalitäts-)maximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $|M'| > |M|$.



inklusionsmaximales Matching
(aber nicht kardinalitätsmaximal)



kardinalitätsmaximales Matching
(auch inklusionsmaximal!)

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **inklusionsmaximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $M \subseteq M'$ und $|M'| > |M|$.

Ein Matching $M \subseteq E$ ist ein **(kardinalitäts-)maximales Matching**, wenn es kein Matching M' gibt mit $|M'| > |M|$.

Satz: Mit dem **Greedy-Algorithmus** kann man in Zeit $O(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{Greedy} bestimmen mit

$$|M_{\text{Greedy}}| \geq |M_{\text{max}}| / 2,$$

wobei M_{max} ein kardinalitätsmaximales Matching ist.

GREEDY-MATCHING (G)

- 1: $M \leftarrow \emptyset$
 - 2: **while** $E \neq \emptyset$ **do**
 - 3: wähle eine beliebige Kante $e \in E$
 - 4: $M \leftarrow M \cup \{e\}$
 - 5: lösche e und alle inzidenten Kanten in G
-

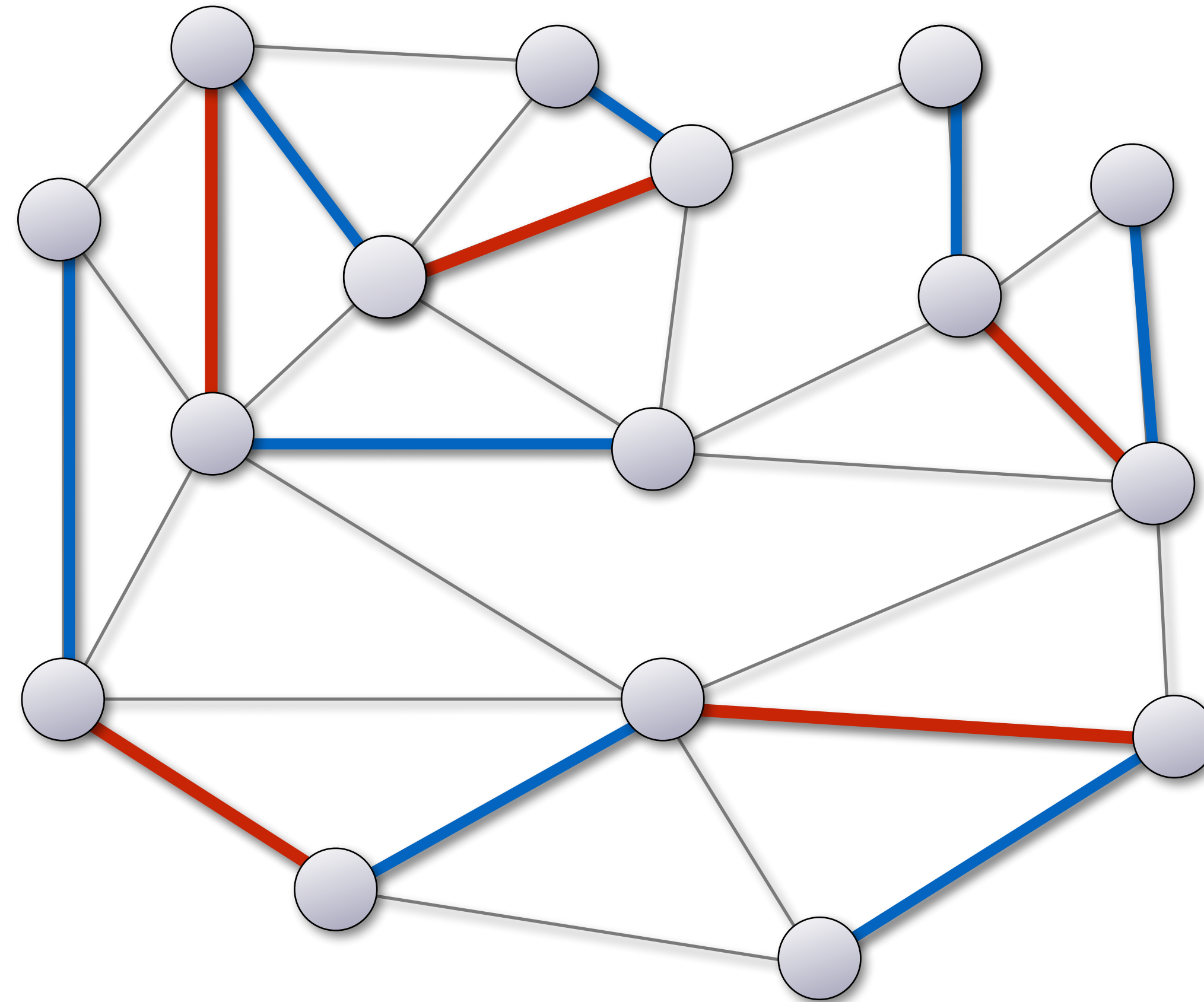
Satz: Mit dem **Greedy-Algorithmus** kann man in Zeit $O(|E|)$ ein inklusionsmaximales Matching M_{Greedy} bestimmen mit

