Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

Vereinigung von Ereignissen

(Additionssatz) Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so folgt

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

beliebig

Satz 2.4. *(Boolesche Ungleichung)* Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt

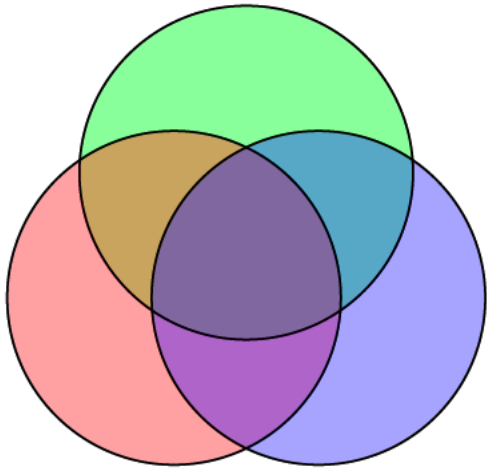
$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Vereinigung von Ereignissen

Satz 2.3. *(Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)*
Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\ &+ (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]. \end{aligned}$$

n=3:



$$\begin{aligned} &\Pr[A \cup B \cup C] \\ &\quad = \Pr[A] + \Pr[B] + \Pr[C] \\ &\qquad - \Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C] - \Pr[B \cap C] + \Pr[A \cap B \cap C] \end{aligned}$$

$$C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}$$

Laplace-Raum: endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, in dem alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel: Mische und ziehe eine Karte:

$\Omega = C$ und $\Pr[\omega] = 1/|\Omega| = 1/52$ für alle $\omega \in \Omega$

In einem Laplace-Raum gilt für jedes Ereignis E: $\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}.$

Wdh: Kombinatorik

Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge zu ziehen

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Beispiel: k=2 Elemente aus S={1,2,3} ziehen (n=3)

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	$(1,1)$,$(1,2)$,$(1,3)$ $(2,1)$,$(2,2)$,$(2,3)$ $(3,1)$,$(3,2)$,$(3,3)$	$\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ $\{2,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,3\}$
ohne Zurücklegen	$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$ $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$	$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

Beispiel: Kartenspiel

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$$\Rightarrow \quad \Omega := \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5\}$$

$$\text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}. \qquad |C|=52$$

$$|\Omega| = \begin{cases} 52^5 \cdot 52^5 \\[2ex] \binom{52}{10} \cdot \binom{10}{5} \\[2ex] \frac{52!}{5! \cdot 5! \cdot 42!} \\[2ex] \binom{52}{5} \cdot \binom{47}{5} \end{cases}$$

Beispiel: Kartenspiel

Szenario: Wir mischen die Karten und geben Spieler A und B jeweils fünf Karten.

$$\Omega := \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq C,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 5,$$
$$\text{wobei } C = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{2, 3, \ldots, 9, 10, B, D, K, A\}\}.$$

Beispiel für ein Ereignis: $E :=$ „Spieler A hat vier Asse“

$$\text{Prob}[E] = \frac{\text{Anzahl Möglichkeiten in denen Spieler A vier Asse hat}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

$$= \frac{48 \cdot \binom{47}{5}}{|\Omega|}$$

Wir betrachten dieses Ereignis nun aus der Sicht von Spieler B:

Jetzt hängt die Wahrscheinlichkeit, dass A vier Asse hat, von den Karten von B ab. D.h. Spieler B interessiert sich für:

Pr[„A hat vier Asse“ | „Karten von B“]

bedingte Wahrscheinlichkeit

bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 2.7. A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

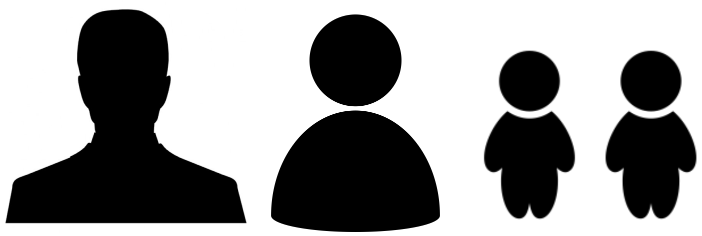
$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

die W'keit, dass Ereignis A eintrifft, *wenn wir schon wissen*, dass Ereignis B eingetreten ist

so rechnen wir diese W'keit aus

Beispiel: Zwei-Kinder-Problem

Familie X hat zwei Kinder



$$\Omega = \{mm, mw, wm, ww\}$$

1.Stelle: Geschlecht des älteren Kindes,
2.Stelle: Geschlecht des jüngeren Kindes

$\Pr[$„beide Kinder sind Mädchen“$]$ $= 1/4$

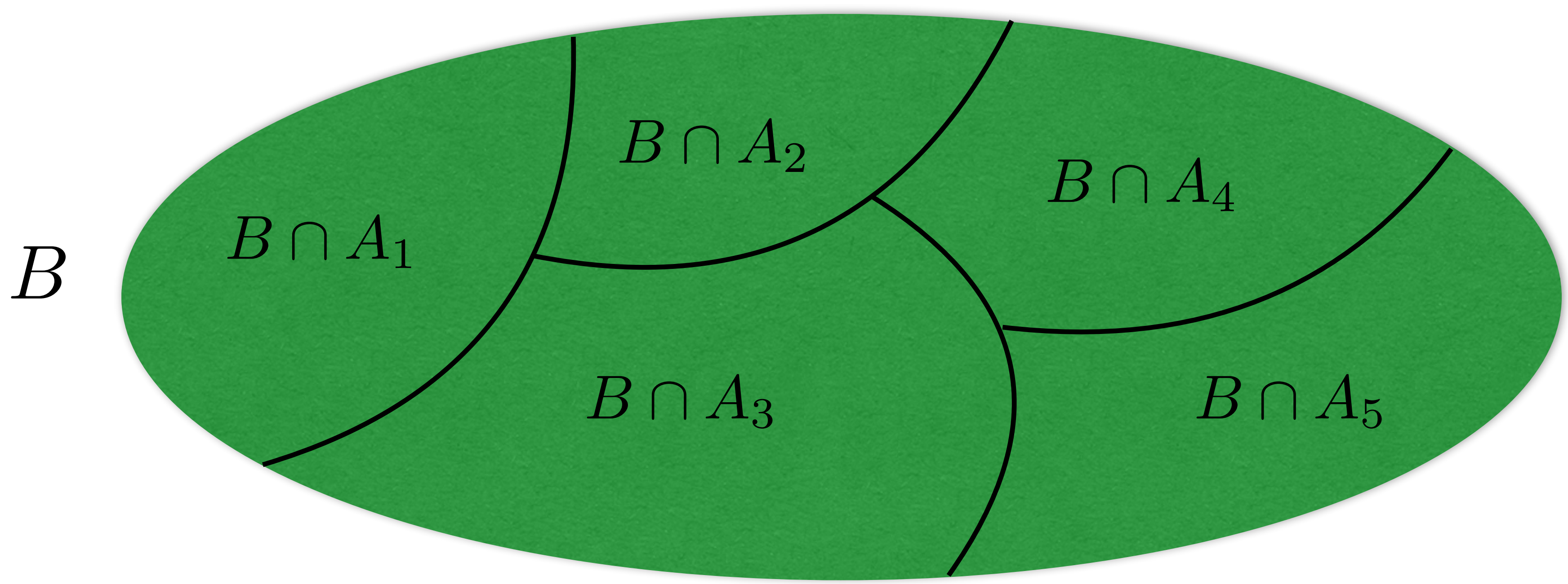
$\Pr[$„beide Kinder sind Mädchen“ $|$ „ein Kind ist Mädchen“ $]$ $= 1/3$

