Matching-Algorithmen

Matching-Algorithmen

für bipartite Graphen

$O(|V|^{1/2} \cdot |E|)$ Hopcroft-Karp (ungewichtet)

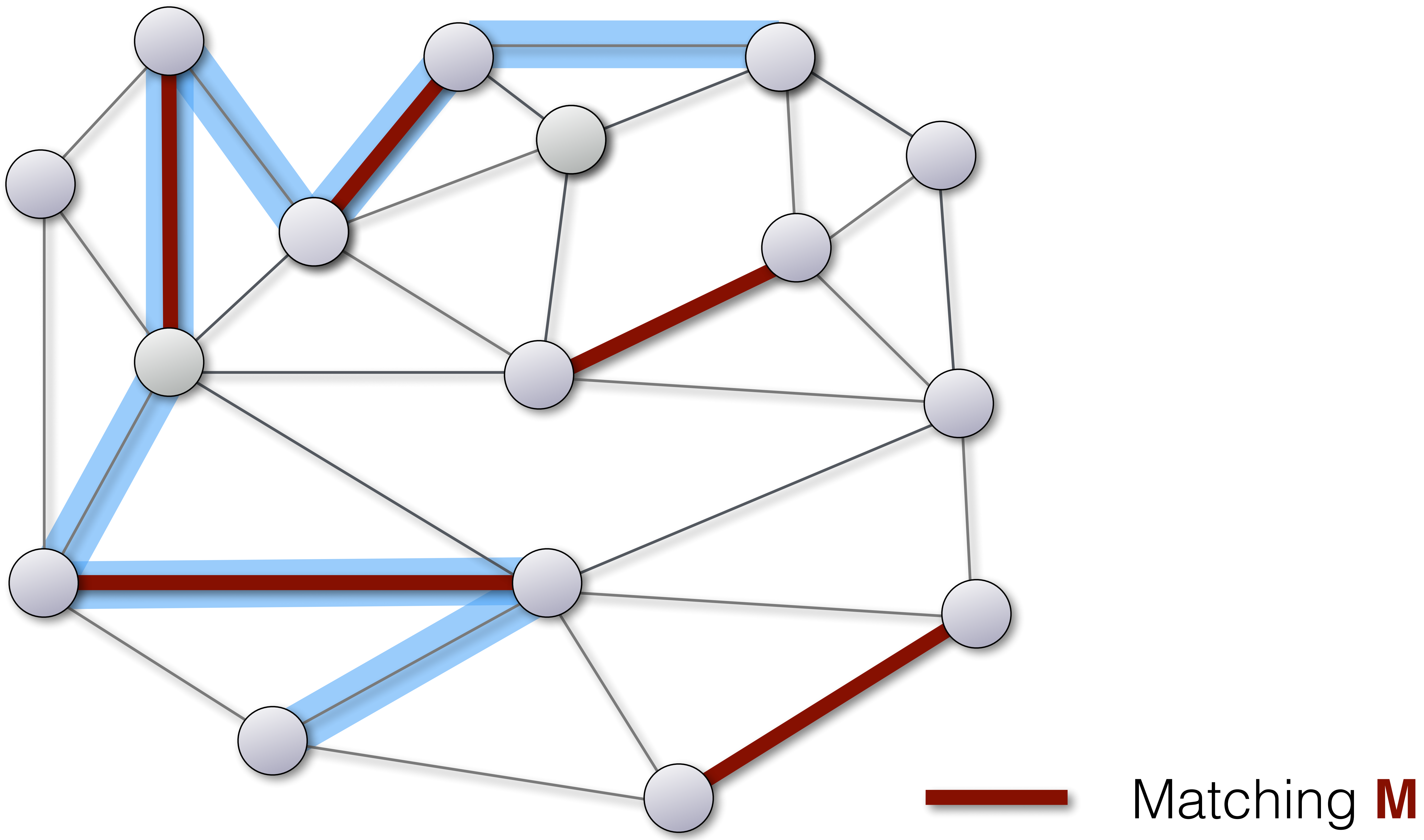
$O(|E|^{1+o(1)})$ (mit polynominellen Gewichte):

für allgemeine Graphen (mit polynominellen Gewichte)

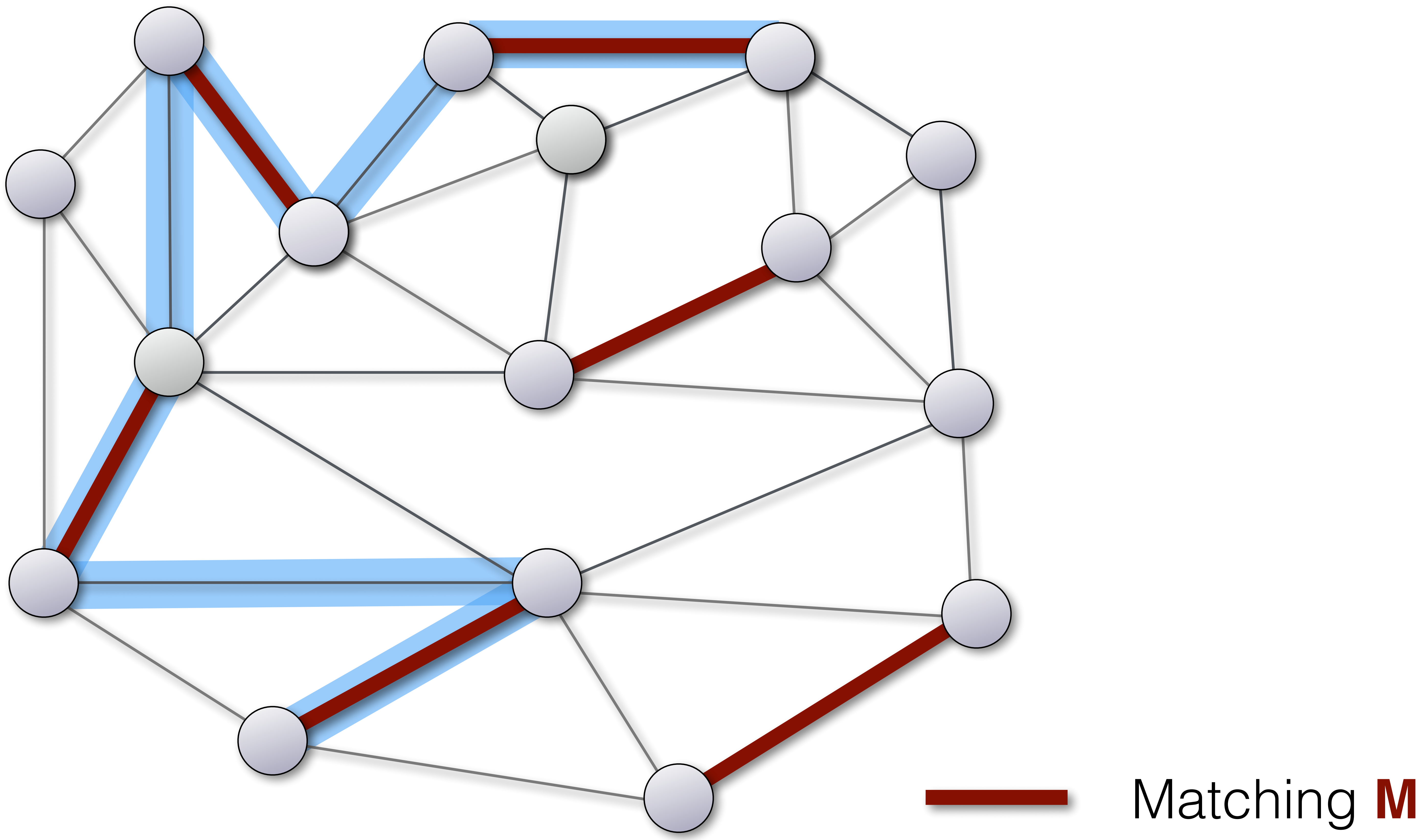
$O(|V|^{1/2} \cdot |E|)$ Micali-Vazirani (ungewichtet) / Gabow-Tarjan

$O(|V|^{2.373})$ mit Matrix-Multiplikation - Mucha, Sankowski (ungewichtet)

augmentierende Pfade



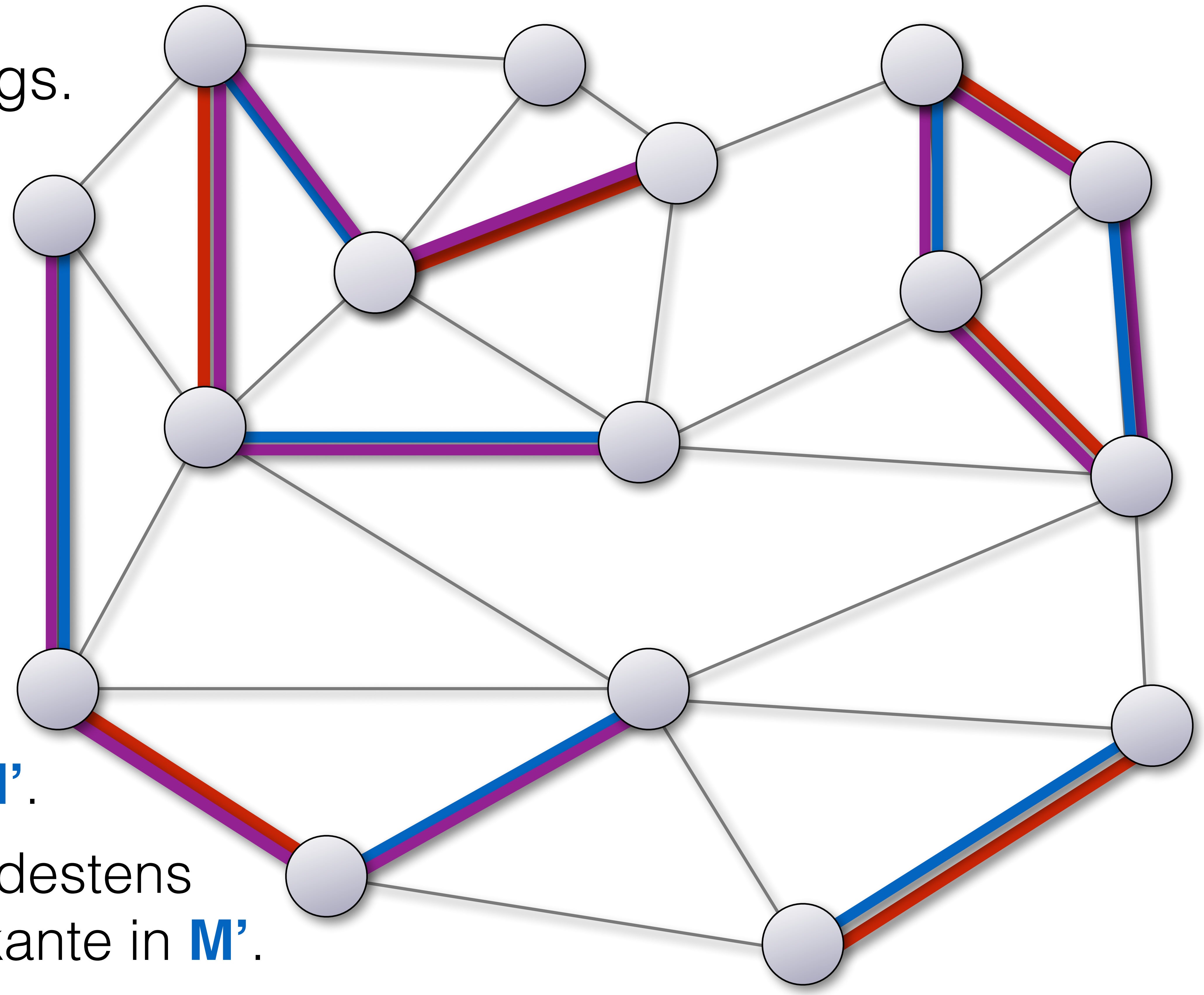
Ein **M-augmentierender Pfad P** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus **M** und nicht aus **M** enthält und der in von **M** nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.



Ein **M-augmentierender Pfad P** ist ein Pfad, der abwechselnd Kanten aus **M** und nicht aus **M** enthält und der in von **M** nicht überdeckten Knoten beginnt und endet.

⇒ durch *Tauschen* entlang M können wir das Matching vergrössern:

$$M' := M \oplus P$$



Seien **M**, **M’** beliebige Matchings.

Betrachte den Teilgraphen
mit Kantenmenge **M ⊕ M’**.

Beobachtungen:

- Jeder Knoten hat Grad ≤ 2.
- ⇒ Kollektion von Pfaden und Kreisen.
- Jeder Pfad/Kreis wechselt ab zwischen Kanten aus **M** und **M’**.
- Falls **|M|** < **|M’|**, so gibt es mindestens einen Pfad mit Start- und Endkante in **M’**.