$$|M_{\text{Greedy}}| \geq |M_{\text{max}}| / 2,$$

wobei M_{max} ein kardinalitätsmaximales Matching ist.

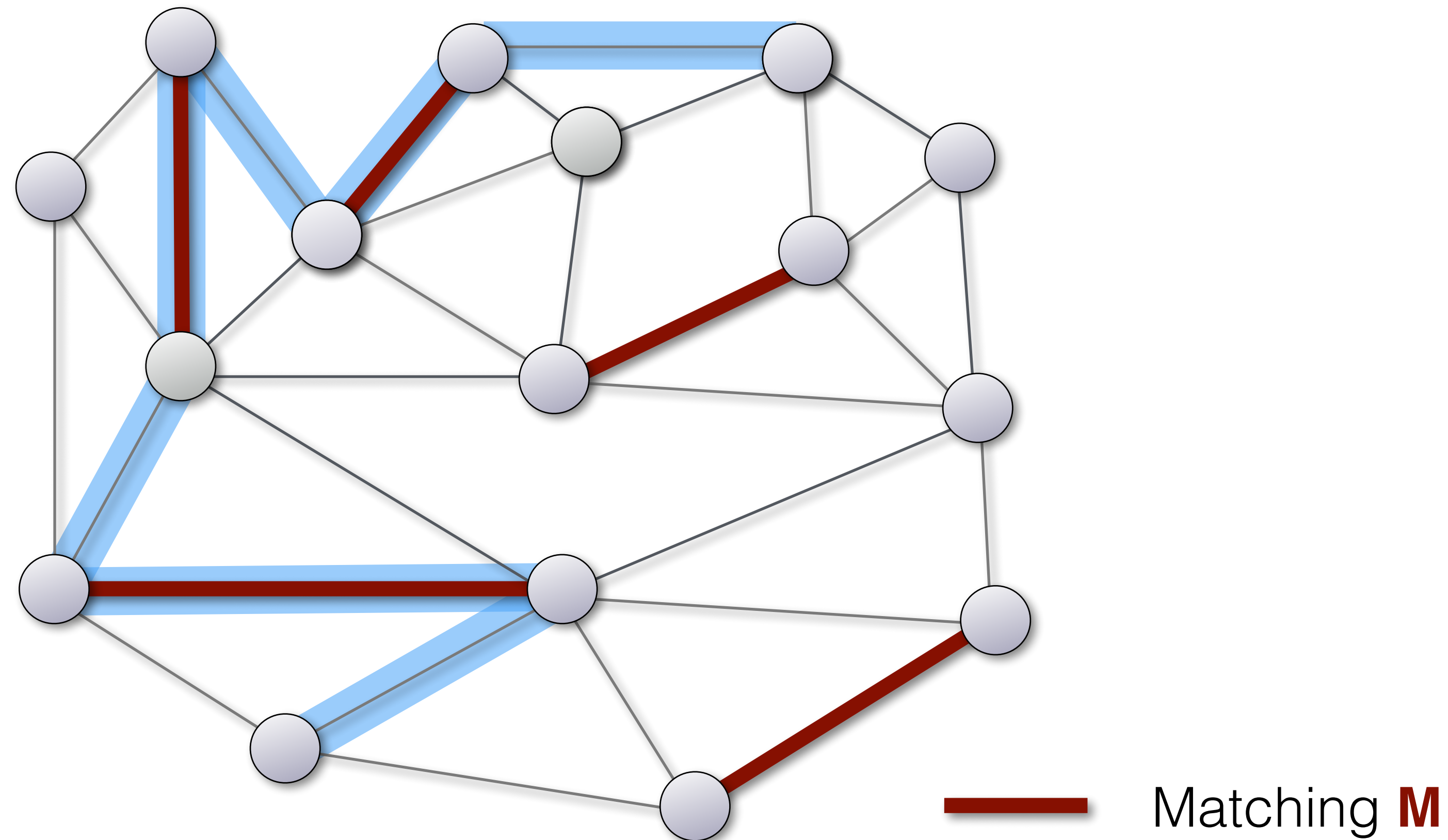
M_{Greedy}

M_{max}



Beobachtung:

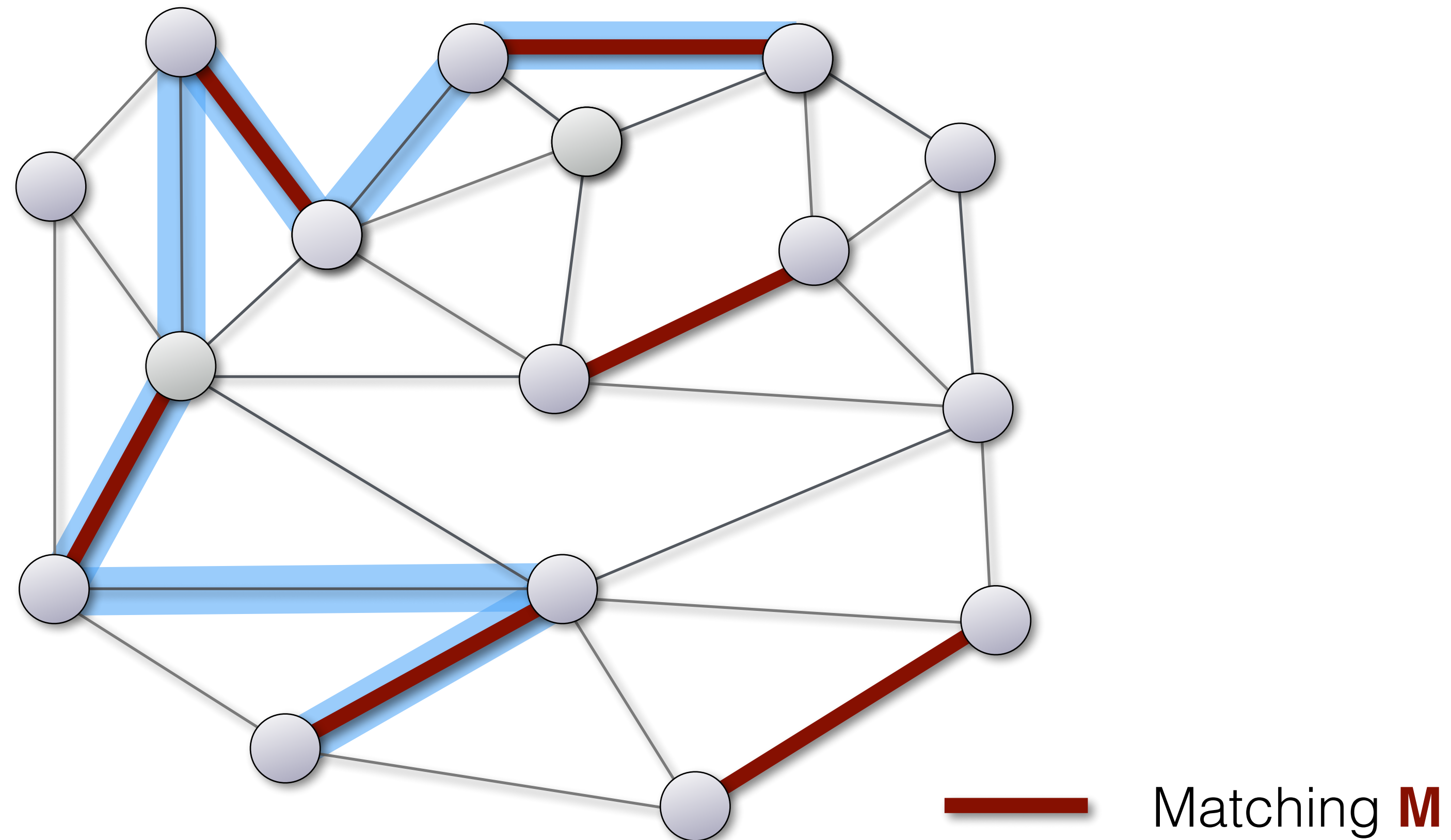
- für jede Kante in M_{max} gilt: mindestens einer der beiden Endpunkte wird von einer Kante aus M_{Greedy} überdeckt
(denn sonst könnten wir die Kante zu M_{Greedy} hinzufügen)
- jede Kante in M_{Greedy} kann höchstens zwei Kanten aus M_{max} überdecken