$\Pr[$„beide Kinder sind Mädchen“ $|$ „älteres Kind ist Mädchen“ $]$ $= 1/2$

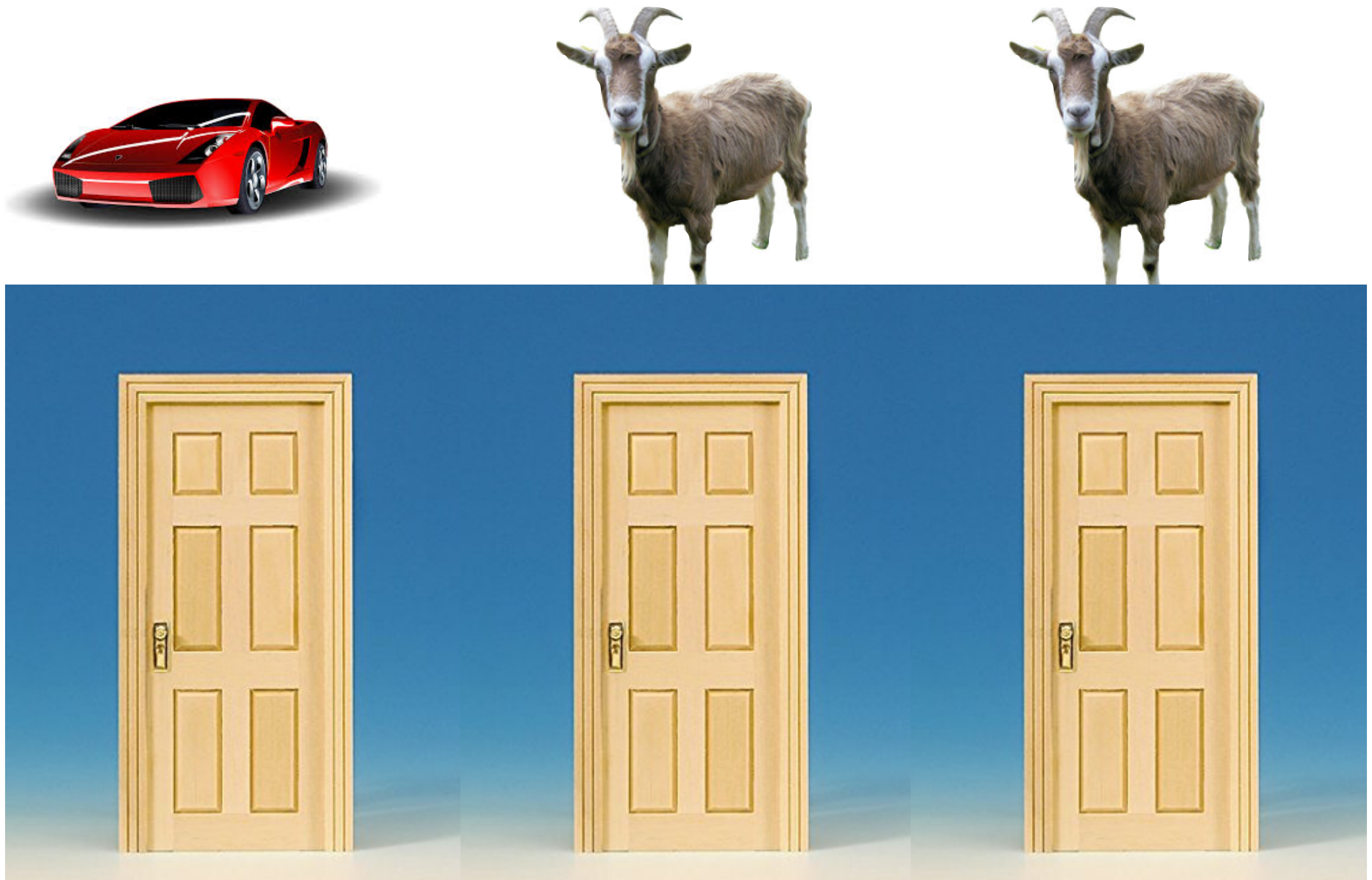
Satz von der totalen W'keit

Satz *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}_{= \Pr[B \cap A_i]}.$$



Ziegenproblem

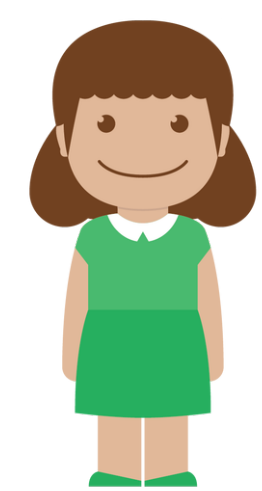


drei Türen:

hinter zweien eine Ziege,
hinter dritten ein Auto

Kandidatin
- sucht sich eine Türe aus

Moderator
- öffnet Tür zu einer Ziege



Ziegenproblem

drei Türen:
hinter zweien eine Ziege,
hinter dritten ein Auto

Kandidatin
- sucht sich eine Türe aus

Moderator
- öffnet Tür zu einer Ziege

Frage: Soll Kandidatin die Türe wechseln?

