Analysis 1
PVW Script

Last Updated: June, 2022

Author: Dominic Sonderegger, Olivier Bitter
Updated by: Ivana Klasovita, Tristan Girard

ana1-pvw-skript@vis.ethz.ch

Disclaimer:
This script only serves as additional material for practice purposes and should not serve as a substitute for the lecture material. We neither guarantee that this script covers all relevant topics for the exam, nor that it is correct. If an attentive reader finds any mistakes or has any suggestions on how to improve the script, they are encouraged to contact the authors under the indicated email address or, preferably, through a gitlab issue on https://gitlab.ethz.ch/vis/luk/pvw_script_analysis1.

This script is based on the analysis script by Professor Burger (https://metaphor.ethz.ch/x/2021/fs/401-0212-16L/skript/SkriptAnalysis1FS21.pdf).

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen

1.1 Konvergenzbeweis mit ε-Definition

In der Vorlesung haben wir folgende Definition gelernt:

Definition 1.1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge.*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Falls wir Konvergenz mithilfe dieser Definition zeigen wollen, können uns folgende Beobachtungen helfen, die Beweise zu verkürzen und vor allem: Sie einfacher zu machen!

Behauptung 1.1

Wir dürfen o.B.d.A annehmen, dass ε von oben durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ (welche wir frei wählen dürfen) beschränkt ist. Formal:

$$\underbrace{\exists C \geq 0\ \forall\varepsilon \in (0, C]\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon}_{(1)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon}_{(2)}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Falls $0 < \varepsilon \leq C$**,** dann folgt aus (1), dass $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ ✓

Falls $0 < C \leq \varepsilon$**,** dann wähle ein $\varepsilon_1 \in (0, C]$ und erhalte (wieder wegen (1)) ein $n_0(\varepsilon_1)$ so dass $\forall n \geq n_0(\varepsilon_1) : |a_n - a| < \varepsilon_1$.

Für unser $\varepsilon > 0$ wählen wir jetzt einfach $n_0 := n_0(\varepsilon_1)$ und es gilt: $|a_n - a| < \varepsilon_1 < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$ ✓ □

Behauptung 1.2

Wir müssen beim abschätzen nicht ein "isoliertes" ε auf der rechten Seite erhalten (wie in der Definition), es reicht auch wenn das ε mit einer positiven konstanten multipliziert wird. Formal:

$$\underbrace{\exists C\ \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < C \cdot \varepsilon}_{(1)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon}_{(2)}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus (1) folgt für $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{C} > 0$ dass: $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$ □

Wie machen wir davon Gebrauch? Angenommen wir wollen zeigen, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert und wir wollen die Konvergenz mittels obiger Definition zeigen. Wir beginnen mit dem Satz "Da uns für die Konvergenz nur sehr kleine ε-Werte interessieren, nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\varepsilon < 1$." (Die 1 ist ein Wert der sich natürlich häufig gut eignet, er kann aber auch eine beliebige andere, positive reelle Zahl sein.) Falls wir dann eine Abschätzung der Form

$$|a_n - a| < \ldots < C \cdot \varepsilon \quad (C > 0)$$

erhalten, dann erkläre den Beweis für beendet mit der Begründung: "Da wir ε beliebig klein wählen können, wird auch $C \cdot \varepsilon$ beliebig klein."

Hands-On 1

1.1. Beweis von Satz 2.1.8 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeige:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad (b \neq 0 \neq b_n, \forall n \in \mathbb{N})$

1.2. Challenge

(a) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeige, dass dann das arithmetische Mittel

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Nenne ein Beispiel einer divergenten Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

1.2 Allgemeine Konvergenzkriterien

Definition 1.2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge.*

1. *Die Folge ist* ***monoton wachsend*** *falls :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n$
2. *Die Folge ist* ***strikt monoton wachsend*** *falls :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$
3. *Die Folge ist* ***monoton fallend*** *falls :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leq a_n$
4. *Die Folge ist* ***strikt monoton fallend*** *falls :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$

Es gibt mehrere Möglichkeiten zu zeigen dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist :

1. Man definiert eine neue Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, man kann dann zum Beispiel zeigen dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt monoton wachsend ist indem man zeigt dass alle Glieder von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt positiv sind.
2. Falls alle Glieder der Folge strikt positiv sind, kann man eine neue Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren mit $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, falls jetzt $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq 1$ so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Es gelten ähnliche Aussagen wenn alle Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt negativ sind oder wenn b_n immer (strikt) kleiner als 1 ist.
3. Eine andere Möglichkeit ist ein Induktionsbeweis über $\mathbb{N}$.

Wir geben jetzt zwei Konvergenzkriterien an die man dann auch als Konvergenzkriterien für Reihen umschreiben kann.

Kriterium 1: Der Satz von Weierstrass

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton **wachsend** und nach **oben** beschränkt : so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton **fallend** und nach **unten** beschränkt : so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Kriterium 2: Cauchy Kriterium

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1 : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

1.3 Konvergenz von induktiven Folgen

Eine Folge wird induktiv definiert und hat z.B. die Form:

$$a_1 := C \quad (C \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} := f(a_n) \quad (\forall n > 1)$$

"Typische Prüfungsfrage". Vorteil: Aufgaben dieser Art lassen sich wunderbar nach einem "Kochrezept" lösen. Generell gibt es zwei sinnvolle Ansätze:

Variante 1: Versucht eine geschlossene Form der Folge zu finden und untersucht das Konvergenzverhalten/berechnet den Grenzwert mit den üblichen Kriterien aus der Vorlesung.

Variante 2:

1. Zeige, dass die Folge monoton wachsend/fallend ist.
2. Zeige, dass die Folge beschränkt ist.
3. Aus den Punkten 1 und 2 folgern wir mit dem Satz von Weierstrass, dass die Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergieren muss.
4. Verwende den "Induktions-Trick" um den Grenzwert zu bestimmen.

Beispiel. (Winter 2016)
Sei $(d_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ definiert als:

$$d_1 := 3, \quad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2} \quad (\forall n > 1)$$

Untersuche die Folge auf Konvergenz und bestimme ihren Grenzwert (falls existent).

Variante 1:

$$\begin{aligned} d_1 &= 3 \\ d_2 &= \sqrt{7} \\ d_3 &= \sqrt{3\sqrt{7} - 2} \\ d_4 &= \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{7} - 2} - 2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\lightning$ kompliziert!

Variante 2:

1. Untersuche auf Monotonie: Vergleiche z.B d_1 und d_2 um einen "Trend" festzustellen:

$$d_1 = 3, d_2 = \sqrt{7}$$

$$9 > 7 \Rightarrow 3 > \sqrt{7} \Rightarrow \text{Hypothese: } (d_n)_{n\geq 1} \text{ ist monoton fallend.}$$

Beweis. (Induktion)

Anker $(n = 1)$ ✓ (Siehe oben).

Annahme Sei $n \geq 1$ beliebig und $d_n \geq d_{n+1}$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$
Es gilt:

$$d_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{3d_n - 2} \overset{\text{I.H.}}{\geq} \sqrt{3d_{n+1} - 2} \overset{\text{def}}{=} d_{n+2}$$

$\square$

2. Da die Folge monoton fallend ist, suchen wir eine <u>untere</u> Schranke. Wir verwenden dieselbe Heuristik wie oben, indem wir die numerischen Werte der ersten paar Folgenglieder versuchen abzuschätzen:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 3 \\ d_2 &= \sqrt{7} > 2 \\ d_3 &= \sqrt{3\sqrt{7} - 2} > \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Hypothese: } (d_n)_{n \geq 1} \text{ ist nach unten beschränkt durch 2.}$$

Alternativ kann man auch bereits hier den weiter unten beschriebenen "Induktions-Trick" verwenden. Die Idee ist, falls der Grenzwert existiert und die Folge monoton ist, ist der Grenzwert auch eine untere bzw. obere Schranke.

Beweis. (Induktion)

Anker $(n = 1)$ $d_1 = 3 \geq 2$ ✓.