Gedankenexperiment:
M nicht-maximales Matching (schon bekannt)
M’ maximales Matching (noch unbekannt)

Dann besitzt **M** einen augmentierenden Pfad!

Satz (Berge, 1957): Jedes Matching, das nicht (kardinalitäts-) maximal ist, besitzt einen augmentierenden Pfad.

Algorithmus

Input: Graph $G = (V, E)$
Output: maximales Matching M

Starte mit $M = \varnothing$.
repeat

- Suche augmentierenden Pfad P.
- **if** kein solcher Pfad existiert **then return** M.
- **else** $M := M \oplus P$.

Wie?

Suchen/Finden eines augmentierenden Pfades:

- in bipartiten Graphen in Zeit $O(|V|+|E|)$. Mit BFS, sehen wir gleich.
- in allgemeinen Graphen in Zeit $O(|V|\cdot|E|)$. Blossom-Algorithmus von Edmond, deutlich technischer, sehen wir nicht.

augmentierende Pfade

BFS für alternierende Pfade:

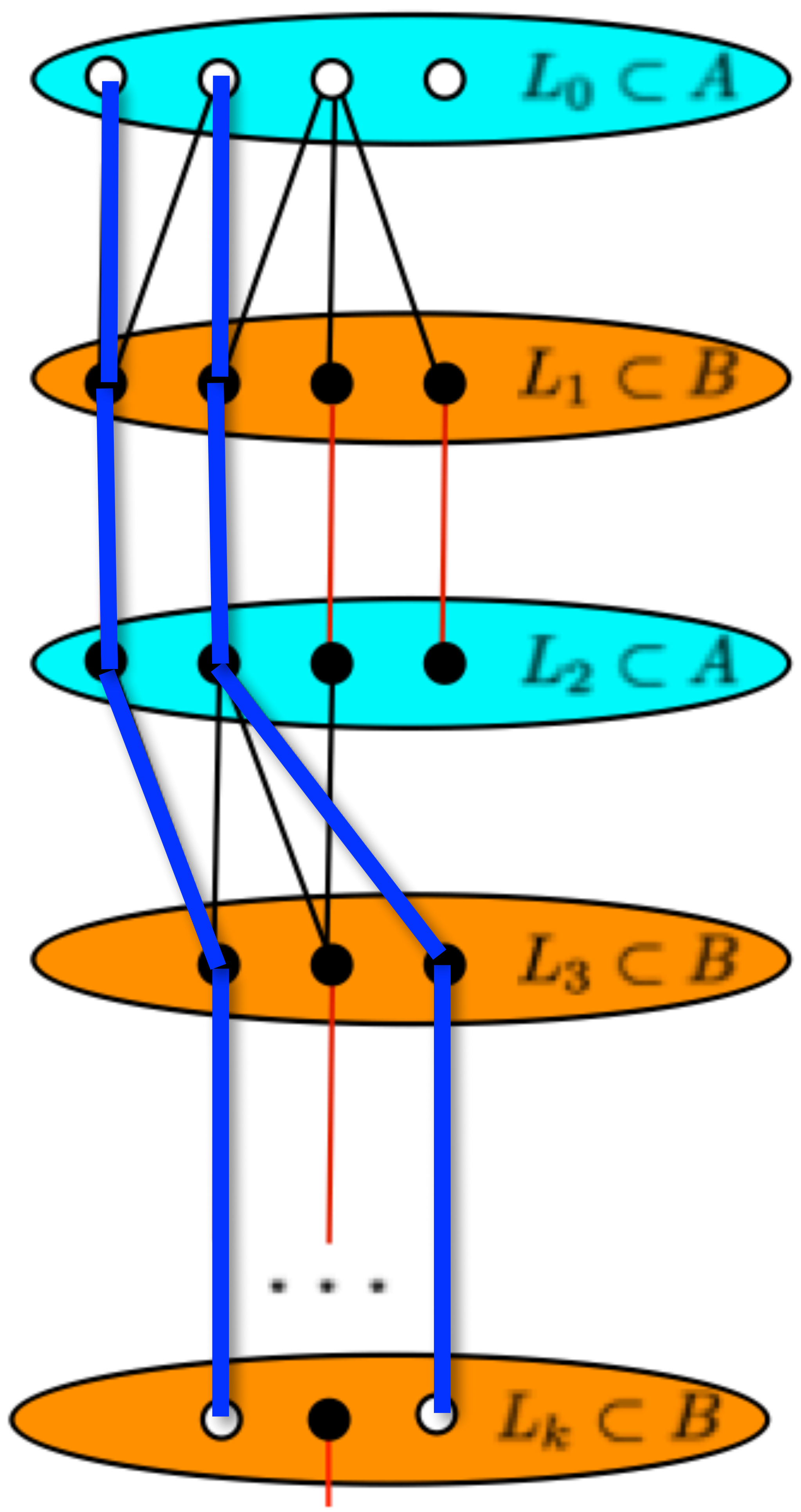
Input: bipartiter Graph $G = (A \uplus B, E)$, Matching M

Output: (kürzester) augmentierender Pfad,
falls solche Pfade existieren

L_0 := {unüberdeckten Knoten aus A}
Markiere Knoten aus L_0 als besucht.

for i = 1 **to** n
  if i ungerade **then**
    L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1} via Kanten in $E \setminus M$}
  else (falls i gerade)
    L_i := {unbesuchte Nachbarn von L_{i-1} via Kanten in M}
  Markiere Knoten aus L_i als besucht.

  if ein Knoten v in L_i ist nicht überdeckt
    then return Pfad zu v (backtracking)



Induktion: L_i = {v | der kürzeste alternierende Pfad von L_0 nach v hat Länge i}

Verbesserung: Algorithmus von Hopcroft und Karp

Input: bipartiter Graph $G = (V, E)$
Output: maximales Matching M

Kann man in Zeit $O(|V| + |E|)$ finden.

Starte mit $M = \varnothing$.
repeat bis kein augmentierender Pfad mehr existiert

- k := Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades.
- Finde mehrere disjunkte augmentierende Pfade der Länge k, bis wir eine inklusionsmaximale Menge S solcher Pfade haben. (D.h. man kann keinen weiteren augm. Pfad der Länge k zu S hinzufügen.)
- **for all** P aus S:
  $M := M \oplus P$.

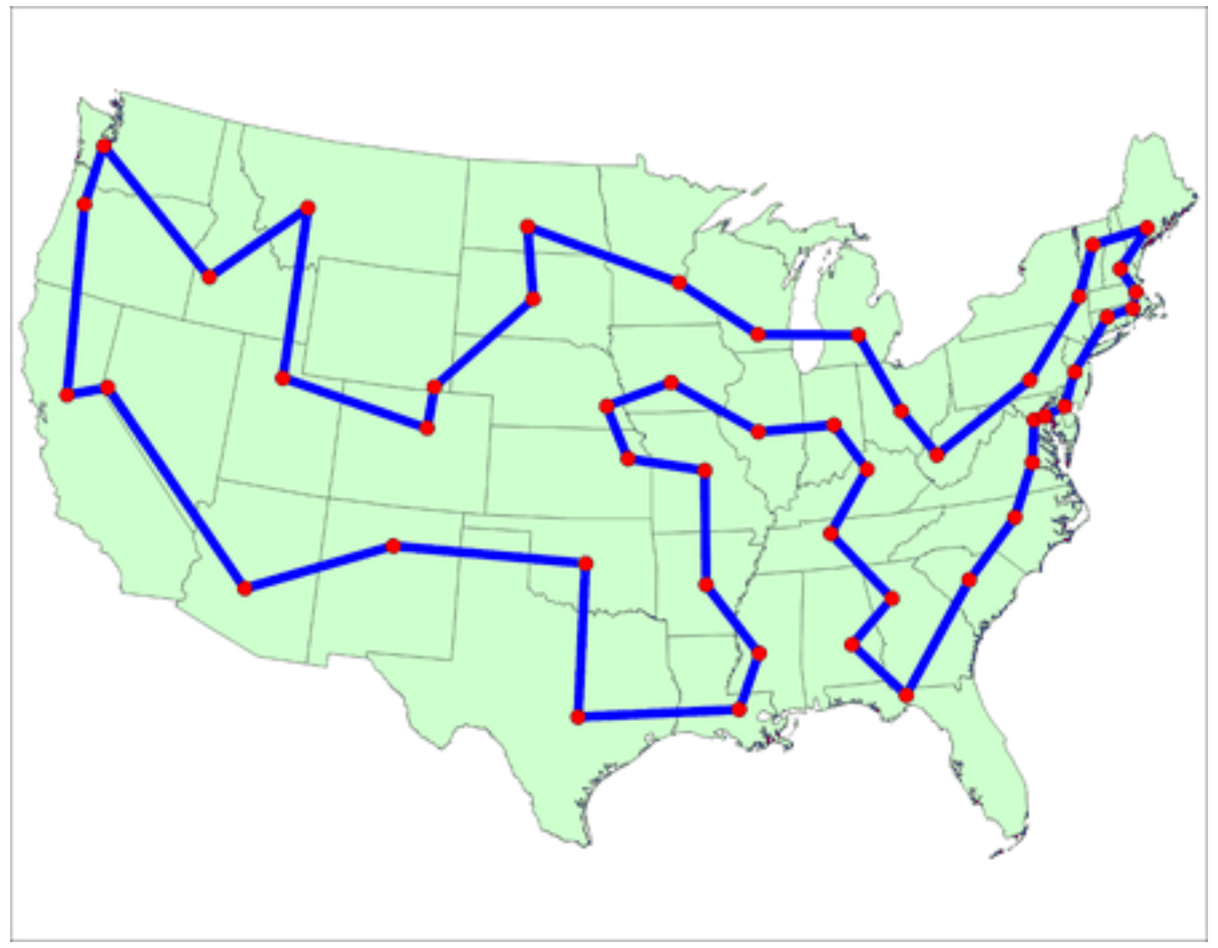
Satz: Der Algorithmus von Hopcroft und Karp durchläuft die repeat-Schleife nur $O(|V|^{1/2})$ Mal. Seine Gesamtlaufzeit ist $O(|V|^{1/2} \cdot (|V|+|E|))$.

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt

Dreiecksungleichung:

$$\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$$



aus MST & Matching & Eulertour kann man eine 3/2-Approximation ableiten

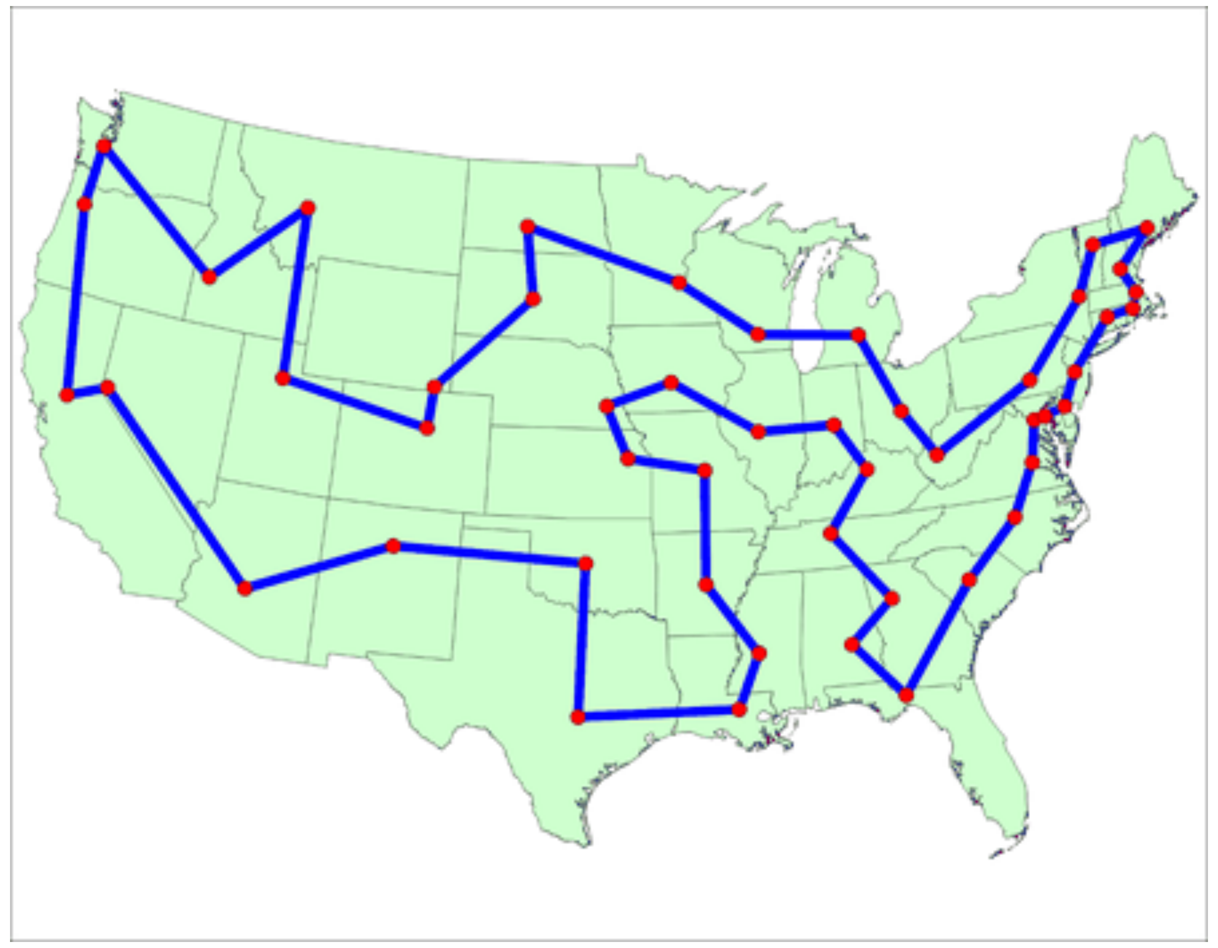
Christofides (1976)