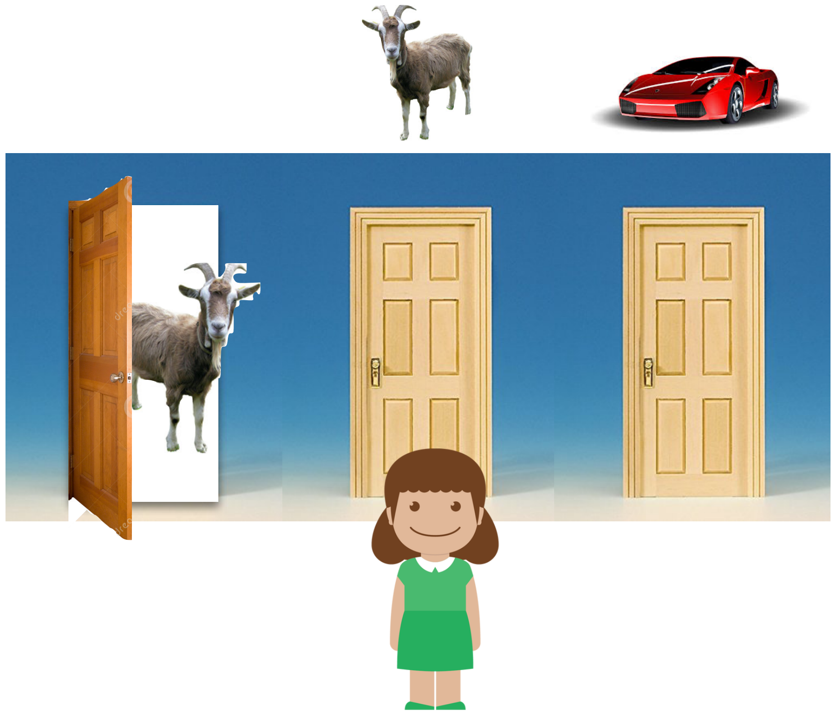
Ziegenproblem

A := „Kandidatin steht vor Tür mit Auto“

B := „Auto hinter dritter Tür“

$$\Pr[A] = 1/3$$

Ziegenproblem



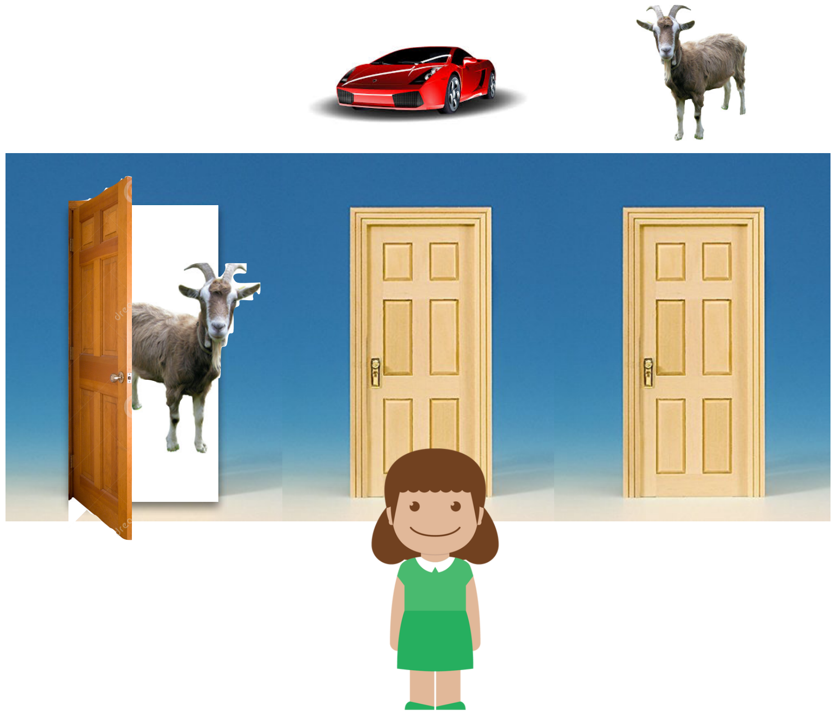
A := „Kandidatin steht vor Tür mit Auto“