Annahme Sei $n \geq 1$ beliebig und $d_n \geq 2$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$
Es gilt:

$$d_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{3d_n - 2} \overset{\text{I.H.}}{\geq} \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$$

$\square$

3. $(d_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend und beschränkt $\overset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists d \in \mathbb{R} \lim_{n \to \infty} d_n = d$

4. "Induktions-Trick" Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} d_n = d \quad \Longrightarrow \quad \text{Für jede Teilfolge } \ell(n) \text{ gilt } \lim_{n \to \infty} d_{\ell(n)} = d$$

Wähle also die Teilfolge $\ell(n) := n + 1$, dann gilt: $\lim_{n \to \infty} d_{n+1} = d$
Wir können also ausrechnen:

$$d = \lim_{n \to \infty} d_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{3d_n - 2} \overset{\text{Satz 3.2.4}}{=} \sqrt{\lim_{n \to \infty} 3d_n - 2} = \sqrt{3d - 2}$$

Durch Umformen erhalten wir

$$d^2 = 3d - 2 \Leftrightarrow (d-1)(d-2) = 0 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

Da aber 2 eine untere Schranke war, kommt nur $d = 2$ in Frage. Es gilt also:

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \underline{\underline{2}}$$

Hands-On 2

2.1. Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mit:

$$a_1 := \sqrt{6}, \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n + 6} \quad (\forall n > 1)$$

Untersuche die Folge auf Konvergenz und bestimme ihren Grenzwert (falls existent).

2.2. Challenge
Sei $b > 0$ und $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ mit:

$$a_1^2 \geq b, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{b}{2a_n} \quad (\forall n > 1)$$

Zeige:

(a) $a_n^2 \geq b \quad (\forall n \geq 1)$.

(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton. (Tipp: Fallunterscheidung $a_1 > 0, a_1 < 0$)

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert und es gilt $a^2 = b$.

1.4 Konvergenz von Reihen

Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und wir müssen zeigen, dass die Reihe konvergiert oder divergiert. Wir haben eine Reihe von Kriterien kennengelernt welche uns dabei helfen können:

Kriterium 3: Nullfolgenkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Oft unterschätzt, aber extrem nützlich. Macht immer (wenn auch nur für euch "im Kopf") den sanity-check: Ist die Folge a_n in der Reihe keine Nullfolge, dann muss die Reihe divergieren. Eine nützliche Eigenschaft des Nullfolgenkriteriums ist, dass ihr den Absolutbetrag der Folge betrachten könnt. Damit lassen sich lästige $(-1)^n$-Terme eliminieren:

Beispiel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n n^{\frac{1}{n}}}_{=:a_n} \text{ divergiert, da } |a_n| = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$$

Kriterium 4: Majorantenkriterium

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq b_n$ $(\forall n \geq n_0)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

Vorgehen: Wir wollen zeigen, dass eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Suche eine Folge b_n mit $|a_n| \leq b_n$ deren zugehörige Reihe sicher konvergiert (weil wir das z.B. in der Vorlesung bewiesen haben). Dann folgern wir mit dem Majorantenkriterium, dass unsere Reihe ebenfalls (sogar absolut) konvergiert. Auch hier haben wir den Vorteil, dass wir den Absolutbetrag der Folge abschätzen dürfen.

Kriterium 5: Minorantenkriterium

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \le b_n \le a_n$ $(\forall n \ge n_0)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ divergiert} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Vorgehen: Wir wollen zeigen, dass eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert. Suche eine Folge $0 \le b_n \le a_n$ deren zugehörige Reihe sicher divergiert, dann divergiert auch unsere ursprüngliche Reihe.
Als Majoranten bzw. Minoranten eignen sich zum Beispiel folgende Reihen (mit entsprechendem Argument):

- **Geometrische Reihe:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{konv. für } |q| < 1 \text{ bzw. div. für } |q| \ge 1$$

- **Zeta Funktion:**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{konv. für } s > 1 \text{ bzw. div. für } s \le 1$$

  Ein sehr wichtiger und häufig benutzter Spezialfall der Zeta Funktion ist die **Harmonische Reihe**. Sie entspricht $\zeta(1)$.

Kriterium 6: Leibnizkriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ eine Folge. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ (ii) & a_n \text{ wird monoton (ab einem gewissen } n_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergiert.}$$

Kommt häufig in folgendem Szenario zum Einsatz:
Wir wollen mittels Majorantenkriterium zeigen, dass eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert. Wenn wir also beim Abschätzen einer Majorante bestenfalls auf $|(-1)^n a_n| \le b_n = \frac{1}{n}$ kommen, dann haben wir wohl (wegen dem eliminieren des $(-1)^n$-Terms) "zu grob" abgeschätzt, denn es gilt:
Die *Harmonische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, während die *alternierende Harmonische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert.
In solchen Fällen kann uns das Leibnitzkriterium weiterhelfen. (Beachte: Das Leibnitzkriterium garantiert lediglich "normale" Konvergenz, nicht die Absolute.)

Kriterium 7: Quotienten/Wurzel-Kriterium

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}$ eine Folge. Falls gilt:

Quotientenkriterium	**Wurzelkriterium**
$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = q$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = q$

$$\text{Mit: } \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.} \\ q = 1 & \Rightarrow \quad \text{keine Aussage.} \\ q > 1 & \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Hands-On 3

3.1. Konvergenzverhalten von Reihen
Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-1)^n}{2^n 3^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+2n+n^2+\sin(2n)}{n^3+1}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^8+n^3-1}}$.

(d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k}$ (Berechne zusätzlich den Wert der Reihe).

(e) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^j}{2^{j+1}-j}$

3.2. Konvergenzbereich von Reihen
Bestimme den Konvergenzbereich der folgenden Reihen (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ so dass die Reihe konvergiert). **Begründe** deine Antwort!

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n e^{2nx}$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+(1-x)^2)^n}$.

3.3. Challenge
Es seien $\alpha, \beta \geq 0$. Berechne den Konvergenzradius ρ der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}$$

1.5 Lösungen

1.5.1 Lösungen Hands-On 1

1.1

(a) Wir müssen folgendes zeigen:

Behauptung

$$\forall \varepsilon \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : |a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

Beweis. Wir dürfen dabei verwenden dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_a \; \forall n \geq n_a : |a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_b \; \forall n \geq n_b : |b_n - b| < \varepsilon \tag{2}$$

Sei also $|a| \geq \varepsilon > 0$ beliebig. Setze $n_0 := \max\{n_a, n_b\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n + (a_n b - a_n b) - ab| \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
(\triangle\text{-Ungl.}) \quad &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
(*), (1), (2) \quad &< (\varepsilon + |a|)\varepsilon + |b|\varepsilon \\
(\varepsilon \leq |a|) \quad &\leq \underbrace{(2|a| + |b|)}_{=:C}\varepsilon = C \cdot \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)
\end{aligned}$$

Wobei sich die Ungleichung in $(*)$ wie folgt begründen lässt:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

Hier macht es also Sinn unser ε von oben zu beschränken, damit wir a_n durch eine Konstante abschätzen können. □

(b) Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Der Rest folgt wegen (a).

Behauptung

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \colon \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$$

Beweis. Da $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dürfen wir verwenden:

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \colon |b - b_n| < \varepsilon'$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir müssen zeigen dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt damit für alle $n \geq n_0$ gilt $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$.