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt

Dreiecksungleichung:

$$\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$$



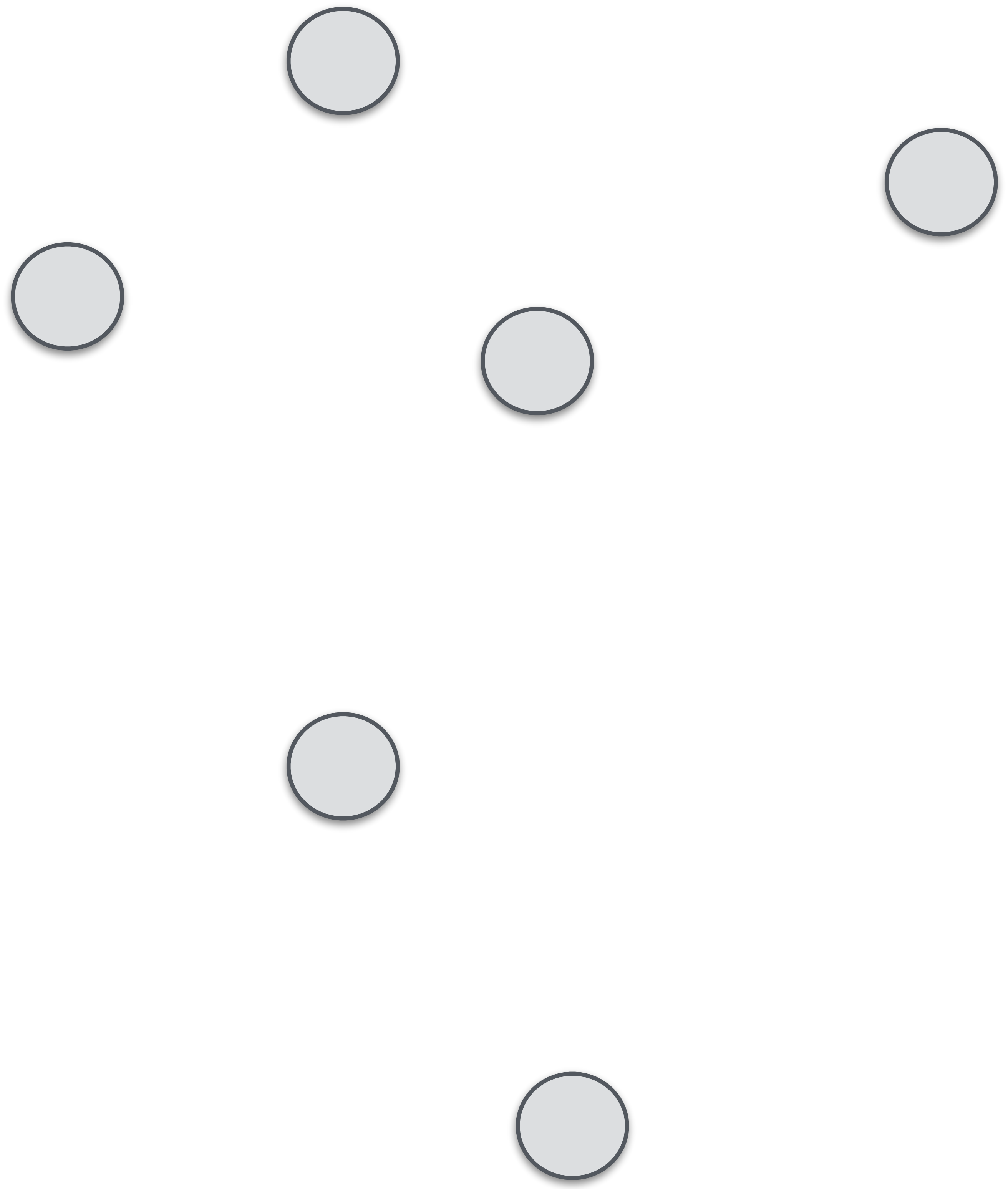
aus MST & Matching & Eulertour kann man eine 3/2-Approximation ableiten

Christofides (1976)

- **STOC '21:** Karlin, Klein, Gharan finden in polynomieller Zeit eine $(3/2 - 10^{-36})$-Approximation
- Geht es besser? Vermutlich. **Aber:** Es ist NP-schwer, eine 1.008-Approximation zu finden.

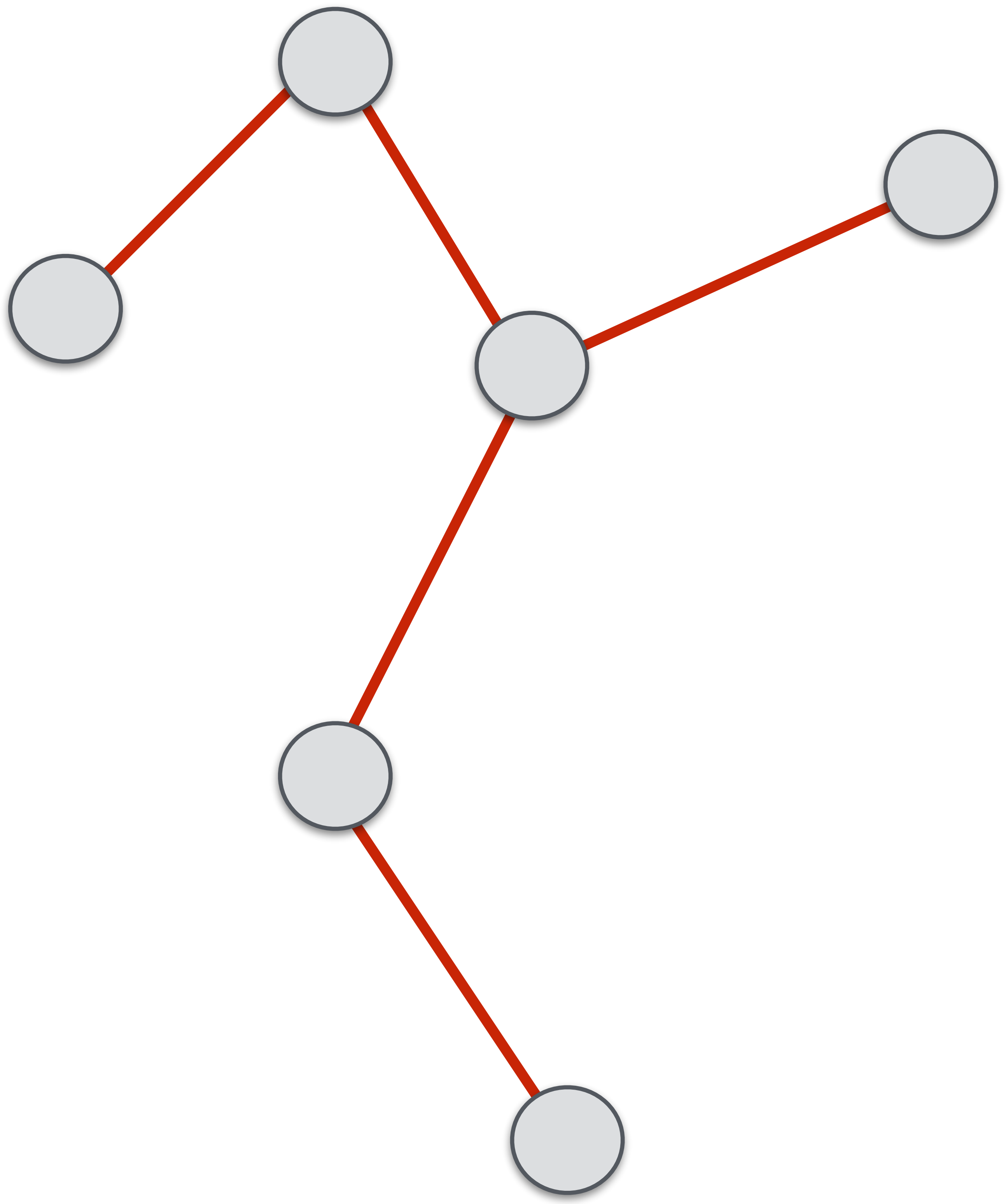
Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$