B := „Auto hinter dritter Tür“

$$\Pr[A] = 1/3$$

$$\Pr[B \mid \overline{A}] = 1$$

Ziegenproblem



A := „Kandidatin wählt Tür mit Auto“

B := „Auto hinter dritter Tür“

$$\Pr[A] = 1/3$$

$$\Pr[B \mid \overline{A}] = 1$$

$$\Pr[B \mid A] = 0$$

Ziegenproblem

A := „Kandidatin wählt Tür mit Auto“

B := „Auto hinter dritter Tür“

$\Pr[A] = 1/3$

$\Pr[B \mid \overline{A}] = 1$

$\Pr[B \mid A] = 0$

$\Pr[A] = 1/3$

$\Pr[B]$

$= \Pr[B \mid \overline{A}] \Pr[\overline{A}] + \Pr[B \mid A] \Pr[A]$

$= 1 \cdot 2/3 + 0 \cdot 1/3$

$= 2/3$

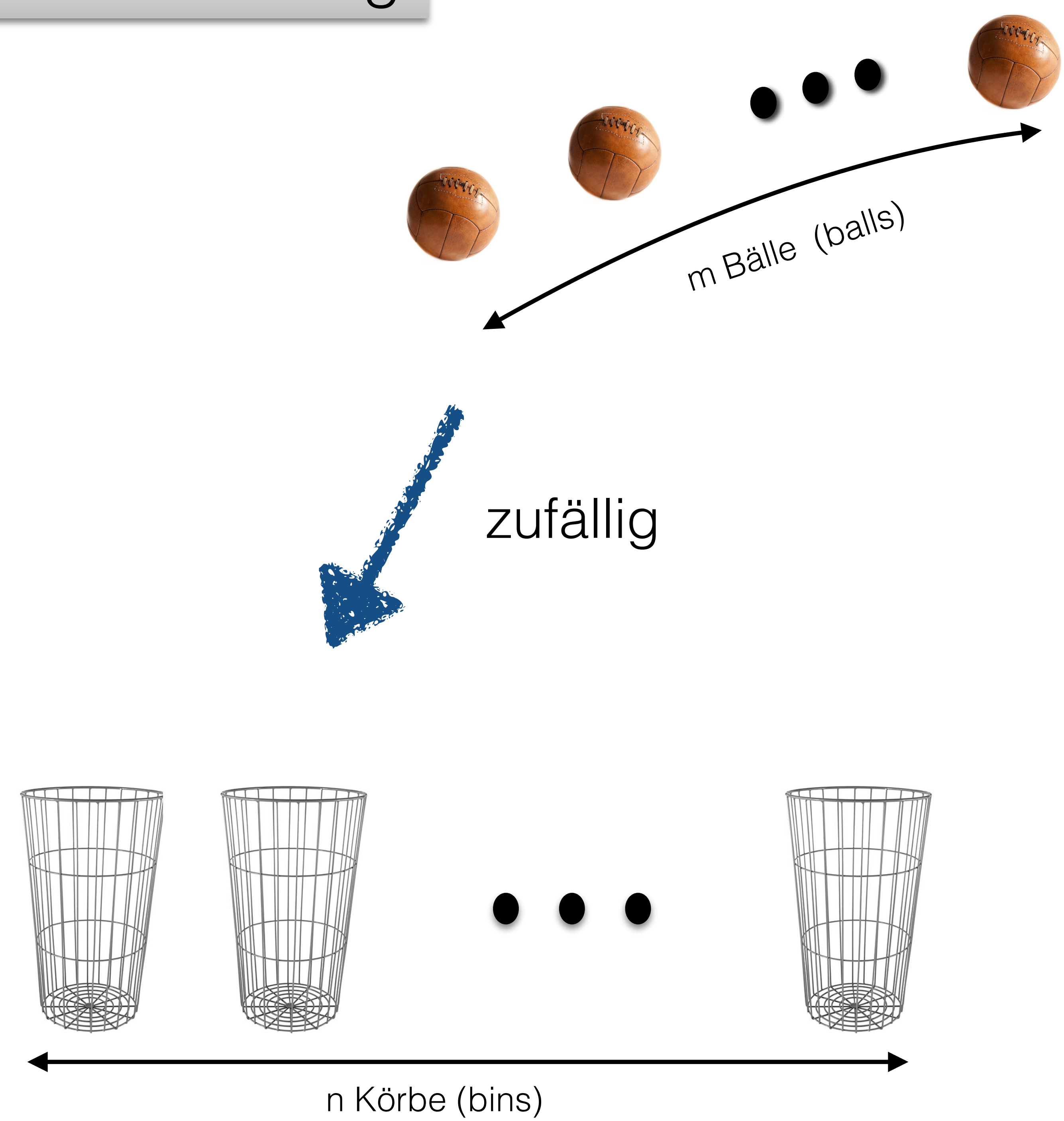
Satz 2.10. *(Multiplikationssatz)* Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}].$$

Beweis: Die rechte Seite ist:

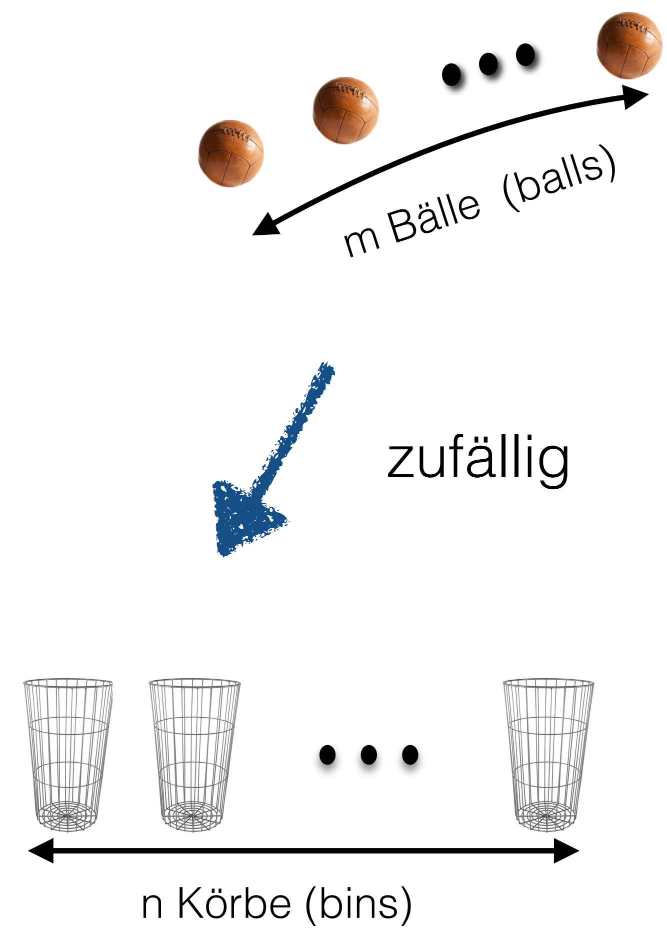
$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]}$$

Umformulierung:



n = 365
m = Anzahl Personen

Geburtstagsproblem



A_i := i-ter Ball landet in einem Korb in dem noch kein Ball liegt

$Pr[A_1] = 1$

$Pr[A_2 \mid A_1] = (n-1) / n$

allgemein:

$Pr[A_i \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}] = (n-(i-1)) / n$

$$\mathbf{Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_m]} = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(m-1)}{n}$$

Satz *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\boxed{\Pr[A_i|B] =} \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\boxed{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

$\Longrightarrow$ Der Satz von Bayes ermöglicht es das Ereignis auf das wir bedingen und das dessen W'keit wir berechnen wollen zu vertauschen.