Setze $\varepsilon' = \min\{\frac{b^2 \varepsilon}{2}, \frac{|b|}{2}\}$. Wir wissen dass es ein n_0 gibt mit $\forall n \geq n_0 : |b - b_n| < \varepsilon'$
Jetzt erhalten wir :

$$\forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} < \frac{\varepsilon'}{|b_n||b|} \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon'}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2\varepsilon'}{b^2} \leq \varepsilon$$

Die Ungleichung in $(*)$ gilt wegen:

$$\forall n \geq n_0 : |b_n| = |b_n + b - b| = |b + (b_n - b)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \varepsilon' \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$$

□

1.2 (Challenge)

(a) Da $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a konvergiert, dürfen wir verwenden dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
|a - s_n| &= \left| \frac{1}{n}(na) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \right| \\
&= \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a - a_k) \right| \\
(\triangle\text{-Ungl.}) &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a - a_k| \\
&= \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n_0}|a - a_k|}_{=:K} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}\underbrace{|a - a_k|}_{<\varepsilon} \\
&< \frac{K}{n} + \frac{(n - n_0)}{n}\varepsilon \leq \frac{K}{n} + \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)
\end{aligned}$$

Um den ersten Summanden klein zu bekommen, dürfen wir nur hinreichend grosse n betrachten. Es muss also gelten:

$$\frac{K}{n} \overset{!}{<} \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{K}{\varepsilon} \overset{!}{<} n$$

Wir setzen deshalb $n_1 := \max\{n_0, \lceil \frac{K}{\varepsilon} \rceil\}$.
Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_1 \; \forall n \geq n_1 \colon |a - s_n| < 2\varepsilon$$

$\square$

(b) z.B. $a_n = (-1)^n$

1.5.2 Lösungen Hands-On 2

2.1 Auch hier versuchen wir es direkt mit der "Kochrezept-Variante"(Variante 2).

1. **Monotonie** Wir verwenden dieselbe Heuristik wie im Einführungsbeispiel:

$$a_1 = \sqrt{6} \geq 0 \Rightarrow a_2 = \sqrt{a_1 + 6} \geq \sqrt{0+6} = a_1 \Rightarrow \text{These: } a_1 \text{ ist monoton wachsend.}$$

Beweis. (Induktion)

Anker $(n = 1)$ ✓ (Siehe oben).

Annahme Sei $n \geq 1$ beliebig und $a_n \leq a_{n+1}$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$
Es gilt:

$$a_{n+2} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a_{n+1} + 6} \overset{\text{I.H.}}{\geq} \sqrt{a_n + 6} \overset{\text{def}}{=} a_{n+1}$$

□

2. **Beschränktheit** Da a_n monoton wachsend ist, suchen wir nach einer oberen Schranke. Wieder versuchen wir eine These aufzustellen, indem wir die ersten Glieder abschätzen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{6} \leq 3 \\ a_2 &= \sqrt{\sqrt{6}+6} \leq \sqrt{3+6} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ These: 3 ist eine obere Schranke.}$$

Beweis. (Induktion)

Anker $(n = 1)$ $a_1 = \sqrt{6} \leq 3$ ✓.

Annahme Sei $n \geq 1$ beliebig und $a_n \leq 3$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$
Es gilt:

$$a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a_n + 6} \overset{\text{I.H.}}{\leq} \sqrt{3+6} = 3$$

□

3. **Monotone Konvergenz** Wegen den Punkten 1 und 2 $\overset{\substack{\text{monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{\Longrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

4. **Induktions-Trick** Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Also:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \overset{\text{Satz 3.2.4}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 6} = \sqrt{a+6}$$

Was sich umformen lässt zu:

$$a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-3) = 0 \Rightarrow a = -2 \vee a = 3$$

Da aber $a \geq 0$ $(\forall n \geq 1) \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$.

2.2 (Challenge)

(a) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion:

Anker $(n=1)$ $a_1^2 \overset{\text{def}}{\geq} b; \checkmark$.

Annahme Sei $n \geq 1$ beliebig und $a_n^2 \geq b$.

Schritt $(n \mapsto n+1)$
Wir bringen zuerst unser a_{n+1} auf eine geeignetere Form:

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a_n^2} \right) = a_n \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right) \right)$$

Dann gilt:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right) \right)^2 \overset{(*)}{\geq} a_n^2 \left(1 - 2\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right) \right) = a_n^2 \left(1 - 1 + \frac{b}{a_n^2} \right) = b$$

Wobei wir in $(*)$ die Bernoulli-Ungleichung verwendet haben: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -1\colon (1+x)^n \geq 1 + nx$.
Um die Ungleichung anwenden zu können, muss jedoch gelten:

$$-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right) \overset{!}{\geq} -1.$$

Dies sieht man jedoch wie folgt:

$$-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right) = -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{b}{2a_n^2}}_{\geq 0} > -\frac{1}{2} > -1$$

$\square$

(b) Beachte:

$$\begin{aligned} &\text{Falls } a_1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 0\ (\forall n \geq 0), \text{ da } a_{n+1} \text{ eine Summe von 2 positiven Zahlen ist.} \\ &\text{Falls } a_1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n < 0\ (\forall n \geq 0), \text{ da } a_{n+1} \text{ eine Summe von 2 negativen Zahlen ist.} \end{aligned}$$

Das heisst, entweder sind alle $a_n > 0$ oder alle sind negativ. Wir verwenden die Darstellung aus (a):

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2a_n^2} \right) = a_n - \underbrace{a_n \underbrace{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{a_n^2} \right)}_{\geq 0}}_{\substack{\geq 0 \text{ falls } a_n > 0 \\ \leq 0 \text{ falls } a_n < 0}} \begin{cases} \leq a_n, \text{falls alle } a_n > 0 \Rightarrow \text{monoton fallend} \\ \geq a_n, \text{falls alle } a_n < 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

(c) Falls $a_1 > 0 \Rightarrow a_n$ ist monoton fallend. Nach (b) gilt:

$$a_n^2 \geq b \Rightarrow a_n \geq \sqrt{b} \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ ist nach unten beschränkt.}$$

Falls $a_1 < 0 \Rightarrow a_n$ ist monoton wachsend. Nach (b) gilt:

$$\begin{aligned} a_n^2 \geq b &\Rightarrow |a_n| \geq \sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow -a_n \geq \sqrt{b} \\ &\Leftrightarrow a_n \leq -\sqrt{b} \\ &\Rightarrow a_n \text{ ist nach oben beschränkt.} \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgern wir mit dem Satz der monotonen Konvergenz die Existenz eines Grenzwertes $a \in \mathbb{R}\ \checkmark$.

Bleibt zu zeigen dass $a^2 = b$. Mit dem Induktions-Trick und Satz 3.2.4 gilt:

$$a = \frac{1}{2}a + \frac{b}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a = \frac{b}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b$$

$\square$

1.5.3 Lösungen Hands-On 3

3.1 Lösung Aufgabe 3.1

(a) Zuerst prüfen wir auf Nullfolgen:

$$\left[\text{NFK:} \quad |a_n| \leq \frac{5^n+1}{6^n} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right]$$

Da die Folge eine Nullfolge ist, versuchen wir als nächstes das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n|} &= \frac{\sqrt[n]{|5^n+(-1)^n|}}{6} \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \frac{\sqrt[n]{5^n+1}}{6} \\ &\leq \frac{\sqrt[n]{2\cdot 5^n}}{6} = \frac{\sqrt[n]{2}\cdot 5}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{6} < 1 \\ &\implies \quad \text{konvergiert nach dem WK}\end{aligned}$$

□

(b)

$$\left[\text{NFK: Offensichtlich eine NF, da } \frac{\mathcal{O}(n^2)}{\mathcal{O}(n^3)}\right]$$

Wir verwenden das Minorantenkriterium:

$$a_n \geq \frac{2+2n+n^2-1}{n^3+1} = \frac{(n+1)^2}{n^3+1} \geq \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{=:b_n} \geq 0$$

Es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - 1 = \zeta(1) - 1 \text{ divergiert!}$$

Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium. □

(c)

$$\left[\text{NFK: Offensichtlich eine NF, da } \frac{\mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})}{\mathcal{O}(n^{\frac{8}{3}})}\right]$$

Wir suchen eine Majorante:

$$|a_n| \leq \frac{(2n)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{8}{3}}} = \underbrace{\sqrt{2}\frac{n^{\frac{3}{6}}}{n^{\frac{16}{6}}}}_{=:b_n}$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sqrt{2}\cdot\zeta(13/6)$$

haben wir eine Konvergente Majorante gefunden und unsere Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium. □