Ein **M-augmentierender Pfad** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus M und nicht aus M enthält und der in von M nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *tauschen* entlang M können wir das Matching vergrößern

augmentierende Pfade



Ein **M-augmentierender Pfad** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus M und nicht aus M enthält und der in von M nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *tauschen* entlang M können wir das Matching vergrößern

Konzept der augmentierenden Pfade:

⇒ $O(|V| \cdot |E|)$ für bipartite Graphen

State of the Art Matching:

$O(|E|^{1+o(1)})$ für bipartite Graphen

$O(|V|^{1/2} \cdot |E|)$ für generelle Graphen

Der Satz von Hall (Heiratssatz)



Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

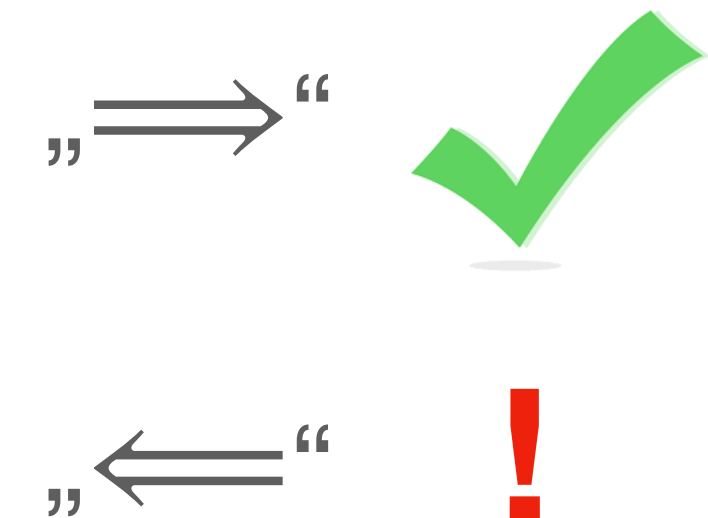
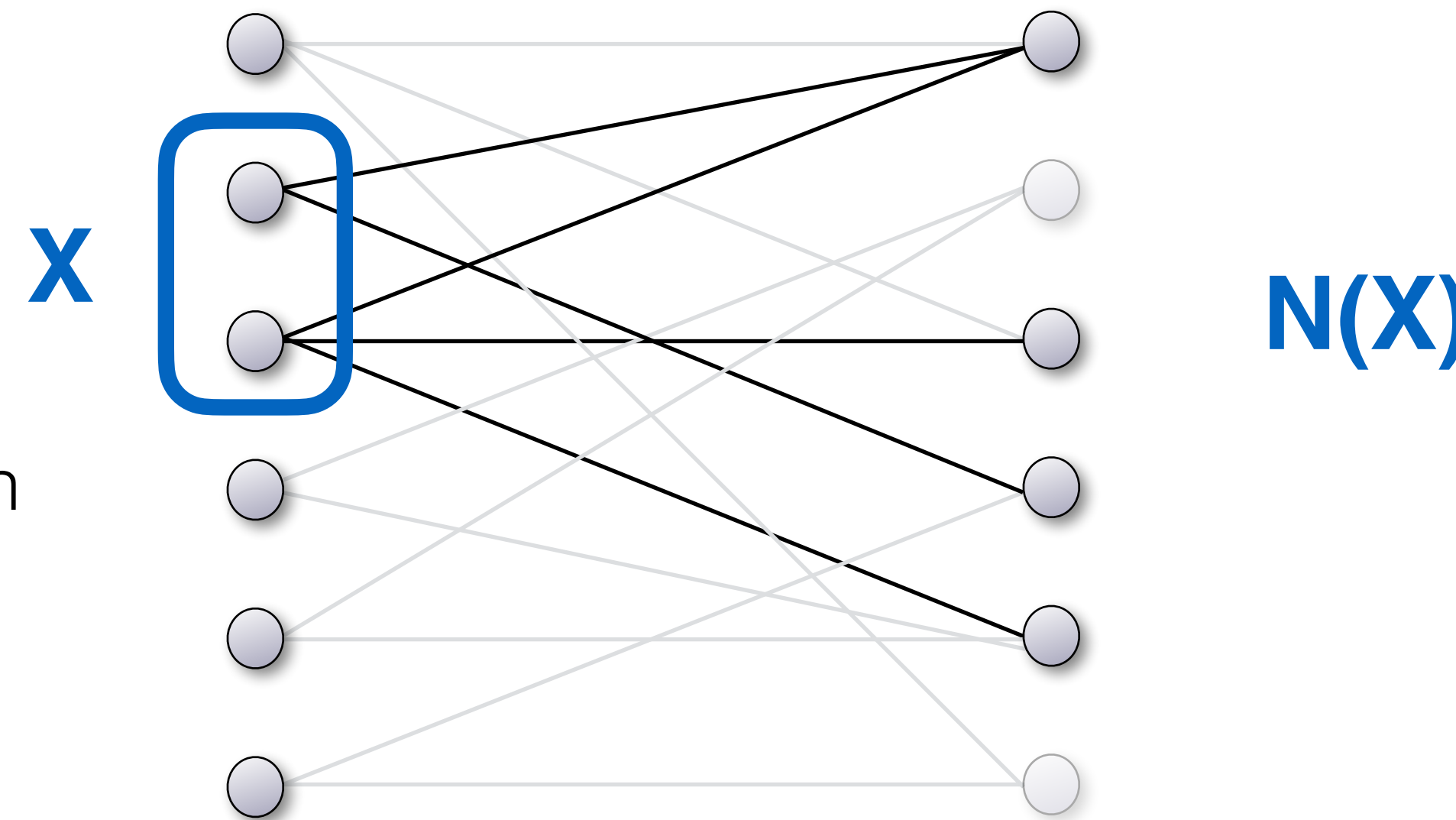
Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$$