Satz von Bayes

Satz *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Klassisches Anwendungsbeispiel: Test auf eine Krankheit ….

bekannt aus statistischen Untersuchungen:

Pr[„Test ist positiv“ I „Patient hat Krankheit X“]
Pr[„Test ist positiv“ I „Patient hat Krankheit X nicht“]

was uns interessiert

Pr[„habe Krankheit X“ I „Test ist positiv“]

Satz *(Satz von Bayes)* Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Beweis:

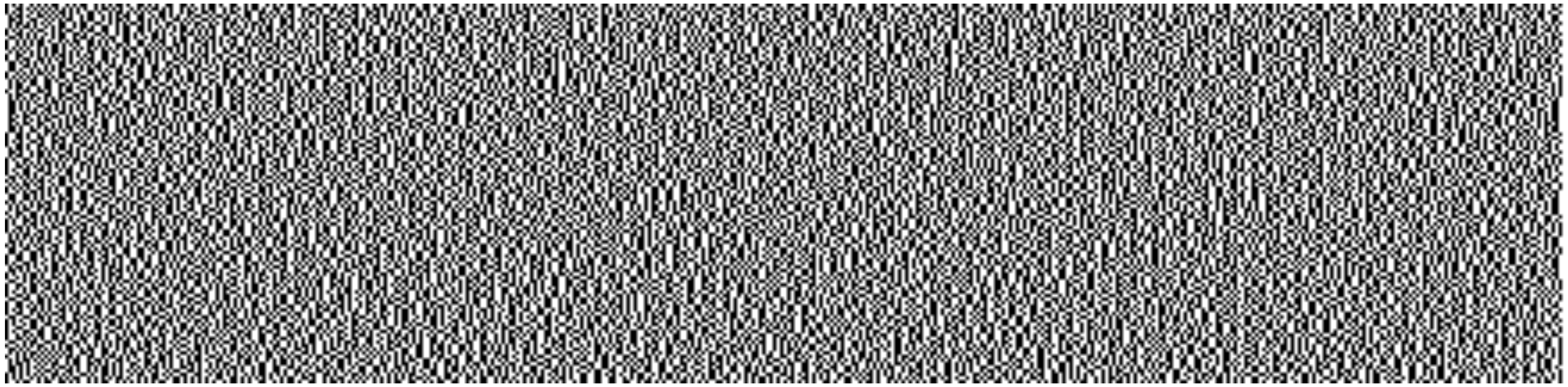
Zähler: $\text{Prob}[A_i \cap B] = \text{Prob}[B \cap A_i] = \text{Prob}[B \mid A_i] \cdot \text{Prob}[A_i]$

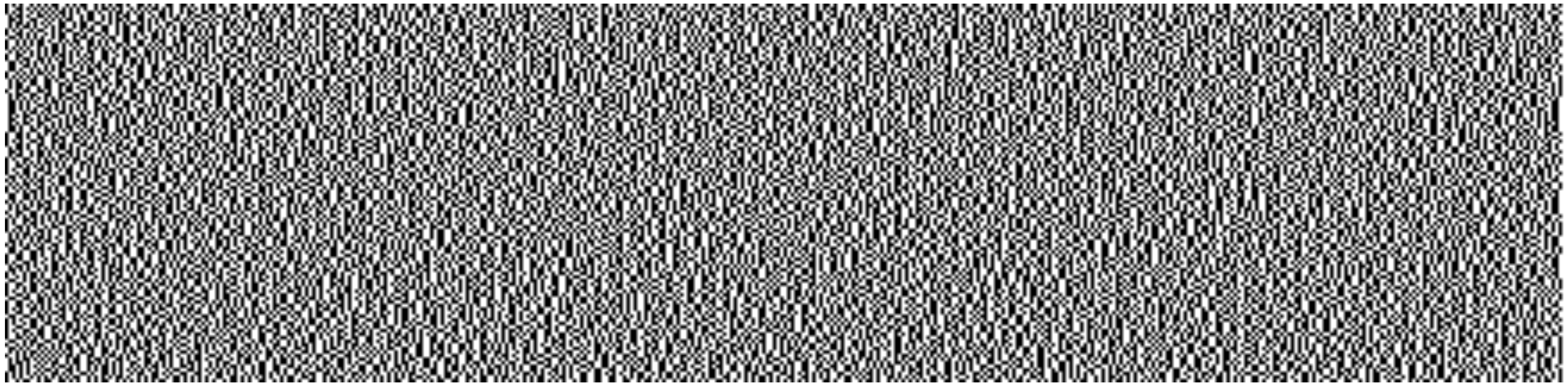
Nenner: $\text{Prob}[B] =$ *... wende Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an ...*