(d) Wir bemerken zuerst folgendes:

$$k^2 - k \geq k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \quad (\forall k \geq 2)$$

Folglich gilt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Das heisst, die Reihe konvergiert absolut nach dem Majorantenkriterium. Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir:

$$\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Wegen der gezeigten absoluten Konvergenz dürfen wir die Glieder umordnen, jedoch müssen wir vorsichtig sein:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \overset{\lightning}{=} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Obige Gleichung ist <u>falsch</u>, denn die beiden Reihen divergieren und wir haben einen undefinierten Ausdruck der Form: $\infty - \infty$.
Wir können die Umordnung jedoch mithilfe von Partialsummen definieren:

$$\begin{aligned} S_n := \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ &= 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden das Majorantenkriterium:

$$|a_j| \leq \frac{2}{2^{j+1}-j} \overset{(*)}{\leq} \frac{2}{2^{j+1}-2^j} = 2\cdot\underbrace{\frac{1}{2^j}}_{=:b_j}$$

Die Ungleichung in $(*)$ gilt aufgrund der Bernoulli-Ungleichung:

$$j < 1 + j\cdot 1 \leq (1+1)^j = 2^j$$

Da $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j = 2\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j$ konvergiert, konvergiert auch unserer Reihe nach dem Majorantenkriterium.

$\square$

3.2

(a) Wir bestimmen den Konvergenzradius mittels Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{||a_n|} = 2e^{2x} &\overset{!}{<} 1 \\ \Leftrightarrow \quad e^{2x} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2x &< -\log 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &< -\frac{\log 2}{2} \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also sicher $\forall x < -\frac{\log 2}{2}$. Bleibt noch der Rand zu untersuchen:

$$x = -\frac{\log 2}{2} \;\Rightarrow\; 2^n e^{2n\left(-\frac{\log 2}{2}\right)} = 2^n e^{-n\log 2} = 2^n \cdot 2^{-n} = 1.$$

Offensichtlich divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} 1$.

(b) Auch hier verwenden wir das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{1+(1-x)^2} &\overset{!}{<} 1 \\ \Leftrightarrow \quad |x| &< 1+(1-x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad |x| &< 2-2x+x^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2-2x-|x|+2 &> 0 \end{aligned}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

$$x^2 - 2x - |x| + 2 > 0 \iff \begin{cases} \text{Falls } x \geq 0\colon x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) > 0 & \iff x \in [0,1) \cup (2,\infty) \\ \text{Falls } x < 0\colon \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underbrace{-x}_{\geq 0} + 2 > 0 & \iff x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Die Reihe konvergiert also sicher $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.
Bleibt noch der Rand:

Falls x = 1 dann ist $a_n = 1$ und somit ist die Reihe sicher divergent.

Falls x = 2 dann ist $a_n = \frac{2^n}{(1+1^2)^n} = 1$ und somit ebenfalls divergent.

3.3 (Challenge) Mittels WK/QK erhalten wir:

$$\rho = \begin{cases} 1, \text{ für } \alpha, \beta \leq 1 \\ \beta \text{ für } \alpha \leq 1 < \beta \\ \frac{1}{\alpha} \text{ für } \beta \leq 1 < \alpha \\ \frac{\beta}{\alpha} \text{ für } 1 < \alpha, \beta \end{cases}$$

Für detaillierte Lösung, siehe Lösung Serie 5, FS2020.

2 Stetigkeit

2.1 Verschiedene Definitionen

Sei im folgenden $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x)$ eine Funktion. Wir haben eine Reihe von unterschiedlichen Definitionen für Stetigkeit erhalten:

Definition 2.1 (Grenzwertdefinition)**.** *f heisst **stetig in** $x_0 \in \Omega$ falls*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Oder etwas formaler:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$$

*Falls f für alle $x_0 \in \Omega$ stetig ist, dann ist f **stetig auf** Ω.*

Man sollte sich immer im Hinterkopf behalten, dass wir zwei Notationen für "lim" kennen: Eine für Funktionen (mit $x \to x_0$ unter dem Limes) und eine für Folgen (mit $n \to \infty$ unter dem Limes). Die Erstere ist über die Letztere definiert. Bei Limes-Beweisen ist es oft hilfreich die Definition "aufzuklappen" und mit dem "Folgen-Limes" zu argumentieren:

Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.

Behauptung

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ existiert nicht}$$

Beweis. Angenommen es gäbe ein $a \in \mathbb{R}$ so dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = a$, dann muss für beliebige Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gelten dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Wir zeigen den Widerspruch auf, indem wir zwei Folgen wählen, dessen Funktionswerte gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren:

$$\left.\begin{array}{lll} x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \checkmark & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \\ x_n^{(2)} := -\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \checkmark & \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(2)}) = \lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty \end{array}\right\} (\neq) \;\Rightarrow\; \text{Limes existiert nicht}$$

$\square$

Falls wir in obigem Beispiel nur den Definitionsbereich $(0,\infty)$ betrachtet hätten, so würde der Grenzwert übrigens existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Wir sprechen dabei vom *uneigentlichen Grenzwert*, da der Grenzwert keine reelle Zahl ist.

Definition 2.2 (ε-δ-Definitionen)**.**

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{Punktweise stetig:}}\quad & \underline{\forall x_0}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\colon\ \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \\ \textbf{\textit{Gleichmässig stetig:}}\quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \underline{\forall x_0}\colon\ \|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Beachte: Der einzige Unterschied zwischen den beiden Definitionen besteht in der Position von "$\forall x_0$": In der punktweisen Stetigkeit ist das δ von x_0 und ε abhängig ($\delta(\varepsilon, x_0)$), während in der gleichmässigen Stetigkeit das δ nur von ε abhängen darf ($\delta(\varepsilon)$). Wir können also aus gleichmässiger Stetigkeit immer auch punktweise Stetigkeit folgern.
Das heisst für uns, dass Beweise für gleichmässige Stetigkeit etwas "schwieriger" durchzuführen sind, da wir uns bei der Wahl von δ etwas einschränken lassen müssen. Die gleichmässige Stetigkeit ist jedoch ein stärkerer Stetigkeitsbegriff als die punktweise Stetigkeit (was aufgrund der obigen Definitionen ja direkt ersichtlich ist.)

Hands-On 1

1.1. Komposition stetiger Funktionen
Seien $f\colon [c,d] \to \mathbb{R},\ g\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig. Zeige dass $(f \circ g)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig ist.

1.2. Gleichmässige Stetigkeit I
Sei $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Zeige dass f gleichmässig stetig ist.

1.3. Gleichmässige Stetigkeit II
Sei $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Für jedes $r > 0$ ist $f\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$ gleichmässig stetig.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmässig stetig.

1.4. Challenge
Zeige, dass die Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist.
Tipp: Betrachte zuerst den Fall $n = 2$ und versuche diesen dann zu verallgemeinern. Die Stetigkeit bei 0 erfordert möglicherweise ein anderes Argument als bei $x_0 > 0$.

2.2 Zwischenwertsatz

Satz 1: Zwischenwertsatz

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein c zwischen a und b mit $f(c) = y$.

Der Zwischenwertsatz (ZWS) wird oft bei Existenzbeweisen verwendet, bei denen man lediglich wissen will, ob eine Funktion einen gewissen Wert annimmt, ohne diesen explizit zu berechnen:

Beispiel. Wir wollen zeigen dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \frac{9x^3 - 18x^2 - 2x + 2}{x^2 + 1}$$

mindestens eine Nullstelle hat. Dabei bemerken wir zuerst dass f ein Quotient zweier Polynome ist und das Nennerpolynom nie 0 sein kann. Deshalb ist f stetig und wir dürfen mit dem ZWS argumentieren. Diese Feststellung ist so offensichtlich, dass sie in Prüfungen oft vergessen wird. Schreibt immer einen "Standardsatz" à la:

f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig

Jetzt suchen wir einfach einen negativen und einen positiven Funktionswert. Dann folgt die Existenz eines Zwischenpunktes x_0 mit $f(x_0) = 0$ unmittelbar aus dem ZWS. Z.B gilt:

$$f(0) = \frac{2}{0+1} = 2 > 0, \quad f(1) = \frac{9 - 18 - 2 + 2}{1+1} = -\frac{9}{2} < 0$$

Wenn wir ganz genau sein wollen, dann sehen wir, dass wir nicht ganz exakt die Bedingungen des ZWS haben, denn: $f(0) > f(1)$. Wir könnten aber einfach $-f$ betrachten, dann sind die Bedingungen gegeben (denn $-f = (-1)f$ ist als Produkt stetiger Funktionen natürlich ebenfalls stetig).