Philip Hall
(1904-1982)

muss für **jede**
Teilmenge gelten



Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$$



Philip Hall
(1904-1982)

Beweis: **Induktion über $a = |A|$**

Induktionsverankerung: **$a = 1$:** ✓

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen:

*Satz gilt für alle bipartiten
Graphen mit $|A| \leq a-1$*

\Rightarrow

*Satz gilt für alle bipartiten
Graphen mit $|A| = a$*

“ $a-1 \Rightarrow a$ “

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein bipartiter Graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)| \quad (*)$$



Philip Hall
(1904-1982)

Beweis: “ $a-1 \Rightarrow a$ “ Betrachte *beliebigen* Graphen mit $|A|=a$:

1.Fall: $\forall \emptyset \neq X \subseteq A : |X| < |N(X)|$

- Wähle beliebige Kante $\{x,y\}$ und lösche x, y und alle inzidenten Kanten.
- Zeige dass der verbleibende Graph die Bedingung (*) erfüllt.

2.Fall: $\exists \emptyset \neq X_0 \subseteq A : |X_0| = |N(X_0)|$

- Betrachte die beiden durch $X_0 \cup N(X_0)$ bzw $A \setminus X_0 \cup B \setminus N(X_0)$ induzierten Graphen
- Zeige dass beide Graphen die Bedingung (*) erfüllen.

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein **bipartiter** Graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$$



Philip Hall
(1904-1982)

Korollar: (Frobenius)

Für alle k gilt: jeder k -reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.



Ferdinand Georg Frobenius
(1849 – 1917)

Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Theorem: (Hall, 1935)

Ein bipartiter graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall A' \subseteq A : |A'| \leq |N(A')|$$



Philip Hall
(1904-1982)