Kapitel 2.3

Unabhängigkeit

Visuelle Kryptographie





Codierung

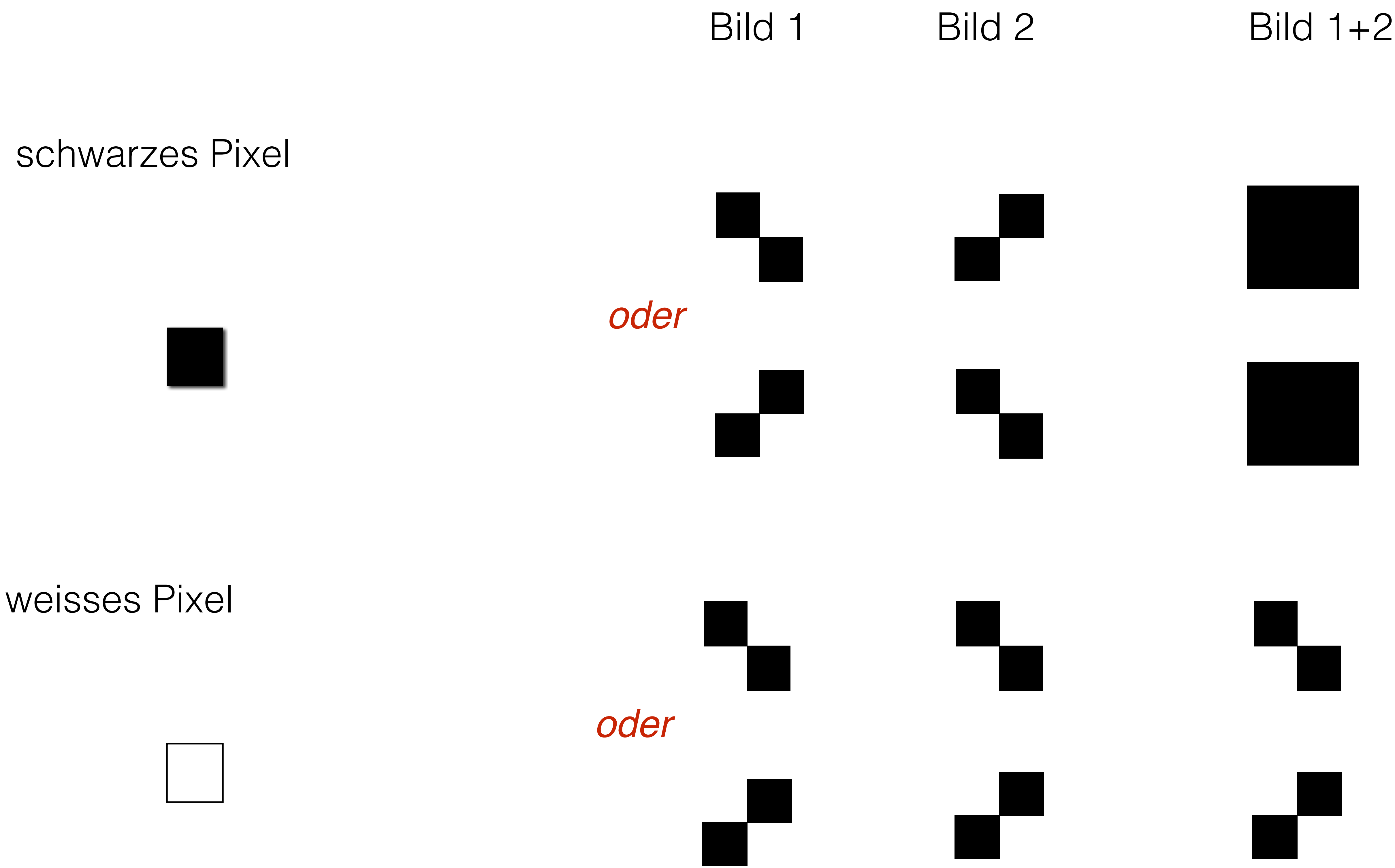
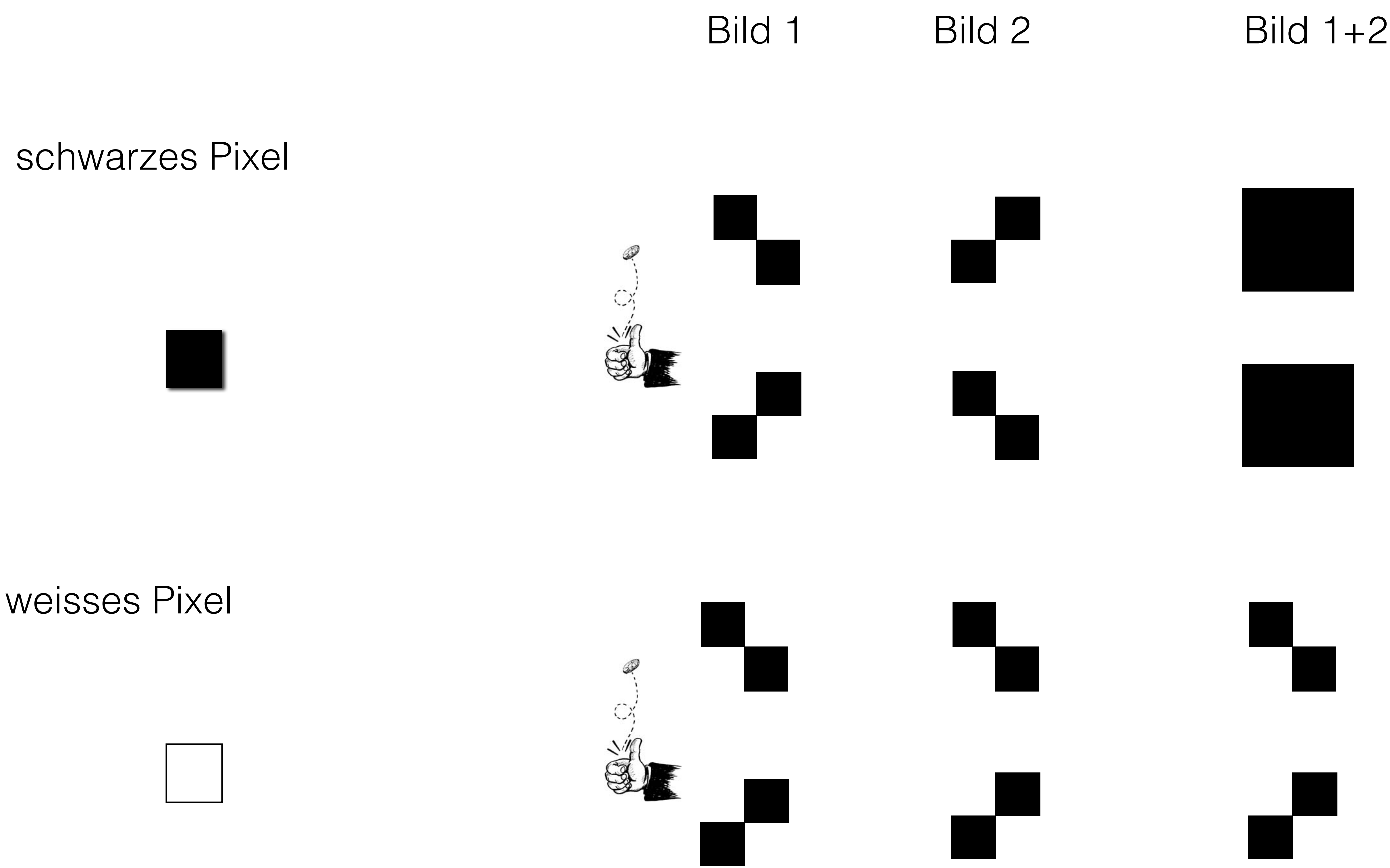
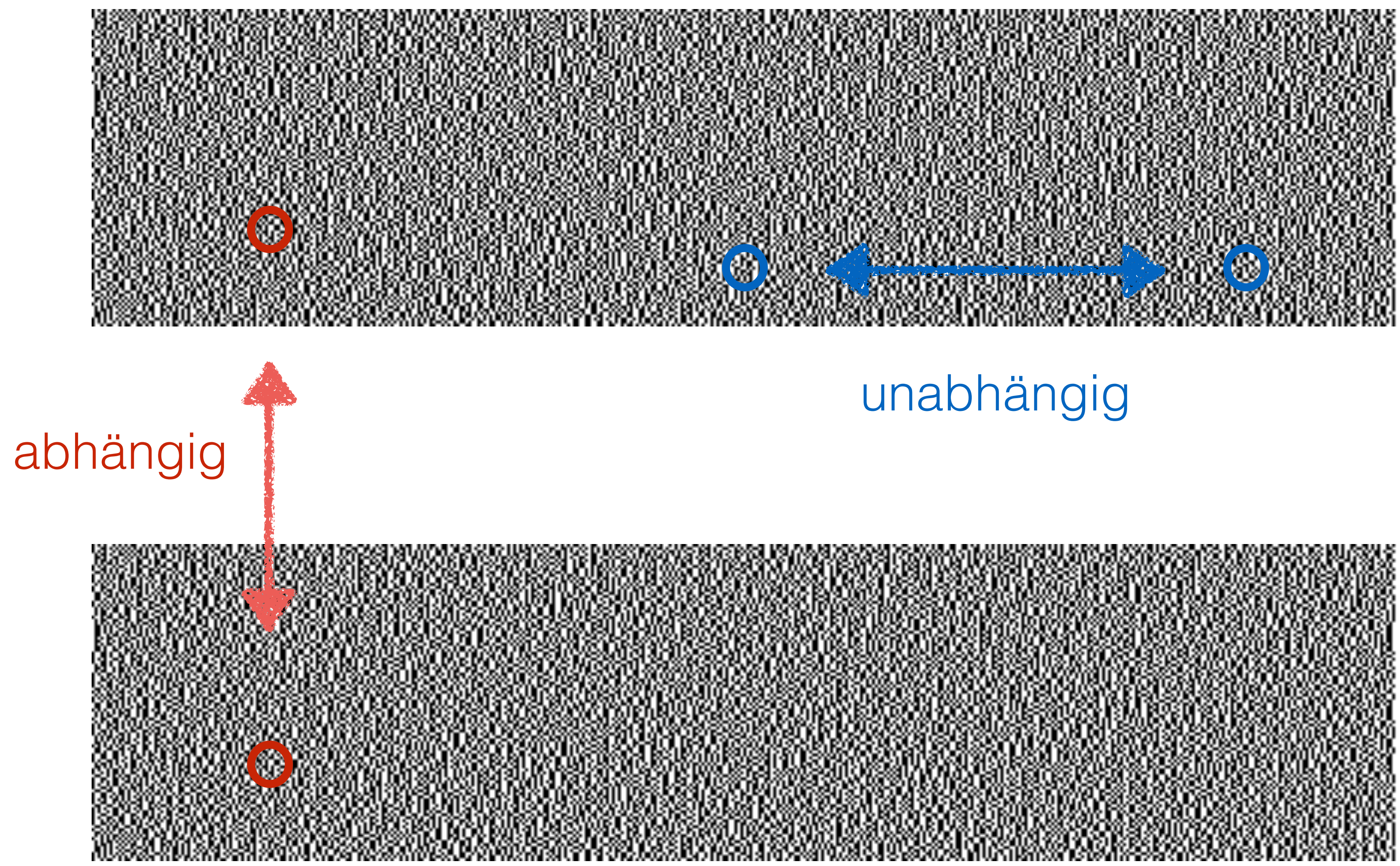