2.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und seien $f_k, f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$

Definition 2.3.
*(i) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen f, falls gilt:*

$$\forall x \in \Omega\colon \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

*(ii) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmässig** gegen f, falls gilt:*

$$\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Notation: $f_k \xrightarrow{glm} f, (k \to \infty)$

Definition 2.4 (ε-N-Definitionen)**.**

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{Punktweise konvergent:}} \quad & \forall x \in \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{x,\varepsilon} > 0\ \forall n \geq N_{x,\varepsilon}\colon\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \\ \textbf{\textit{Gleichmässig konvergent:}} \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall n \geq N_\varepsilon\ \forall x \in \Omega\ :\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit Stetigkeit ist für uns vor allem folgender Satz relevant:

Satz 2

Seien $f_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig, $k \in \mathbb{N}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ irgendeine Funktion. Es gilt:

$$f_k \xrightarrow{\text{glm}} f, (k \to \infty) \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig}$$

Beachte: Die Umkehrung gilt nicht:
Wenn wir z.B. für eine Folge stetiger Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gezeigt haben, dass diese durch die schwächere, punktweise Konvergenz gegen eine Zielfunktion f konvergiert und dieses f stetig ist, dann dürfen wir nicht schliessen, dass die Folge auch gleichmässig gegen f konvergiert!
Falls die Zielfunktion f jedoch unstetig ist, dann dürfen wir direkt folgern, dass die Funktionenfolge <u>nicht gleichmässig</u> gegen f konvergiert.

Beispiel. Seien $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_k(x) = x^k,\ k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Das heisst die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Indikatorfunktion $I_{\{1\}}$. Obwohl alle f_k stetig sind, ist die Grenzfunktion offensichtlich nicht stetig. Mit obigem Satz können wir also direkt schliessen, dass die Funktionenfolge nicht gleichmässig gegen $I_{\{1\}}$ konvergiert.
Dies könnte man auch direkt beweisen:

Behauptung

$$f_n \cancel{\xrightarrow{glm}} f := I_{\{1\}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Beweis. Wir müssen zeigen dass

$$\exists c \neq 0\colon \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k\to\infty} c$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte $x_k := \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{10}} < 1$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |f_k(x_k) - f(x)| = \left| \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{k}} \right)^k - 0 \right| &= \frac{1}{10} \quad (\forall k > 0) \\ \Rightarrow \quad \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| &\geq \frac{1}{10} \quad (\forall k > 0) \\ \Rightarrow \quad \exists c \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| &\xrightarrow{k\to\infty} c \geq \frac{1}{10} \neq 0 \end{aligned}$$

□

Hands-On 2

2.1. Fixpunkte

(a) Sei $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{\sin x + \cos x}$. Zeige: f hat einen Fixpunkt.

(b) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Weiterhin sei $f\colon [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeige, dass die Funktion f in $[a, b]$ einen Fixpunkt hat.

2.2. Funktionenfolgen

Konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen eine Grenzfunktion f? Falls ja, bestimme f und untersuche, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2, \quad n > 0$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x + 1 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} < x \end{cases}$

2.3. Challenge

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die jeden Wert genau zweimal annimmt. Zeige, dass f nicht stetig sein kann.
Tipp: Zwischenwertsatz!

2.4 Grenzwerte berechnen

Um Grenzwerte zu berechnen dürfen wir verwenden, dass die folgenden Regeln gelten:

Satz 3: Variablenwechsel

Seien f und g Funktionen, wobei f stetig (ergänzbar) in y_0 und g stetig (ergänzbar) in x_0, mit $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

Den Variablenwechsel könnte man als "Substitution für Grenzwerte" betrachten:

Beispiel. Wir wollen folgenden Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\to 1^+} \log x \log(\log x)$$

Setze $f(y) := y \log y,\ y := g(x) = \log x,\ y_0 := \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to 1^+} f(g(x)) \overset{\text{VW}}{=} \lim_{y\to 0^+} f(y) = \lim_{y\to 0^+} y \log y \overset{\text{ZF}}{=} \underline{\underline{0}}$$

Satz 4: Exponentenregel

Seien $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ (beide Grenzwerte existieren). Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = f(x_0)^{g(x_0)}$$

Diese Regel kann uns Arbeit einsparen: Die gängige Methode Grenzwerte von der Form $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ zu berechnen, ist das ganze wie folgt umzuformen:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

Dann kann man den Grenzwert von $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))$ berechnen und das Resultat in die Exponentialfunktion einsetzen (wegen der Stetigkeit von e^x). Mit obiger Regel können wir direkt die Grenzwerte (falls existent) von f und g berechnen und dann den gesamten Grenzwert berechnen. Man muss nur beachten, dass die Grenzwerte wirklich existieren (das heisst, sie müssen reelle Zahlen sein) und dass $f(x_0)$ positiv ist. Letzteres resultiert daraus, dass obiger Satz auf der Tatsache beruht, dass:

$$F\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^y$$

stetig ist.

Satz 5: Bernoulli de l'Hôspital

Seien $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$.
Falls $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ existiert, dann folgt: $\lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Bemerkung: Dieser Satz gilt auch:

- falls $b = +\infty$
- falls $x \to a^+$
- falls $\lambda = \pm\infty$
- falls $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$

2.5 Grenzwerte mit Potenzreihen

Seien $p, p_n\colon (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe p ist.

- $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
- $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$

Man kann zeigen, dass gilt: $p_n \xrightarrow{\text{glm}} p$. Für uns bedeutet das Konkret:

Satz 6

Potenzreihen sind stetig auf $(-\rho,\rho)$.

Das heisst es gilt:

$$\forall x_0 \in (-\rho,\rho)\colon \lim_{x\to x_0} p(x) = p\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$$

Hands-On 3

3.1. Grenzwerte
Bestimme, (falls existent) folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\tan x)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (3 - |x|)^{\frac{\sin x}{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 \sin\left(\frac{\log x}{x^2}\right)}{\log x}$

3.2. Potenzreihen
Bestimme, (falls existent) folgende Grenzwerte mithilfe der Potenzreihendarstellung (kein BdH!). Die Herleitungen sollen **exakt** begründet werden.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2(\exp(x) - 1)}$

(c) Beweise: Für $x \in [0,1]$ gilt $\sin(x) \le x$.

2.6 Lösungen

2.6.1 Lösungen Hands-On 1

1.1 Sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n) = (f \circ g)(x_0)$$

Beweis.

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) \overset{g \text{ stetig}}{=} f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) \overset{\text{def}}{=} (f\circ g)(\lim_{n\to\infty} x_n) = (f\circ g)(x_0)$$

□

1.2 Wir schätzen ab:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4}\right| = \left|\frac{y^2+4-x^2-4}{(x^2+4)(y^2+4)}\right| = \frac{|x+y||x-y|}{(x^2+4)(y^2+4)} \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\frac{|x|+|y|}{(x^2+4)(y^2+4)}}_{(*)} |x-y|$$

$$(*) = \underbrace{\frac{|x|}{(x^2+4)(y^2+4)}}_{(1)} + \underbrace{\frac{|y|}{(x^2+4)(y^2+4)}}_{(2)}$$

Wir betrachten nur (1) (die zweite Abschätzung ist völlig analog):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Falls } |x| \leq 1 \Rightarrow (1) \leq \frac{1}{16} \\ \text{Falls } |x| > 1 \Rightarrow (1) \leq \frac{|x|}{x^2} = \frac{|x|}{|x|^2} = \frac{1}{|x|} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ (1) < 1$$

Wir wählen deshalb $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| < 2 \cdot \delta = \varepsilon$$

□

1.3

(a) Seien $x, y \in [-r, r]$ beliebig.