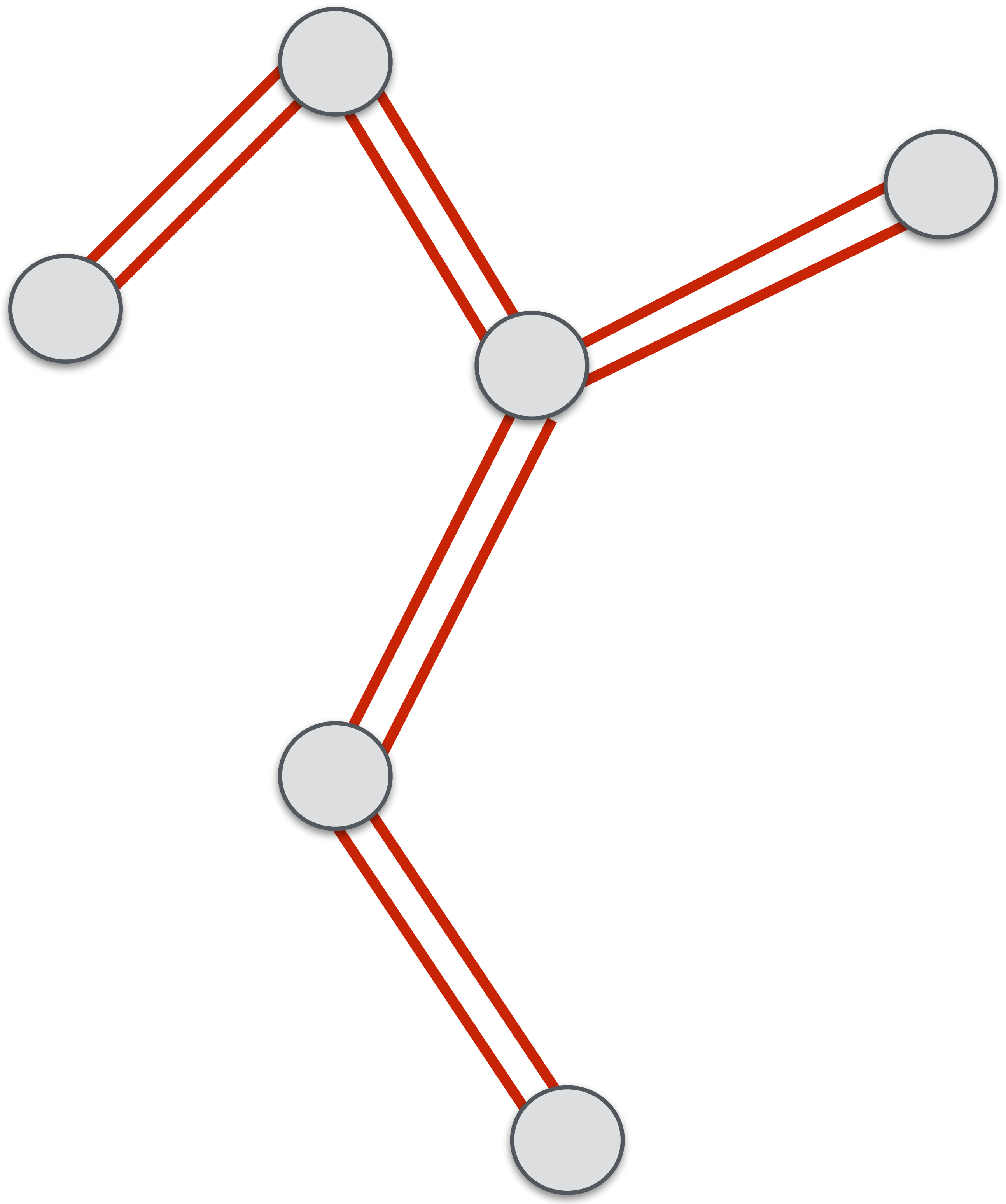


1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

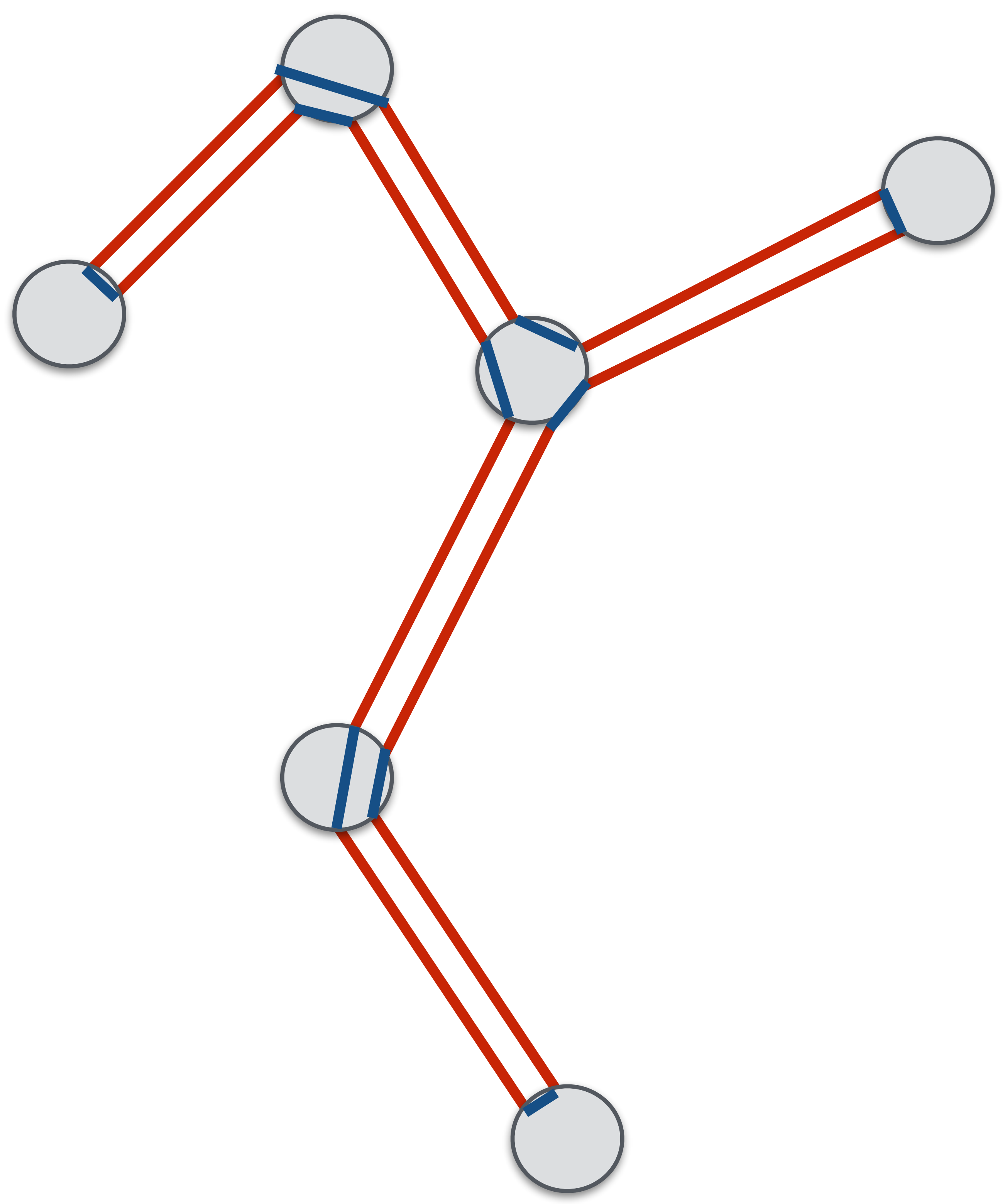
es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

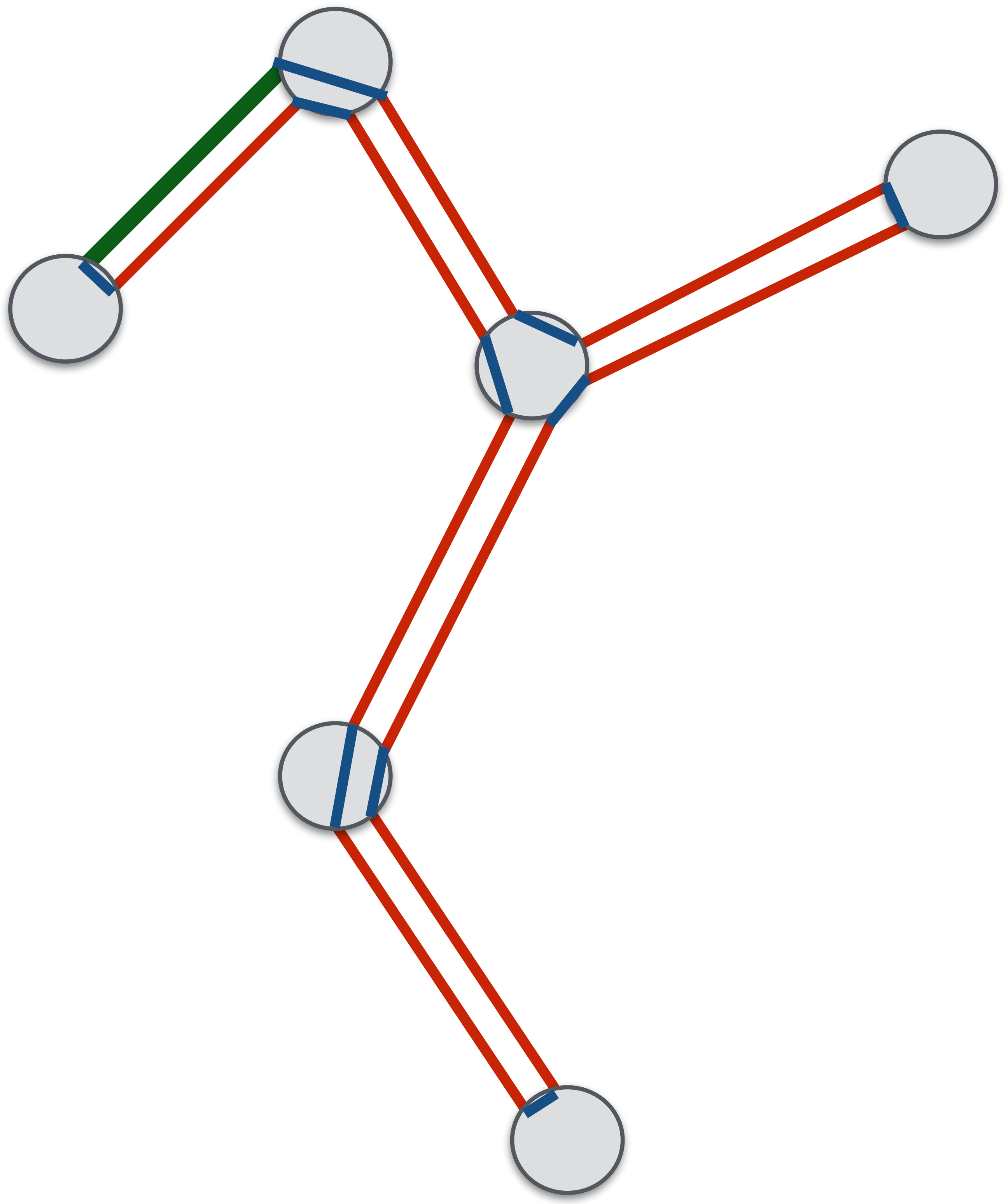
   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

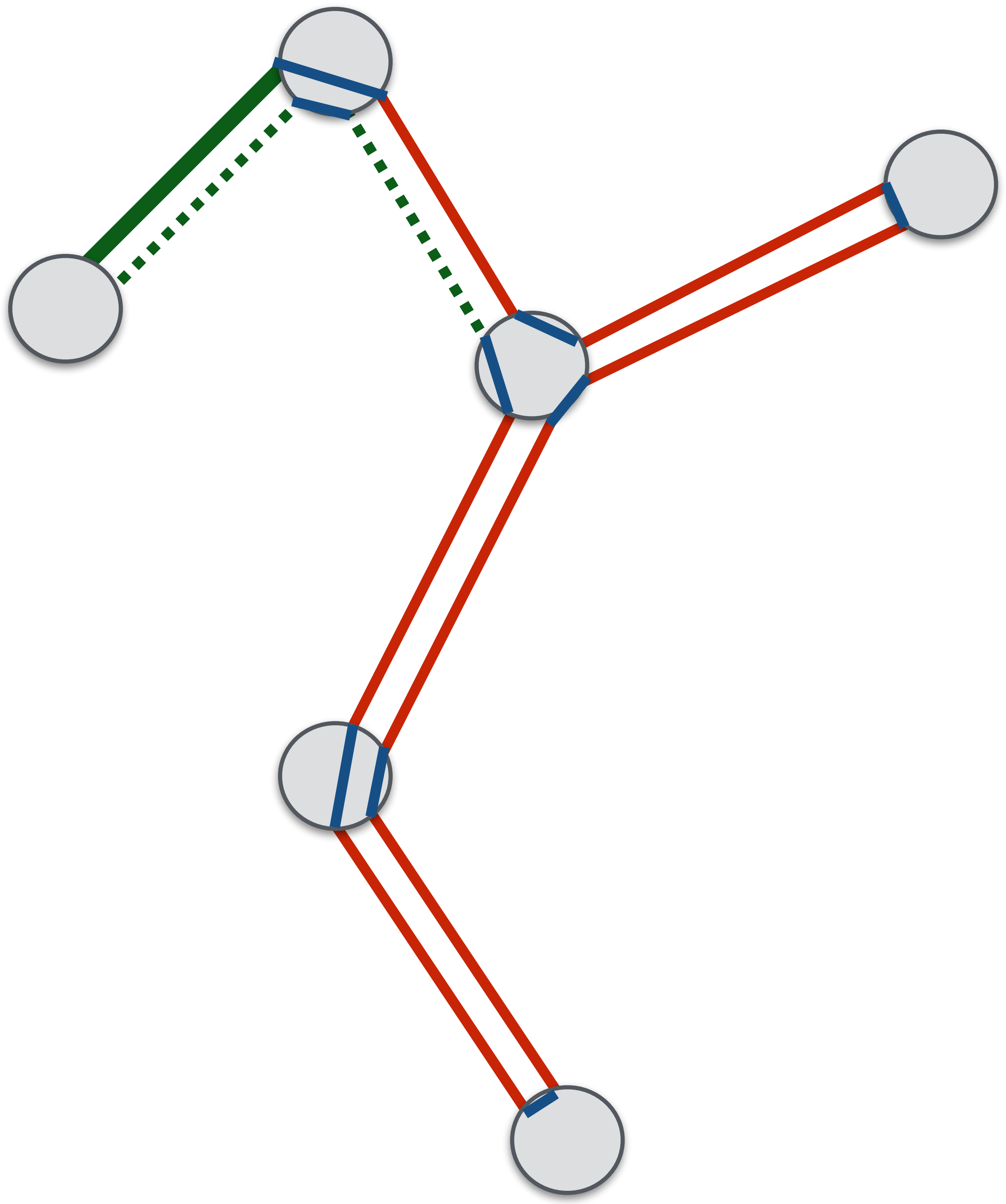
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