Bild 1
Bild 2
Bild 1+2
schwarzes Pixel
oder
weisses Pixel
oder

Visuelle Kryptographie




unabhängig
abhängig

Unabhängigkeit

Intuitiv:

Ereignisse A und B sind unabhängig gdw
Eintritt von B beeinflusst nicht, ob A eintritt

$$\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \overset{\text{Def.}}{=} \Pr[A|B] \overset{!}{=} \Pr[A]$$

Definition Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Unabhängigkeit - Beispiele

Definition Die Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B].$$

Wichtig: Ereignisse können (stochastisch) unabhängig sein, ohne dass sie ‚physikalisch' unabhängig sind

A := „  ist gerade“ B := „  +  ist 7“

Pr[A] = 1/2
Pr[B] = 6/36

Pr[A∩B] = 3/36

Unabhängigkeit - Beispiele

Wichtig: Ereignisse können (stochastisch) unabhängig sein, ohne dass sie ‚physikalisch' unabhängig sind

Zufallszahlengenerator *(Programmiersprachen)*

$$f : \{0,1\}^m \rightarrow \{0,1\}^m \times \{0,1\}^n$$
$$s_{i-1} \rightarrow (s_i, a_i)$$

s_i: interne Zustände

a_i: Zufallszahlen — *wir „nehmen an", dass die a_i unabhängig sind*

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Frage:

Wann sollen wir Ereignisse A, B und C als unabhängig bezeichnen?

Intuitiv:

Wenn wir durch A und/oder B nichts über C lernen, usw.

… wie machen wir das formal?

Unabhängigkeit - mehrere Ereignisse

Beispiel: wir ziehen zufällig und gleichverteilt eine Zahl aus $\{1,2,\ldots,8\}$

A := „die Zahl ist in $\{1,2,3,4\}$“
B := „die Zahl ist in $\{1,5,6,7\}$“
C := B

Dann gilt

$$\Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = (1/2)^3 = 1/8 = \Pr[A \cap B \cap C]$$

Aber: die drei Ereignisse sind **nicht** unabhängig

Unabhängigkeit - mehrere Ereignisse

Beispiel: wir werfen zwei Münzen und setzen

A := „erste Münze zeigt Kopf“
B := „zweite Münze zeigt Kopf“
C := „Resultate beider Münzen sind verschieden“

==> Je zwei der Ereignisse sind unabhängig,
die drei zusammen jedoch nicht

Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Frage:

Wann sollen wir Ereignisse A, B und C als unabhängig bezeichnen?