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leq 2r|x-y| < 2r \cdot \delta$$

Wir wählen deshalb $\delta := \frac{\varepsilon}{2r}$ dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| < 2r \cdot \delta = \varepsilon$$

□

(b) Die Negation der gleichmässigen Stetigkeit sieht wiefolgt aus:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in \mathbb{R}\colon\ \|x-y\| < \delta\ \wedge\ \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$$

Wir wählen $\varepsilon = 1$ und setzten für ein beliebiges $\delta:\ \ x = \frac{1}{\delta}, y = x + \frac{\delta}{2}$ Dann gilt:

$$|x-y| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

und

$$|f(x) - f(y)| = |x-y||x+y| = \frac{\delta}{2} \cdot \left|\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

□

1.4 Die Stetigkeit der Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ im Nullpunkt folgt direkt, wenn wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ einfach $\delta := \varepsilon^n > 0$ wählen. Es gilt dann:

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow x < \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| = \sqrt[n]{x} \overset{\text{Monotonie}}{<} \sqrt[n]{\delta} = \varepsilon$$

Sei $x_0 > 0$ beliebig. Wir zeigen die Stetigkeit der Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ im Punkt x_0. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := x_0^{1-\frac{1}{n}}\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| \overset{(*)}{\leq} \frac{|x - x_0|}{x_0^{1-\frac{1}{n}}} \leq \varepsilon$$

Wobei wir in $(*)$ benutzt haben, dass:

$$\begin{aligned}
|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| &= \left| \frac{\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)\left(x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{3}{n}}x_0^{\frac{2}{n}} + \ldots + x^{\frac{2}{n}}x_0^{1-\frac{2}{n}} + x^{\frac{1}{n}}x_0^{1-\frac{1}{n}}\right)}{x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{3}{n}}x_0^{\frac{2}{n}} + \ldots + x^{\frac{2}{n}}x_0^{1-\frac{2}{n}} + x^{\frac{1}{n}}x_0^{1-\frac{1}{n}}} \right| \\
&= \frac{|x - y|}{\left|x^{1-\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + x^{1-\frac{3}{n}}x_0^{\frac{2}{n}} + \ldots + x^{\frac{2}{n}}x_0^{1-\frac{2}{n}} + x^{\frac{1}{n}}x_0^{1-\frac{1}{n}}\right|} \leq \frac{|x - x_0|}{x_0^{1-\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

$\square$

2.6.2 Lösungen Hands-On 2

2.1

(a) Setze $g(x) := f(x) - x$. Es gilt:

$$g(0) = \sqrt[3]{0+1} - 0 = 1 \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{1+0} - \frac{\pi}{2} \leq 1 - 1,5 < 0$$

Da g stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz:

$$\exists x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = f(x_0)$$

$\square$

(b) **Falls** $f(a) = a \vee f(b) = b$ dann sind wir direkt fertig. ✓
Falls $f(a) \neq a \wedge f(b) \neq b$, setze $g(x) := f(x) - x$. Da $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ gilt also:

$$g(a) = f(a) - a > 0 \quad \wedge \quad g(b) = f(b) - b < 0$$

Da $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig ist, gilt mit dem Zwischenwertsatz:

$$\exists x_0 \in [a,b]\colon g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \quad ✓$$

$\square$

2.2

(a) Wir zeigen direkt folgendes:

> **Behauptung**
>
> $f_n(x)$ konvergiert gleichmässig (und insbesondere auch punktweise) gegen $f(x) \equiv 1$.

Beweis. Sei $x \in [0,1]$ beliebig. Dann gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| = 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Somit gilt also:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\square$

(b) Wir untersuchen zuerst die punktweise Konvergenz:

> **Behauptung**
>
> $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen $f \equiv 1$

Beweis.

Falls $x = 0$ Dann gilt: $f_n(0) = 1$ $(\forall n > 0)$ und somit: $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ ✓

Falls $x > 0$ Setze $n_0 := \lceil \frac{1}{x} \rceil \Rightarrow \forall n \geq n_0\colon f_n(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ ✓ $\square$

Behauptung

f_n konvergiert <u>nicht</u> gleichmässig gegen $f \equiv 1$.

Beweis. Sei $n > 0$ beliebig. Beachte dass $f_n(\frac{1}{n}) = n^2 \cdot \frac{1}{n} + 1 = n + 1$. Folglich:

$$\forall n > 0\colon \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |(n+1) - 1| = n \quad \Rightarrow \quad f_n \cancel{\xrightarrow{\text{glm}}} f$$

□

2.3 Angenommen f sei stetig. Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ und $f(x) = f(y) = K$, für ein $K \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten $f\big|_{[x,y]}$. Da $f\big|_{[x,y]}$ nicht konstant sein darf (sonst würde der Wert K überabzählbar oft angenommen), dürfen wir annehmen, dass:

$$\underbrace{\sup_{\xi \in [x,y]} f(\xi) > f(x) = f(y)}_{(1)} \quad \vee \quad \underbrace{\inf_{\xi \in [x,y]} f(\xi) < f(x) = f(y)}_{(2)}$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass (1) gilt (setze sonst $f := -f$).
Beachte: Da $[x, y]$ kompakt ist $\overset{\text{Satz 3.4.5}}{\Longrightarrow}$ $\sup f$ und $\inf f$ werden angenommen. Das heisst:

$$\exists z \in (x, y)\colon \sup_{\xi \in [x,y]} f(\xi) = f(z)$$

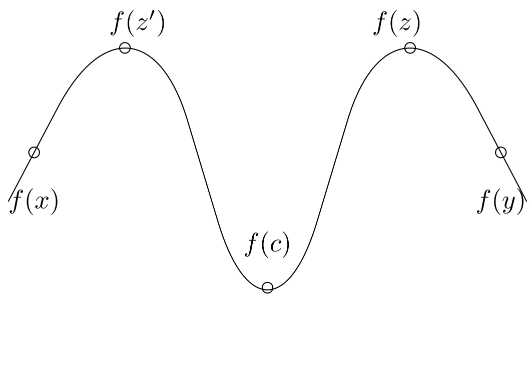
Nach der Definition von f muss es aber auch ein $z' \neq z$ gegen, mit $f(z') = f(z)$.
Wir zeigen nun folgendes:

Behauptung

z' liegt ausserhalb vom Intervall (x, y). (i.e. $z' \notin (x, y)$).

Beweis. Angenommen $z' \in (x, y)$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $x < z' < z < y$. Sei $c \in (z, z')$ beliebig. Da z, z' Maximalstellen im Intervall $[x, y]$ sind, muss gelten: $f(c) < f(z)$. (Falls Gleichheit gelten würde, hätten wir einen Widerspruch, da dann der Wert $f(z)$ dreimal angenommen werden würde.) Wir machen eine Fallunterscheidung:

Falls $f(c) < f(x) = f(y)$:

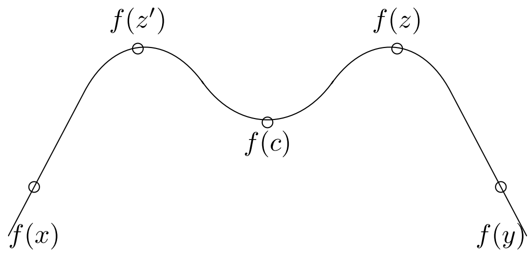


Dann gilt:

$$f(x) \in [f(c), f(z')] \quad \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \quad \exists \xi \in [c, z']\colon f(\xi) = f(x) = f(y).$$

Da offensichtlich $\xi \neq x \wedge \xi \neq y$, haben wir einen Widerspruch ↯

Falls $f(x) < f(c) = f(z')$**:**



Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(c) \in [f(x), f(z')] & \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} & \exists \xi_1 \in [x, z'] \colon f(\xi_1) = f(c) \\ f(c) \in [f(y), f(z)] & \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} & \exists \xi_2 \in [z, y] \colon f(\xi_2) = f(c) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(c)$$