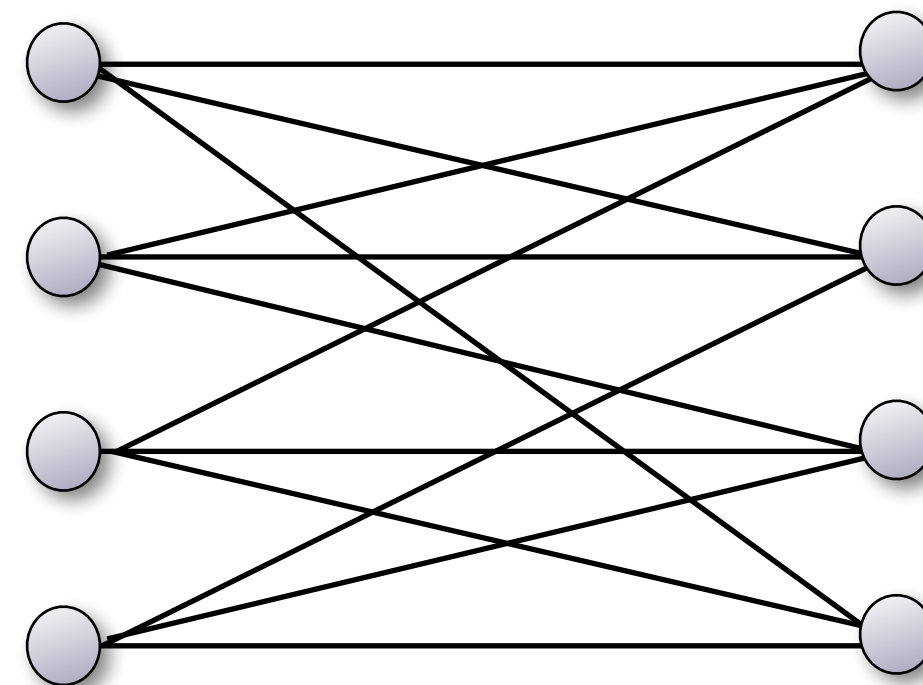
Korollar: (Frobenius, 1917)

Für alle k gilt: jeder k -reguläre bipartite graph enthält ein perfektes Matching.

Es gilt sogar: Graph ist Vereinigung von perfekten Matchings.



Ferdinand Georg Frobenius
(1849 – 1917)



Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Theorem: (Hall, 1935)

Ein bipartiter graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall A' \subseteq A : |A'| \leq |N(A')|$$



Philip Hall
(1904-1982)

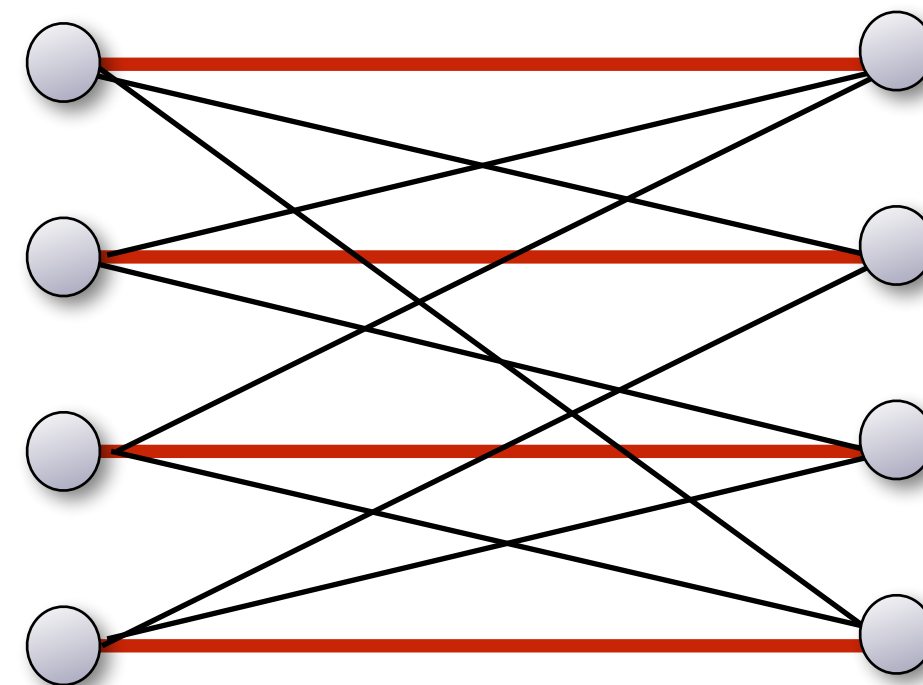
Korollar: (Frobenius, 1917)

Für alle k gilt: jeder k -reguläre bipartite graph enthält ein perfektes Matching.

Es gilt sogar: Graph ist Vereinigung von perfekten Matchings.