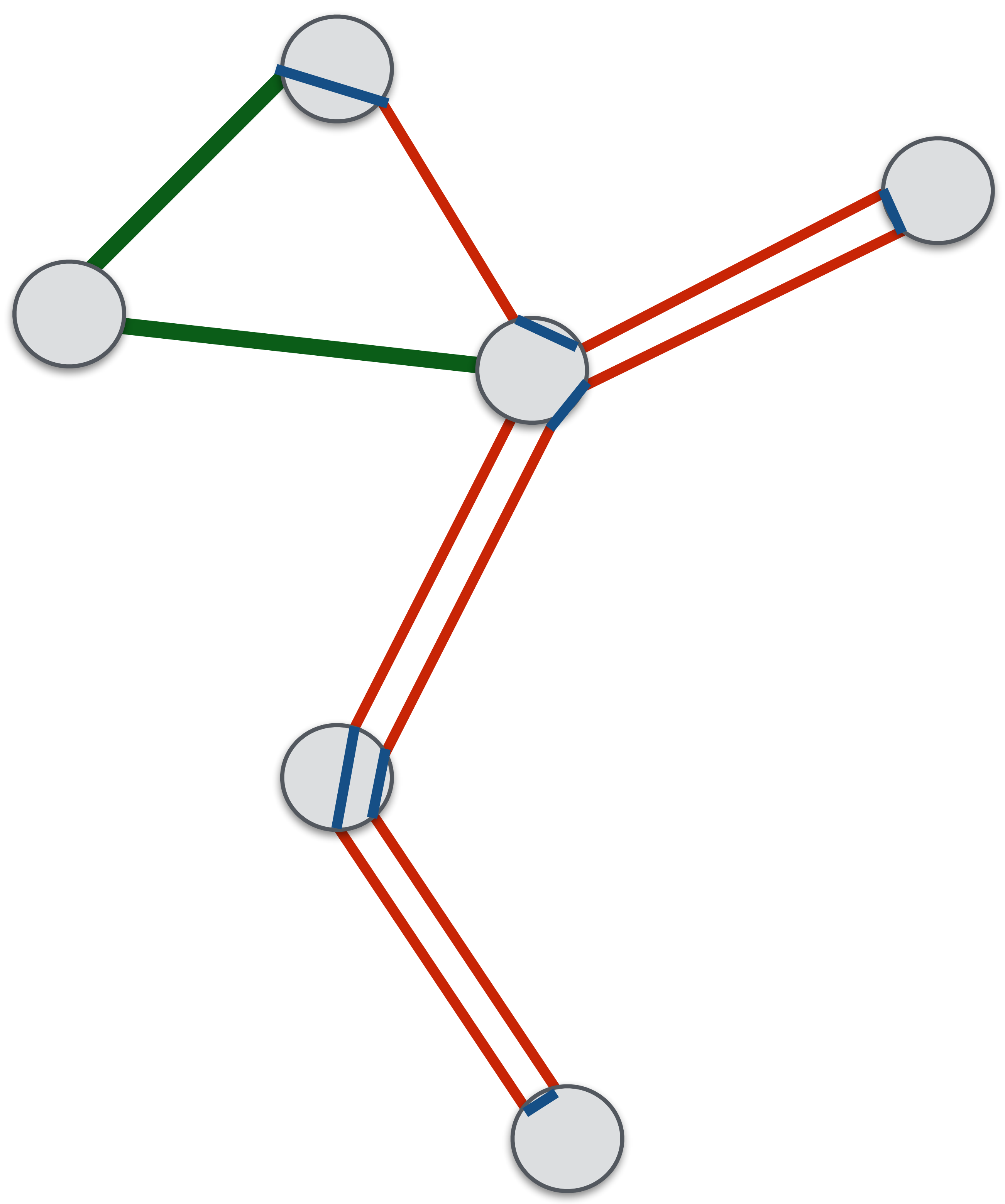
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

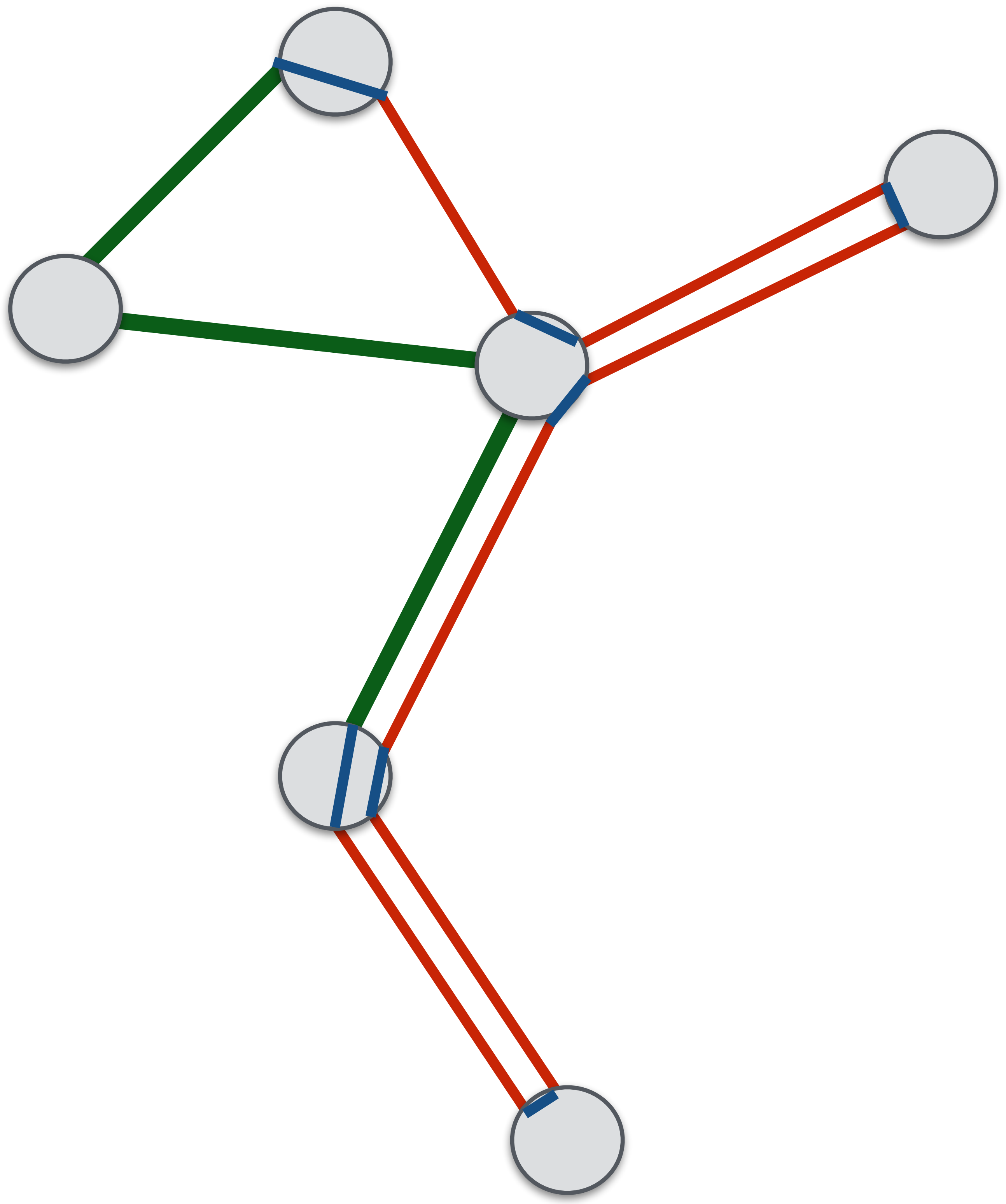
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(T) \leq \text{opt}(K_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(T) \leq 2\text{opt}(K_n, \ell)$

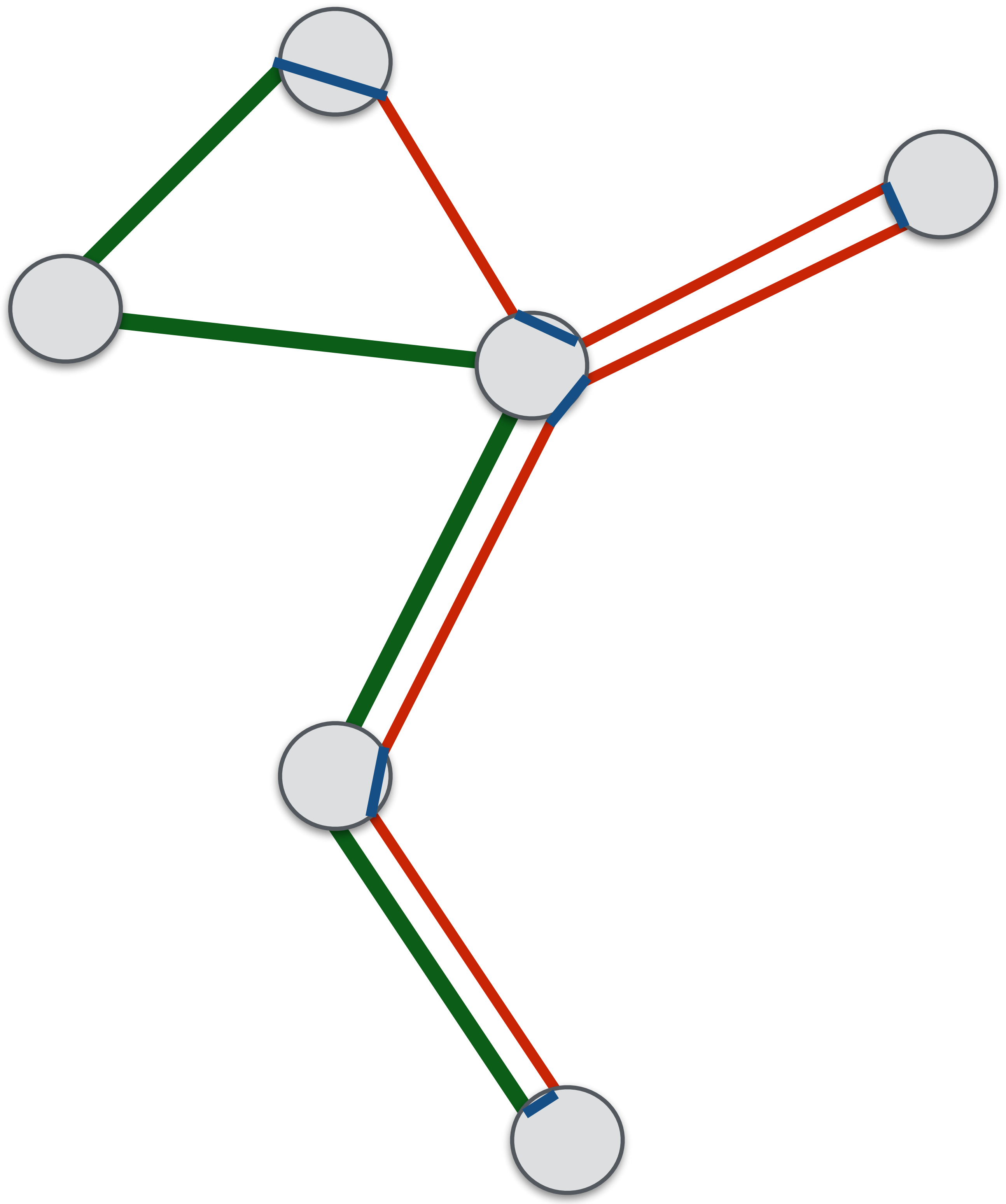
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(W) = 2\ell(T) \leq 2\text{opt}(K_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

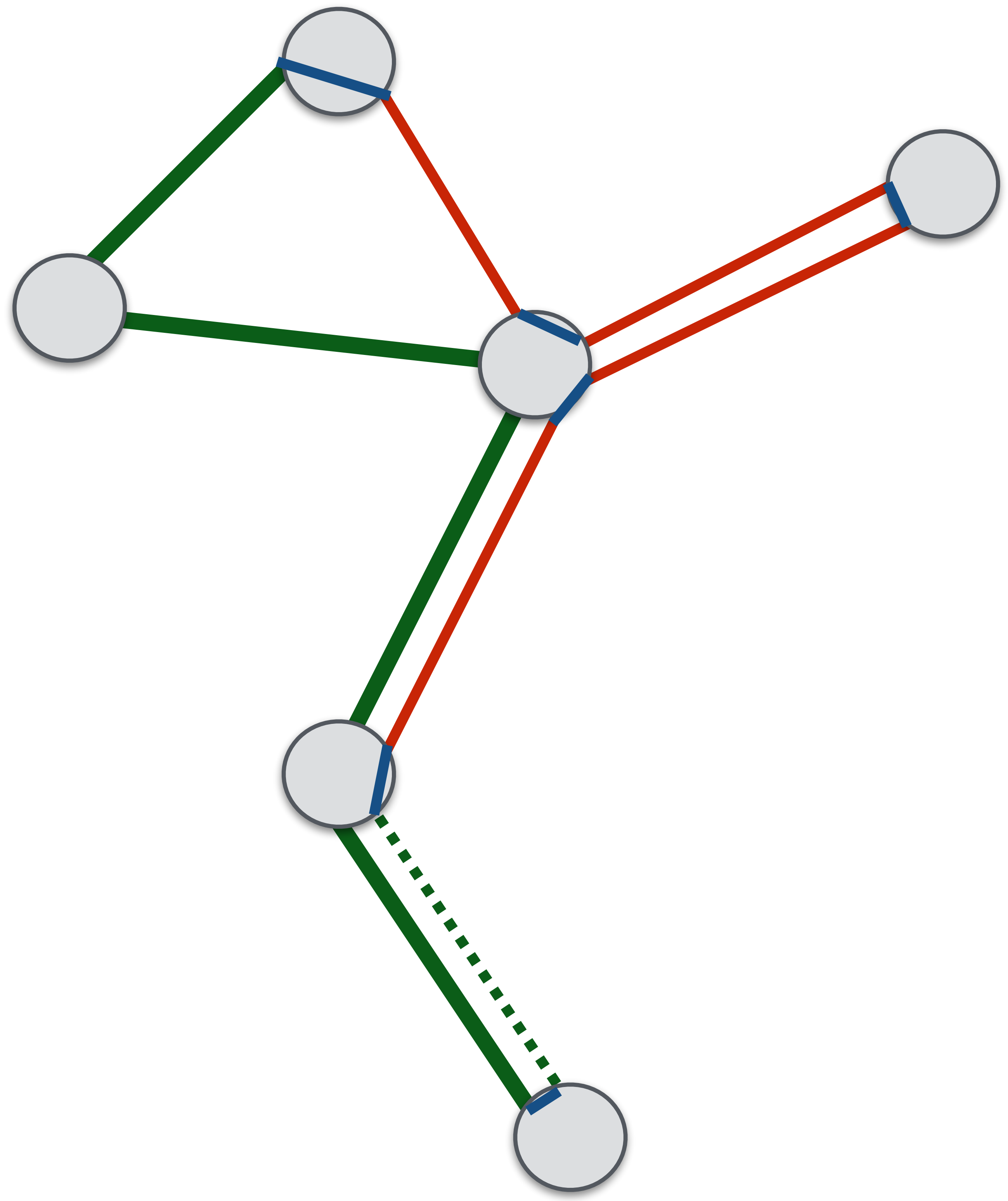
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(T) \leq opt(K_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(T) \leq 2opt(K_n, \ell)$