Wenn

$$\mathbf{Pr[A \cap B \cap C] \quad = \quad Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]}$$

und

A und **B** sind **unabhängig,** (also $\mathbf{Pr[A \cap B] = Pr[A]\ Pr[B]}$)

& **A** und **C** sind **unabhängig,** (also $\mathbf{Pr[A \cap C] = Pr[A]\ Pr[C]}$)

& **B** und **C** sind **unabhängig** (also $\mathbf{Pr[B \cap C] = Pr[B]\ Pr[C]}$)

Unabhängigkeit - viele Ereignisse

Definition Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Offensichtlich erfüllt, wenn die Ereignisse ‚physikalisch' unabhängig sind (zB wenn jedes A_i einem unabhängigem Münzwurf entspricht)

Dies ist aber nicht unbedingt erforderlich (zB Zufallszahlengenerator).

Unabhängigkeit - viele Ereignisse

Definition Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ heissen *unabhängig*, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdots \Pr[A_{i_k}]. \tag{2.2}$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig, wenn (2.2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \cdots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdots \Pr[A_n^{s_n}], \tag{2.3}$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Unabhängigkeit - viele Ereignisse

Lemma Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis:

$$\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C]$$

$$= \Pr[A]\Pr[B]\Pr[C]$$

$$= \Pr[A \cap B]\Pr[C]$$

Beweis für Vereinigung ähnlich, verwende die Siebformel, siehe Skript.

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

Z Z Z K Z K K Z K Z Z Z Z Z Z K Z Z Z Z Z K K Z Z K Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z
K K K Z Z Z Z K K Z Z K Z K Z Z Z K Z Z Z Z Z Z K Z Z Z K Z K Z Z Z Z K K K Z Z
K K Z K Z Z K Z Z Z K Z K Z K K Z Z K Z Z K Z Z Z Z K K Z K Z Z K Z Z K K K Z Z
Z Z K Z Z Z K Z Z K Z Z K K Z Z Z Z Z K K Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z K Z K Z Z K Z
K Z Z Z Z Z Z K K K Z Z Z K Z K Z Z K Z K Z Z Z Z K Z Z Z Z Z K Z K Z Z Z Z Z K

Verhältnis Kopf : Zahl = 0.459854

K K K Z K K K Z K K Z Z Z K Z Z Z K Z Z Z K K K Z Z K K K K Z K K K K Z K K K K
K K K Z K Z K Z Z K K K K K Z K K K Z K Z Z Z Z Z K Z K Z Z Z Z K K K K Z K K K
Z K Z Z K K K Z K Z Z K Z Z Z K K Z Z K Z Z Z Z K Z Z Z Z K K K K Z K Z Z K K K
Z Z Z K K K K K K K K K Z K K K Z Z Z K K Z Z Z K K Z K K Z K Z Z K Z Z [illegible] Z K K
Z K Z Z Z K Z Z Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z K K Z Z Z K K Z K Z Z Z Z Z K K Z Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.06186

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

Z K Z K Z K K K Z K K Z Z K K K Z Z Z K Z K Z Z K Z K Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z
K Z K K Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K Z Z K Z K K Z Z Z K K K Z K Z Z Z K Z
K K Z K Z K Z K K Z K Z K Z K K K Z K Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z K K Z Z Z Z K Z K
K K K Z K K K Z Z Z K K K K Z K K Z Z K K Z Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z Z K K K K
K Z Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z K K K K K K K Z Z Z K K Z Z K K Z K Z Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 0. 980198

K Z Z Z K Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K K Z Z K K Z K Z K K Z Z K Z K Z Z K Z
K Z K Z K Z K Z Z Z Z Z Z K Z K K K K K Z K Z Z K Z K Z Z K Z K K K K Z Z K K K
K K K Z K Z K K Z Z K Z K Z K Z Z Z K Z K Z K K Z K K K Z Z K Z Z Z K Z Z K K Z
Z K Z Z K Z K Z Z K Z K Z K Z K K Z K Z K Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z Z K Z K Z
K K K Z K Z K K K Z Z K Z Z K Z K Z K K K K Z Z K Z K Z K Z K Z K K Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.00000

Wie „erkennt“ man Zufall?

Eigenschaften einer zufällige Folge:

Wir erwarten

-- Kopf und Zahl treten ungefähr gleich häufig auf, also
Anzahl Kopf dividiert durch Anzahl Zahl $\approx$ 1

-- W‘keit das zwei aufeinanderfolgende Buchstaben gleich sind ist 50%, also
Anzahl Änderungen $\approx$ Länge der Folge / 2

Zufällige Folgen

Zwei Folgen von K und Z der Länge 200,

- eine Folge entspricht dem Ergebnis von 200 Münzwürfen
- eine ist von mir erzeugt.

Welche Folge ist die zufällige?

Z K Z K Z K K K Z K K Z Z K K K Z Z Z K Z K Z Z K Z K Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z
K Z K K Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K Z Z K Z K K Z Z Z K K K Z K Z Z [illegible] K Z
K K Z K Z K Z K K Z K Z K Z K K K Z K Z Z Z Z Z Z Z Z Z K Z Z K K Z Z Z [illegible] K Z K
K K K Z K K K Z Z Z K K K K Z K K Z Z K K Z Z Z K K Z K Z K Z K Z K Z [illegible] K K K K
K Z Z Z Z K Z K K Z K K Z Z Z K K K K K K K Z Z Z K K Z Z K K Z K Z Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 0. 980198 # Änderungen = 112

K Z Z Z K Z K K Z K Z K Z K Z K Z K Z Z K K Z Z K K Z K Z K K Z Z K Z K Z Z K Z
K Z K Z K Z K Z Z Z Z Z Z K Z K K K K K Z K Z Z K Z K Z Z K Z K K K K Z Z K K K
K K K Z K Z K K Z Z K Z K Z K Z Z Z K Z K Z K K Z K K K Z Z K Z Z Z K Z Z K K Z
Z K Z Z K Z K Z Z K Z K Z K Z K K Z K Z K Z Z K Z K K Z Z K K Z K Z Z Z K Z K Z
K K K Z K Z K K K Z Z K Z Z K Z K Z K K K K Z Z K Z K Z K Z K Z K K Z Z Z K K Z

Verhältnis Kopf : Zahl = 1.00000 # Änderungen = 133