Ferdinand Georg Frobenius
(1849 – 1917)



Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Theorem: (Hall, 1935)

Ein bipartiter graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall A' \subseteq A : |A'| \leq |N(A')|$$



Philip Hall
(1904-1982)

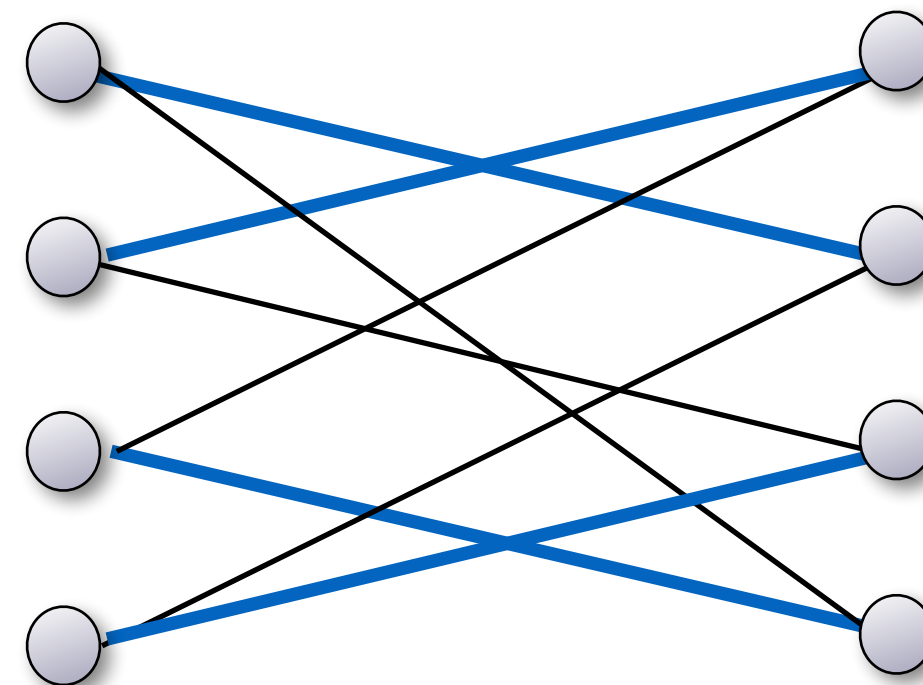
Korollar: (Frobenius, 1917)

Für alle k gilt: jeder k -reguläre bipartite graph enthält ein perfektes Matching.

Es gilt sogar: Graph ist Vereinigung von perfekten Matchings.



Ferdinand Georg Frobenius
(1849 – 1917)



Der Satz von Hall (Heiratssatz)

Satz: (Hall, Heiratssatz)

Ein **bipartiter** Graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein

Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw

$$\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$$



Philip Hall
(1904-1982)

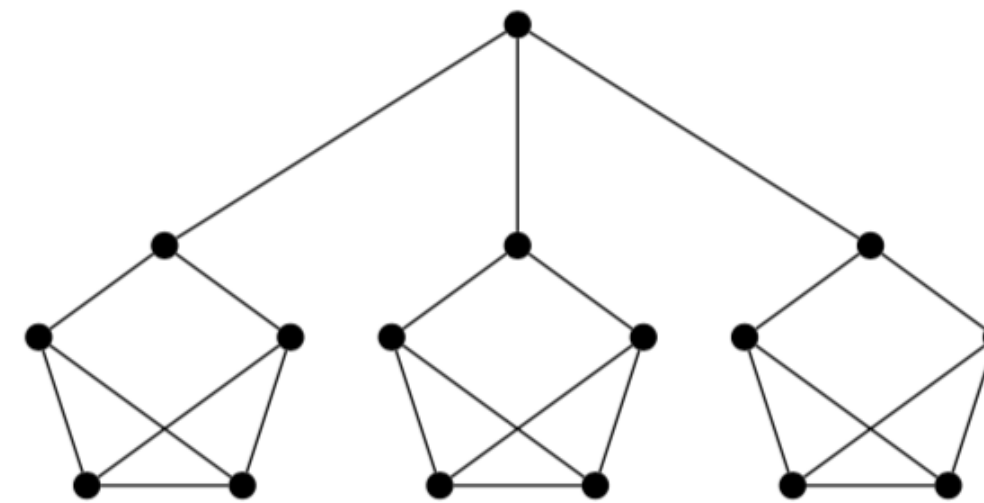
Korollar: (Frobenius)

Für alle k gilt: jeder k -reguläre bipartite Graph enthält ein perfektes Matching.



Ferdinand Georg Frobenius
(1849 – 1917)

Beachte: bipartit ist wichtig!



Satz: In 2^k -regulären bipartiten Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ ein perfektes Matching bestimmen.

Man *kann* zeigen:

Satz: In k -regulären bipartiten Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ ein perfektes Matching bestimmen.