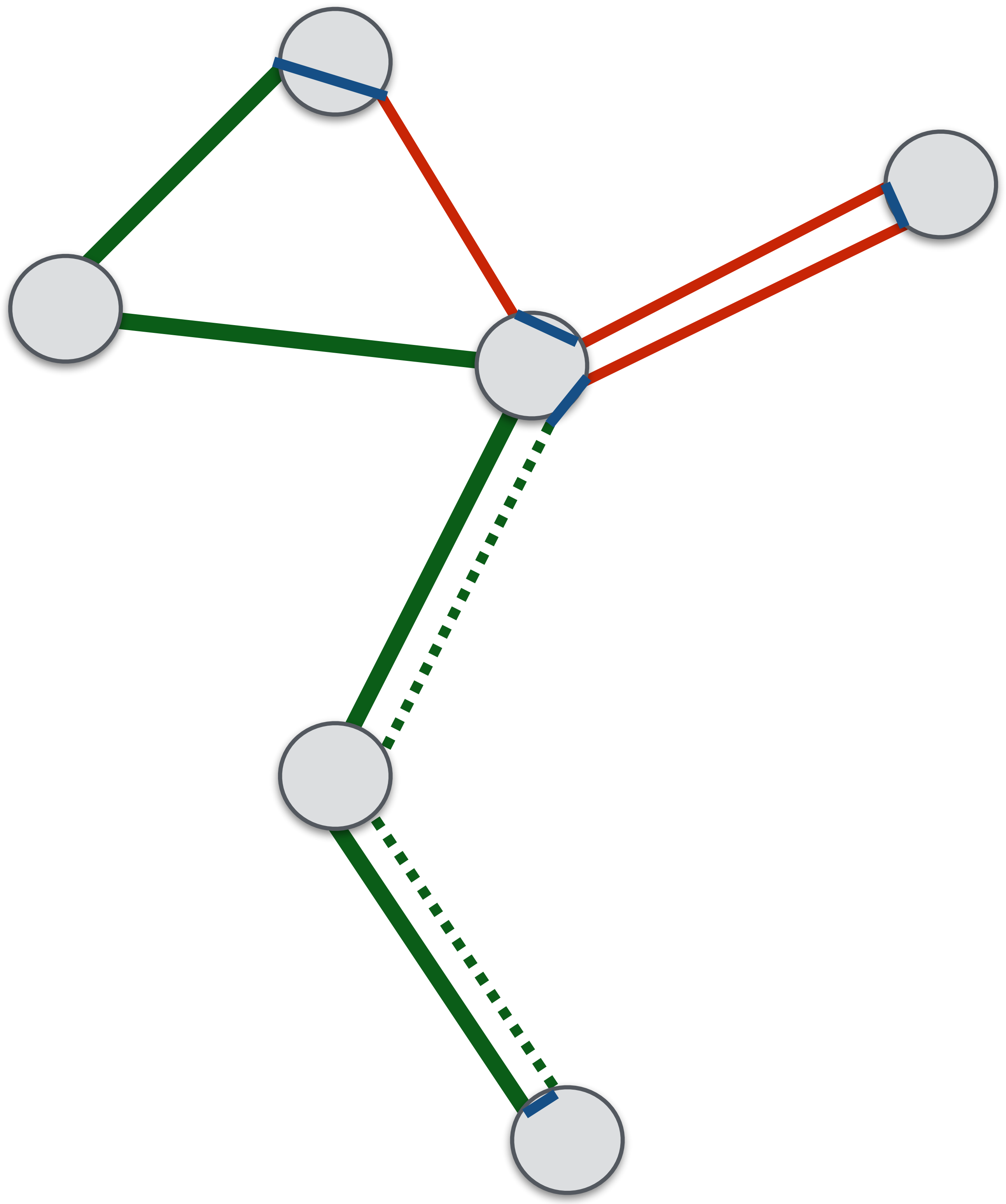
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(W) = 2\ell(T) \leq 2opt(K_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

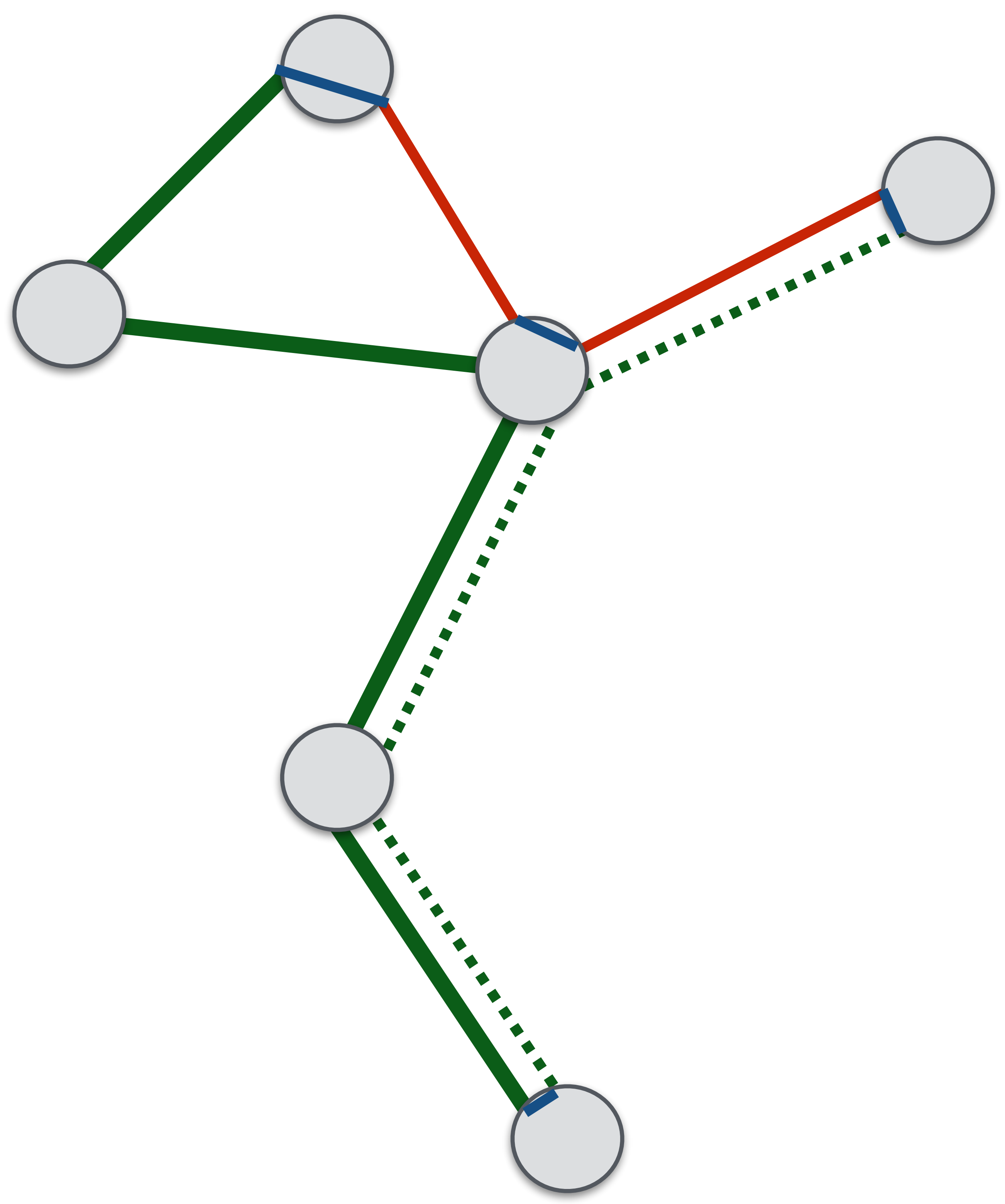
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

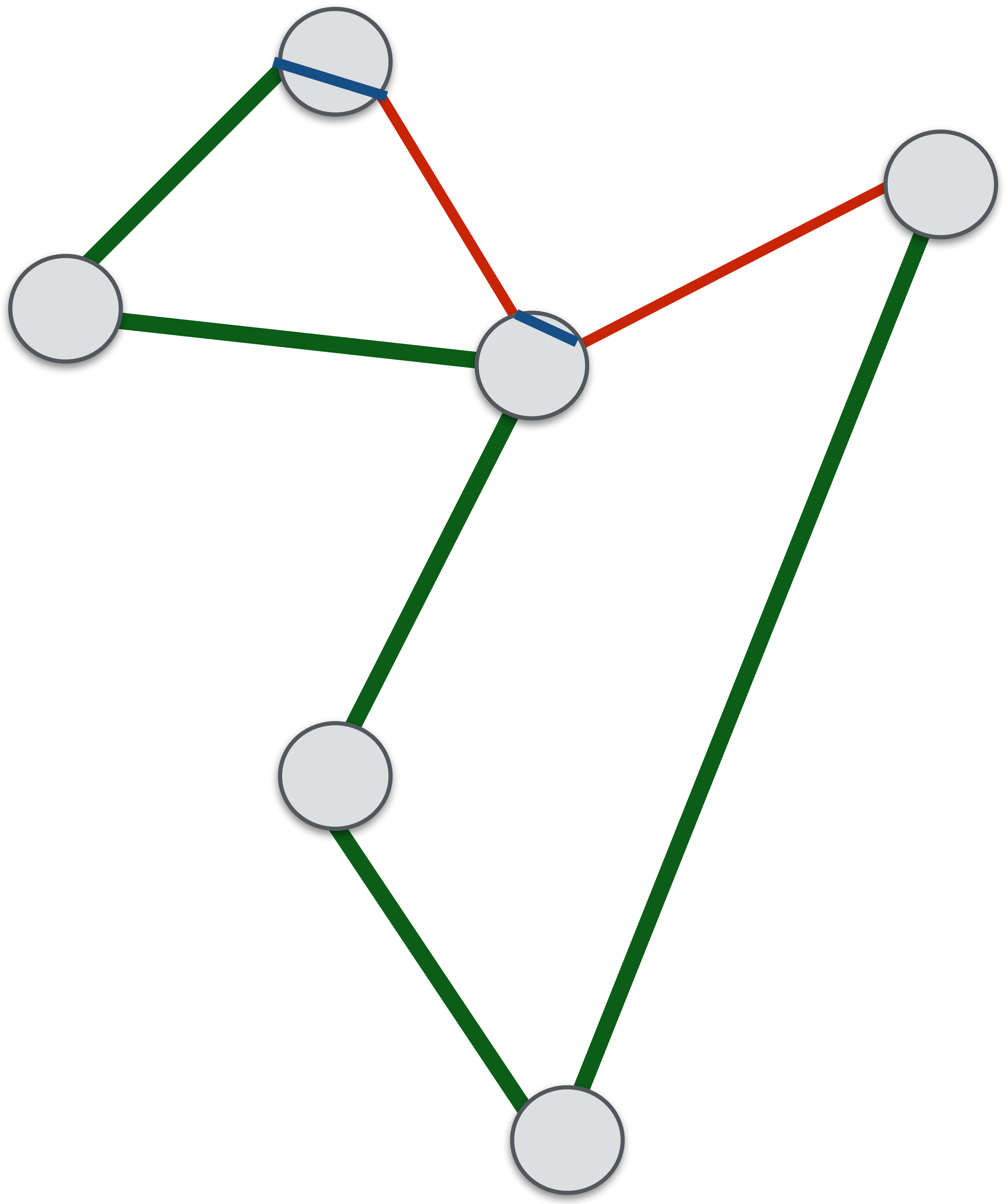
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