Da ξ_1, ξ_2, c paarweise verschieden sind, haben wir auch hier einen Widerspruch. $\lightning$ $\square$

Wir wissen jetzt also, dass z' ausserhalb von (x, y) liegen muss. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $z' > y$. Dann haben wir drei identische Intervalle:

$$I := (f(x), f(z)) = (f(y), f(z)) = (f(y), f(z'))$$

Wähle ein $K \in I$. Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} K \in (f(x), f(z)) \subseteq f([x, z]) & \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} & \exists \xi_1 \in [x, z] \colon f(\xi_1) = K \\ K \in (f(y), f(z)) \subseteq f([z, y]) & \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} & \exists \xi_2 \in [z, y] \colon f(\xi_2) = K \\ K \in (f(y), f(z')) \subseteq f([y, z']) & \overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} & \exists \xi_3 \in [y, z'] \colon f(\xi_3) = K \end{array}\right\} \Longrightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = K$$

Beachte: $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \cap \{x, y, z, z'\} = \emptyset$, denn sonst wäre $K \in \{f(x), f(y), f(z)\}$ $\lightning$
(Wir haben K im offenen Intervall gewählt).
Deshalb sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 paarweise verschieden und nehmen alle den gleichen Wert an. $\lightning$
Dies waren alle Möglichkeiten. Da jeder Fall in einem Widerspruch geendet hat, muss die Annahme, dass f stetig sei, falsch sein. $\square$

2.6.3 Lösungen Hands-On 3

3.1

(a) Es gilt:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\tan x)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos x} \quad (\text{"vom Typ } \frac{0}{0}\text{"})$$

$$\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\sin x\cdot 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin x} = \underline{\underline{0}}$$

(b) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}$$

Wenn wir versuchen wollen BdH anzuwenden dann müssen wir überprüfen ob der Zähler tatsächlich gegen Null geht (der Nenner ist trivial).

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \overset{\text{log stetig}}{=} \log\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\right) \overset{\text{BdH}}{=} \log\left(\lim_{x\to 0}e^x\right) = \log(1) = 0 \quad \checkmark$$

Wir haben also in der Tat einen Grenzwert der Form $\frac{0}{0}$. Wir rechnen los:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x} \overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{e^x-1}\cdot\left(\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x x - e^x + 1}{(e^x-1)x}$$

$$\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x x + e^x - e^x}{e^x x + (e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x x}{e^x x + e^x - 1}$$

$$\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x x + e^x}{e^x x + e^x + e^x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(c) Da

$$F\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto x^y \quad \text{stetig}$$
$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto 3-|x| \quad \text{stetig}$$
$$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{\sin x}{x} \quad \text{stetig ergänzbar}$$

Und weil $\lim_{x\to 0} g(x) = 3$, $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$, gilt:

$$\lim_{x\to 0} F(g(x),h(x)) \overset{F\text{ stetig}}{=} F(3,1) = 3^1 = \underline{\underline{3}}$$

(d) Beachte: Da $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = \infty$ nicht existiert, dürfen wir die Exponentenregel nicht anwenden. Mit einem geschickten Variablenwechsel sehen wir jedoch:

$$y := g(x) = \frac{1}{x^2},\ y_0 := \lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$$

Variablenwechsel:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \overset{\text{VW}}{=} \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \overset{\text{ZF}}{=} \underline{\underline{e}}$$

(e) Mit Variablenwechsel:
Setze $f(y) := 2\frac{\sin x}{x}$, $g(x) := \frac{\log x}{x^2}$, $y_0 := \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) \overset{\text{VW}}{=} \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} 2\frac{\sin y}{y} = \underline{\underline{2}}$$

3.2

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-x}{x^3} &= \frac{-x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{x^3}\\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{x^3}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)}}_{=:a_n}\end{aligned}$$

Wir untersuchen den Konvergenzradius dieser Reihe mittels Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{2n}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|x|^{2(n-1)}} = \frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0<1 \quad (\forall x)$$

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradiuses stetig sind, folgern wir, dass obige Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Wir dürfen deshalb den Limes gliedweise berechnen:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)} = -\frac{1}{3!} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

(b) Auch hier formen wir um:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-x}{x^2(\exp(x)-1)} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}-x}{x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1}\\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}\\ &= \frac{\cancel{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)}}^{=:a_n}}{\cancel{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{n-1}}{n!}}_{=:b_n}}\end{aligned}$$

Falls beide Reihen stetig sind, und die Nennerreihe $\neq 0$, dann können wir die Grenzwerte separat betrachten.
Die Zählerreihe ist stetig (siehe (a)) und konvergiert gegen $\frac{1}{6}$. Für den Nenner berechnen wir wieder zuerst den Konvergenzradius mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|x|^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^{n-1}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0<1 \quad (\forall x)$$

Die Nennerreihe ist also ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und wir dürfen den Limes in die Summe ziehen:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x}{x^2(\exp(x))-1} = \frac{\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)}}{\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2(n-1)}}{\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0}\frac{x^{n-1}}{n!}} = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}$$

(c) Wir müssen zeigen dass: $\forall x\in[0,1]\colon x\geq\sin(x) \;\Leftrightarrow\; x-\sin(x)\geq 0$.
Sei also $x\in[0,1]$ beliebig. Es gilt:

$$x-\sin(x) = x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}}_{=:a_n}$$

Wieder gilt mit dem Quotientenkriterium, dass:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \quad (\forall x)$$

Das heisst, die Reihe konvergiert <u>absolut</u> und wir dürfen die Glieder umordnen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1} + a_{2k})$$

Behauptung

$$\forall k \geq 1 \colon a_{2k-1} + a_{2k} \geq 0$$

Beweis. Sei $k \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned} a_{2k-1} + a_{2k} &= \frac{(-1)^{(2k-1)+1}}{(2(2k-1)+1)!} x^{2(2k-1)+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{(2(2k)+1)!} x^{2(2k)+1} \\ &= \frac{1}{(4k-1)!} x^{4k-1} - \frac{1}{(4k+1)!} x^{4k+1} \\ &= \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(4k+1)4k}\right)}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

□

3 Differentialrechnung

3.1 Differentialquotient

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente an dieser Stelle falls diese wohldefiniert ist. Die Steigung lässt sich durch den sogenannten *Differentialquotienten* annähern bzw. bestimmen.

Definition 3.1. *Differentialquotient*

Der Differentialquotient einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ ist definiert durch:

$$f'(x_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn der oben genannte Grenzwert existiert. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst differenzierbar, wenn f an jeder Stelle $x \in \Omega$ differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Gleichung der Tangente am Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist nun gegeben durch:

$$T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3.2 Ableitungsregeln

Um die Ableitung einer Funktion zu berechnen reicht es, den Differentialquotienten zu bestimmen. Es gibt aber einfache Regeln, mit welchen wir eine Funktion effizient ableiten können.

Definition 3.2. *Linearität*
Es gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha f'(x) + g'(x)$

Definition 3.3. *Produkt- und Quotientenregel*
Produktregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Quotientenregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Definition 3.4. *Exponentenregel*
Es gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c \cdot x^a) = c \cdot a \cdot x^{a-1} \ \forall a, c \in \mathbb{R}$

Hier werden einige Funktionen aufgelistet, deren Ableitung man am besten auswendig lernt.

Behauptung 3.1

- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\log'(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x$

Definition 3.5. *Kettenregel*
Es gilt: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Normalerweise ist es einfach, die Ableitung auch von komplizierten Funktionen zu berechnen, solange man sich strikt an die Ableitungsregeln hält. Es gibt aber einen Trick, den man kennen sollte.