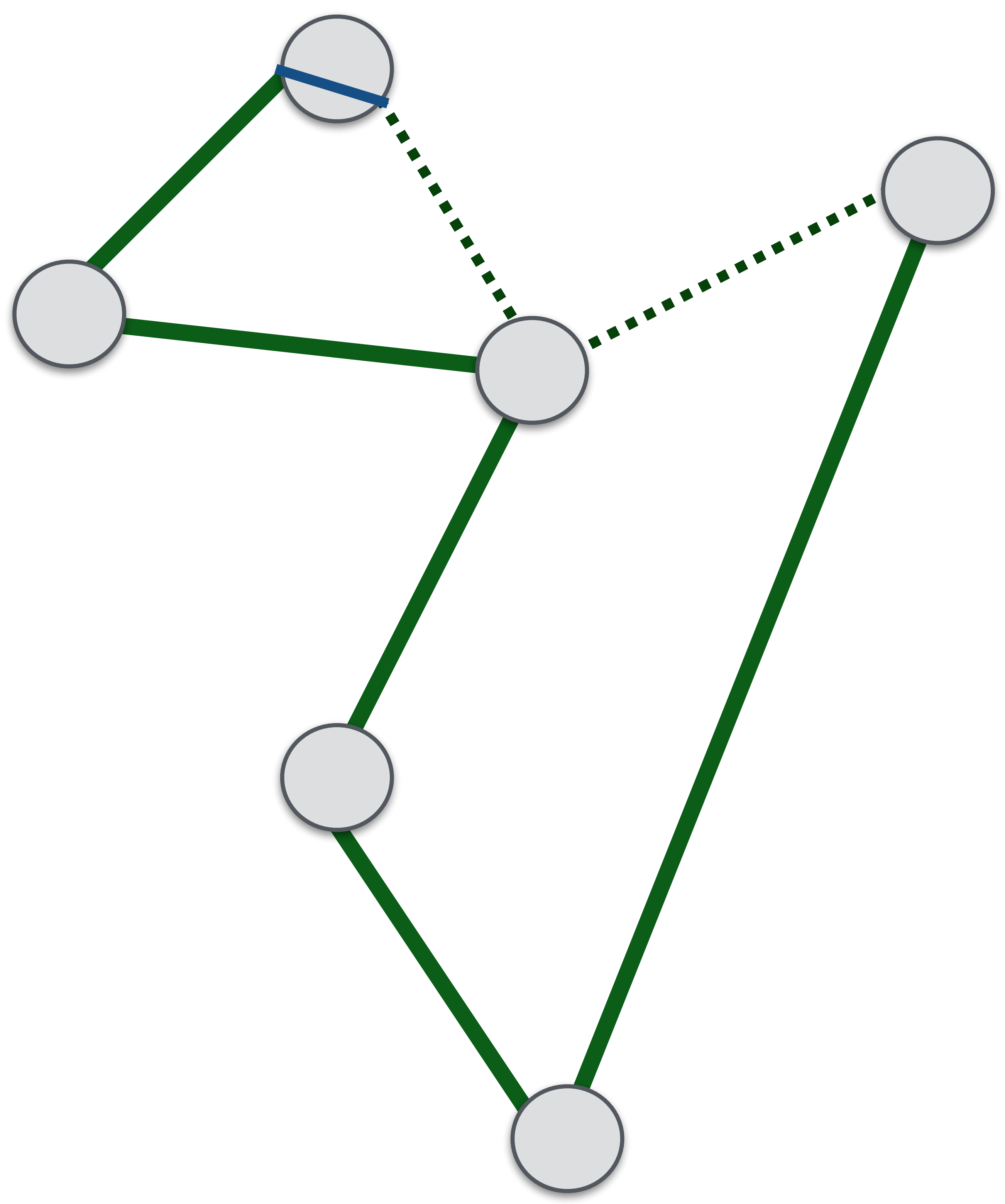
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

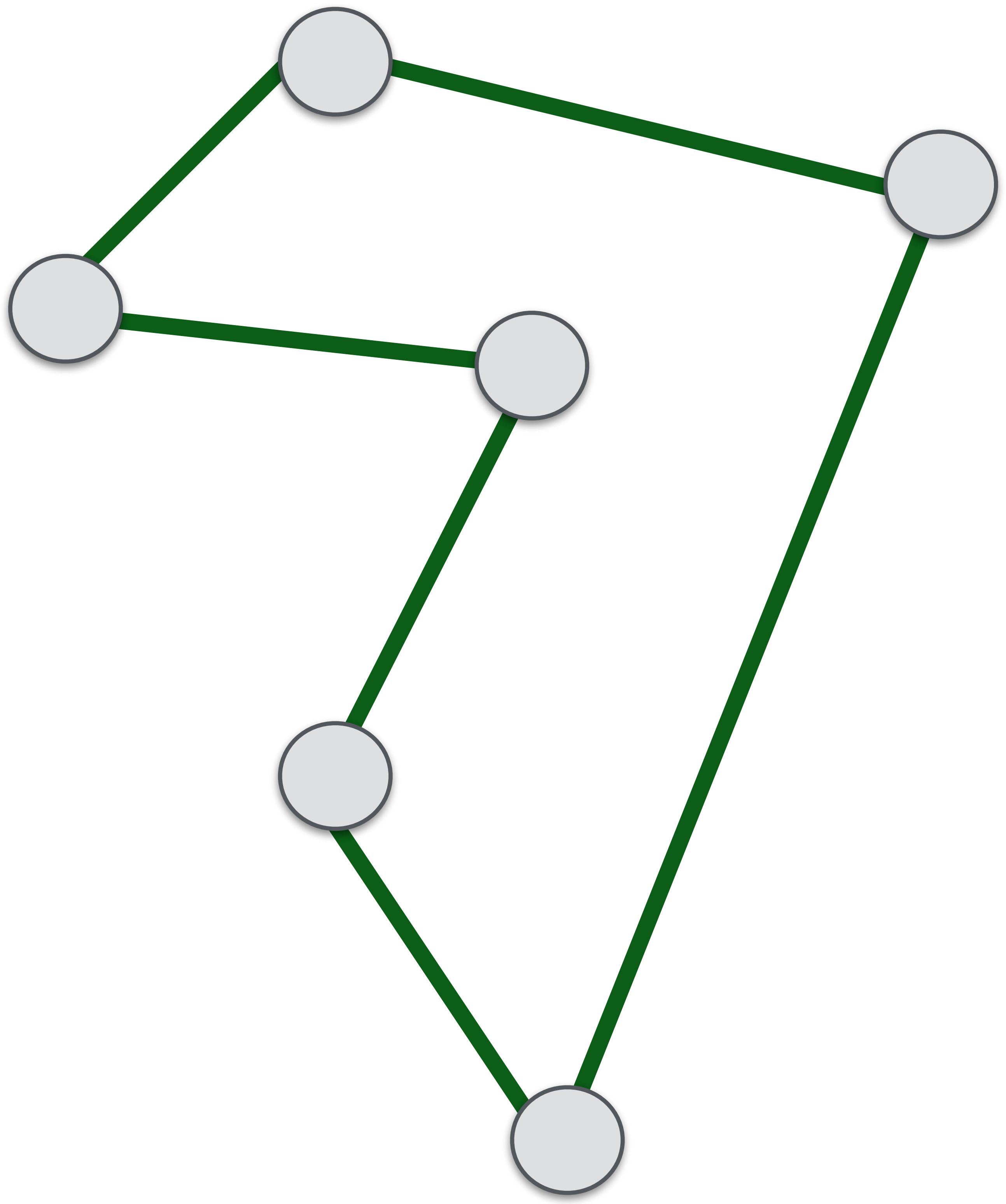
3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

2. verdopple alle Kanten von **T**

   es gilt: $2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

3. bestimme Eulertour **W**

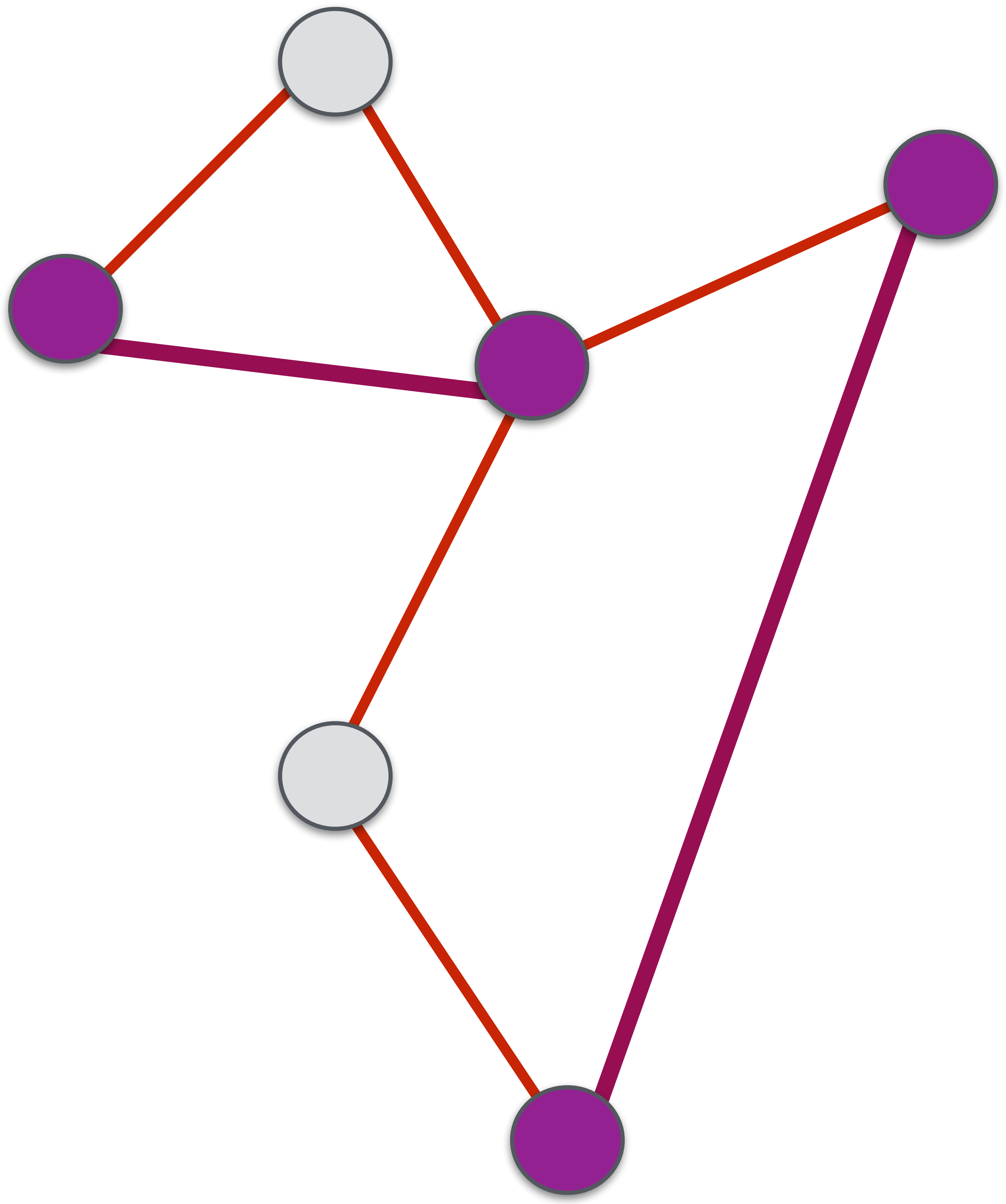
   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

es gilt: $\underbrace{\ell(\mathrm{C}) \leq \ell(\mathrm{W})}_{\text{wegen Dreiecksungleichung}} = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K}_n, \ell)$

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \quad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

2'. X:= Knoten mit ungeradem Grad in T
Bestimme minimales Matching **M** *für X*

   es gilt: $\ell(M) \leq \frac{1}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$ [Beweis an der Tafel]

3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

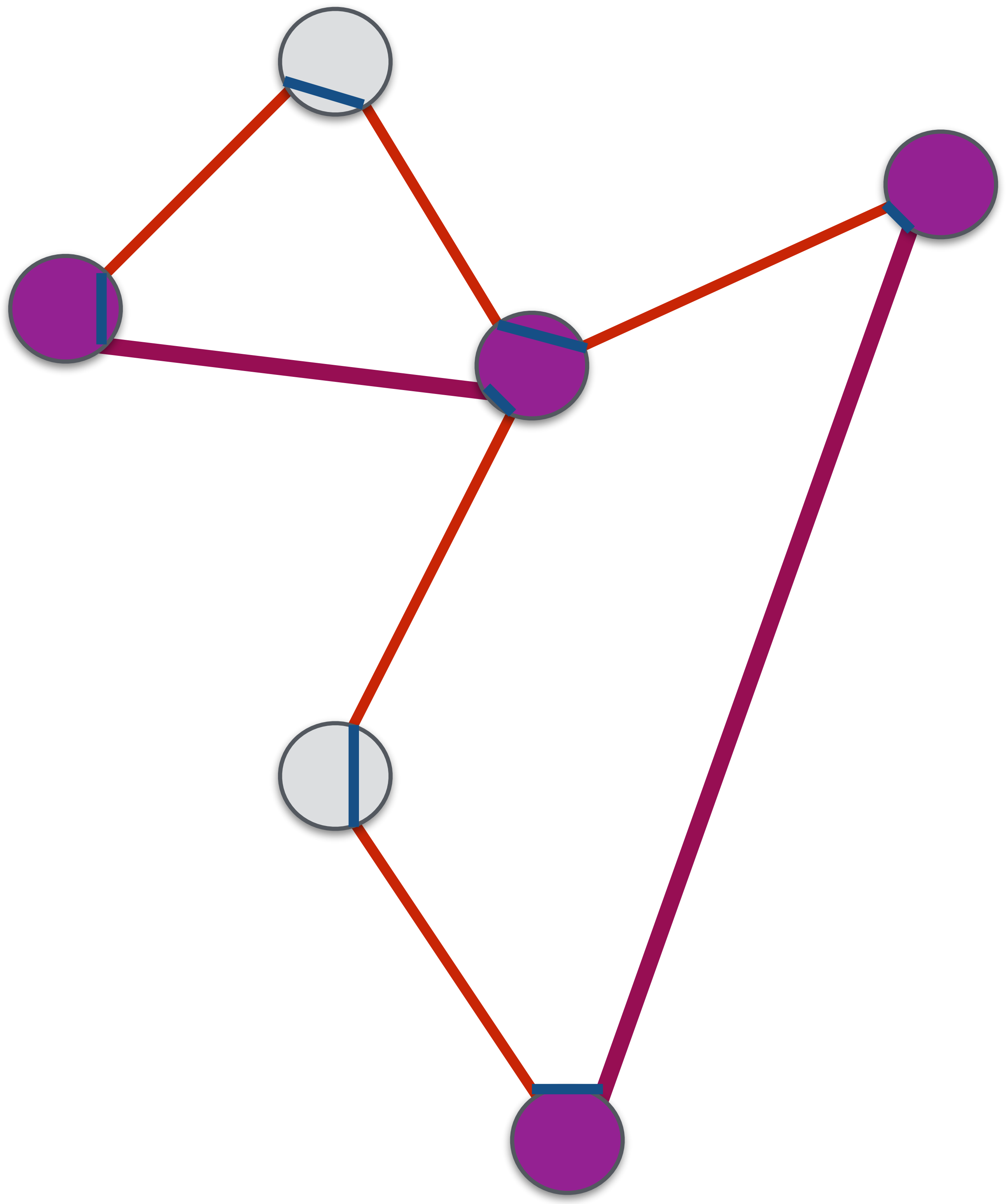
es gilt: $\ell(\mathrm{C}) \leq \ell(\mathrm{W}) = 2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

wegen Dreiecksungleichung

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt
Dreiecksungleichung:

$$\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

es gilt: $\ell(T) \leq \mathrm{opt}(K_n, \ell)$

2'. X:= Knoten mit ungeradem Grad in T
Bestimme minimales Matching **M** *für X*

es gilt: $\ell(M) \leq \frac{1}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$ [Beweis an der Tafel]

3. bestimme Eulertour **W**

$\ell(T) + \ell(M) \leq \frac{3}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

es gilt: $\ell(W) = \cancel{2\ell(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, \ell)}$

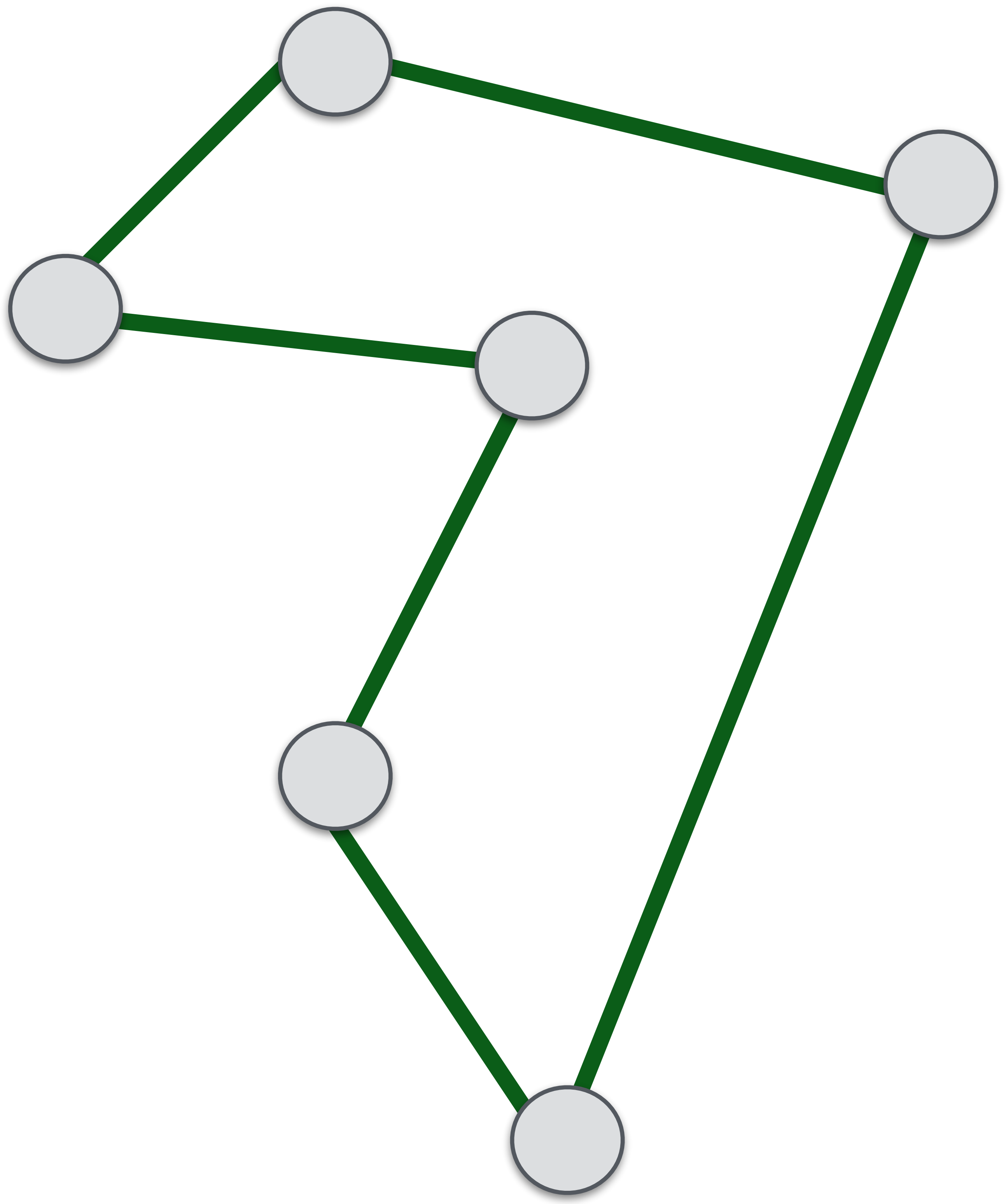
4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

es gilt: $\ell(C) \leq \ell(W) = 2\ell(T) \leq 2\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

wegen Dreiecksungleichung

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt Dreiecksungleichung: $\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$



1. Bestimme minimalen Spannbaum **T**

   es gilt: $\ell(\mathrm{T}) \leq \mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)$

2'. X:= Knoten mit ungeradem Grad in T
Bestimme minimales Matching **M** *für X*

   es gilt: $\ell(M) \leq \frac{1}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$ [Beweis an der Tafel]

3. bestimme Eulertour **W**

   es gilt: $\ell(\mathrm{W}) = \cancel{2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)}$ $\ell(T) + \ell(M) \leq \frac{3}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

4. durchlaufe **W**, mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird $\Rightarrow$ Hamiltonkreis **C**

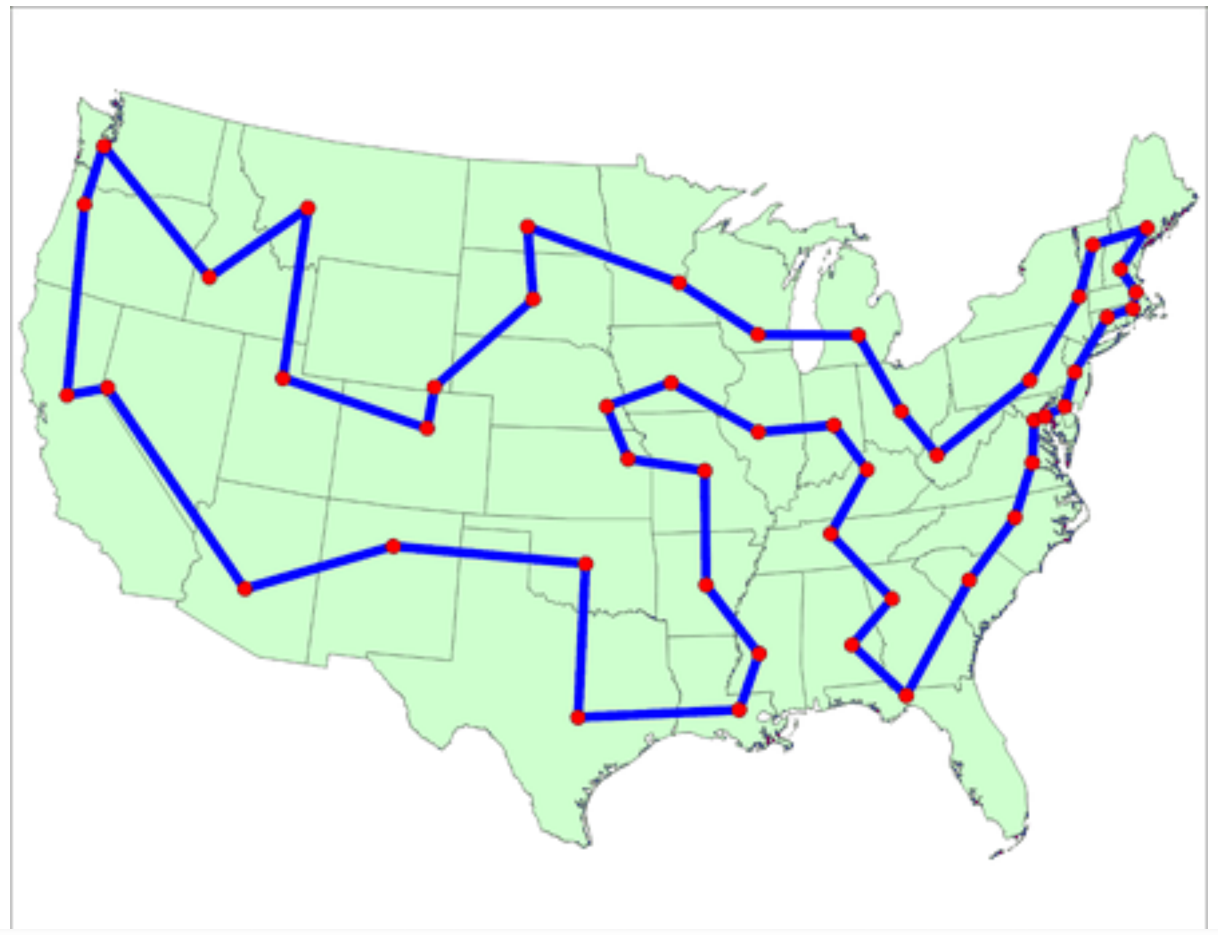
es gilt: $\underbrace{\ell(\mathrm{C}) \leq \ell(\mathrm{W})}_{\text{wegen Dreiecksungleichung}} = \cancel{2\ell(\mathrm{T}) \leq 2\mathrm{opt}(\mathrm{K_n}, \ell)}$ $\ell(T) + \ell(M) \leq \frac{3}{2}\mathrm{opt}(K_n, \ell)$

Metrisches Traveling Salesman Problem

Funktion ℓ erfüllt

Dreiecksungleichung:

$$\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z) \qquad \forall x,y,z \in [n]$$



Satz: Christofides' Algorithmus berechnet in polynomineller Zeit eine 1.5-Approximation für das metrische TSP.

- Seit 1976 ist dies der beste Approximationsfaktor, für den ein polynomieller Algorithmus bekannt ~~ist~~ **war**.
- **September '20:** Karlin, Klein, Gharan finden in polynomieller Zeit eine 1.4999999999999999999999999999999999990-Approximation (preprint).
- Geht es besser? Vermutlich.
  Aber: Es ist NP-schwer, eine 1.008-Approximation zu finden.