Beispiel. Berechne die Ableitung von $f(x) = x^x$.
Hier kann man keine der oben genannten Regeln direkt anwenden. Man kann aber die Definition einer reellen Potenz anwenden um f umzuschreiben :

$$f(x) = e^{x \log x}$$

Jetzt kann man die Kettenregel anwenden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \log x} \cdot (x \log x)' \\ &= e^{x \log x} \cdot (\log x + 1) \\ &= x^x \cdot (\log x + 1) \end{aligned}$$

Hands-On 1

1.1. Differenzierbarkeit

(a) Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

(b) **Challenge:** Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei die Funktion f_k definiert durch

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Für welche k ist die Funktion f_k in $x_0 = 0$ differenzierbar?

(c) Gegeben sei eine Funktion f mit $|f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f differenzierbar in $x = 0$ ist und berechne $f'(0)$.

(d) **Challenge:** Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

(e) **Challenge:** Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(f) Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

differenzierbar?

1.2. Differentialquotient
Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe des Differentialquotienten (und ohne die Regel von de l'Hôpital)

(a)
$$f(x) = \log(x)$$

(b) **Challenge:**
$$g(x) = e^{x^2}$$

(c)
$$h(x) = |x|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1.3. Ableitungsregeln
Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen

(a)
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}^{3/2}}$$

(b) **Challenge:** Seien f_1, f_2 differenzierbar. Berechne die Ableitung von
$$f(x) = f_1(x)^{f_2(x)}$$

(c)
$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = (3x)^{\log(x)}$$

(d) **Challenge:**
$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{xe^{-x}}{(1+x^2)^2}$$

1.4. Challenge: Stationäre Punkte
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{\cos(x)\sin(x)}$. Bestimme alle stationären Punkte von f, d.h. alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

3.3 Mittelwertsatz und Umkehrsatz

Satz: Mittelwertsatz

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b). Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Satz: Umkehrsatz

Sei $f : \Omega \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in \Omega$ ein Häufungspunkt. Sei f differenzierbar in x_0 und es gelte $f'(x_0) \neq 0$. Dann folgt:

- $y_0 := f(x_0)$ ist ein Häufungspunkt von E
- f^{-1} ist in y_0 differezierbar
- $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{bzw.} \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Am besten Illustrieren wir den Umkehrsatz anhand eines Beispiels:

Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + e^x$.

(a) Zeige, dass f bijektiv ist.

(b) Zeige, dass $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(c) Berechne $(f^{-1})(1)$ und $(f^{-}1)''(1)$

Lösung:

(a) Da $f'(x) = 1 + e^x > 0$ ist f injektiv. ✓Weiter gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Sei also $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Da f wegen obigen Grenzwerten beliebig gross und beliebig klein werden kann, gilt: $\exists x_1 < x_2 \colon f(x_1) < y < f(x_2)$. Mit dem Zwischenwertsatz gilt dann:
$\exists \xi \in [x_1, x_2] \colon f(\xi) = y$ und somit ist f surjektiv. ✓
Da f injektiv und surjektiv, ist f bijektiv. □

(b) Da f bijektiv und differenzierbar ist, gilt nach dem Umkehrsatz dass $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert und ebenfalls differenzierbar ist.

(c) Wir verwenden die Formel vom Umkehrsatz um $(f^{-1})'(1)$ zu berechnen:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

Wir müssen also $f^{-1}(1)$ berechnen.
Da $f(0) = 0 + e^0 = 1 \;\Rightarrow\; f^{-1}(1) = 0$ ✓
Wir könne also ausrechnen dass:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad ✓$$

Bleibt noch $(f^{-1})''(1)$. Wir gehen folgendermassen vor:

$$\begin{aligned}
(f^{-1})''(1) = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)'(1) &\overset{\text{Quot.-Regel}}{=} -\frac{(f' \circ f^{-1})'(1)}{[(f' \circ f^{-1})(1)]^2} \\
&\overset{\text{Kettenegel}}{=} -\frac{f''(f^{-1}(1)) \cdot (f^{-1})'(1)}{[f'(f^{-1}(1))]^2} \\
&= -\frac{f''(0) \cdot (f^{-1})'(1)}{f'(0)^2} \\
&= -\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2^2} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Wobei wir folgende Dinge verwendet haben:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + e^x & f^{-1}(1) &= 0 \\
f'(x) &= 1 + e^x & (f^{-1})'(1) &= \frac{1}{2} \\
f''(x) &= e^x
\end{aligned}$$

Hands-On 2

2.1. Einige Beweise

Beweise die folgenden Aussagen

(a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x) < 0\, \forall x \in (a, b)$. Dann ist f streng monoton fallend.

(b) **Challenge:** Sei $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gebe ein $M \geq 0$ mit

$$|g'(x)| \leq M \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass die Abbildung

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \epsilon g(x)$$

injektiv ist.

Hinweis: Mach eine Fallunterscheidung für $M = 0$ und $M > 0$.

2.2. Umkehrsatz
Sei $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ eine Funktion definiert durch:

$$f(x) = e^x + \arctan x.$$

(a) Zeige, dass f bijektiv ist.

(b) Zeige dass $(f^{-1})'(\xi)$ existiert für alle $\xi > -\frac{\pi}{2}$.

(c) Berechne $(f^{-1})'(1)$.

3.4 Taylorreihe

Jede glatte (d.h. beliebig oft differenzierbare) Funktion $f \in \mathbb{C}^\infty$ kann als Potenzreihe angenähert werden. Dazu verwenden wir die Taylor-Entwicklung.

Definition 3.6. *Taylor-Polynom*
Sei $f : I \to \mathbb{R} \in \mathbb{C}^\infty$, dann definieren wir das N-te Taylor-Polynom $T_N f(x; a)$ an einer beliebigen Entwicklungsstelle $a \in I$ wie folgt:

$$T_N f(x; a) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + ...$$

Bemerkung: Das N-te Taylor-Polynom hat Grad kleiner oder gleich N.
Mit Hilfe des Taylor-Polynoms können wir uns f nun beliebig annähern.

Definition 3.7. *Taylorreihe*
Sei $f \in \mathbb{C}^\infty$, dann kann f auch anders dargestellt werden:

$$Tf(x; a) := T_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Diese unendliche Reihe wird Taylorreihe von f an der Stelle a genannt.

Beispiel. Das 3. Taylorpolynom von $f(x) = \sin(x)$ entwickelt an der Stelle 0 lautet:

$$\begin{aligned} T_3 f(x; 0) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sin(0) + \cos(0) \cdot x + \frac{-\sin(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{-\cos(0)}{6} \cdot x^3 \\ &= x - \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Das N-te Taylor-Polynom nähert die Funktion f an. Wir können den Fehler wie folgt abschätzen:

Definition 3.8. *Fehlerabschätzung*
Sei $f \in \mathbb{C}^\infty$ und sei $T_N f(x;a)$ das N-te Taylor-Polynom von f. Dann gilt die folgende Gleichung für ein $x \geq a$:

$$f(x) = T_N(x) + R_N f(x;a) \tag{1}$$

Dabei ist $R_N f(x;a)$ der Fehler. Dieser Fehler kann nun wie folgt abgeschätzt werden:

$$|R_N f(x;a)| \leq \sup_{a<\xi<x} |f^{(N+1)}(\xi)| \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} \tag{2}$$

Der Fehler R_N wird umso grösser, je grösser die Differenz zwischen x und a ist.

Bemerkung: Gewisse Taylorreihen konvergieren gegen die Funktion f. Das muss aber nicht immer sein. In so einem Fall würde $\lim_{N\to\infty} R_N f(x;a) = 0$ gelten und man würde f analytisch im Punkt x nennen.

Beispiel. Bestimme $\sin(4)$ auf $d = 0.01$ genau.
Für diese Art von Aufgabe verwenden wir das folgende Schema:

1. Finde eine geeignete Stützstelle a und notiere die genaue Funktion, über die wir die Taylorentwicklung machen, sowie den x-Wert, von dem wir den genauen Wert berechnen wollen. Wichtig dabei ist, dass $x > a$ sein muss.

   Für unser Beispiel haben wir zwei Möglichkeiten: Entweder wählen wir $f(x) = \sin(x)$ mit $x_0 = 4$ und Stützstelle $a = \pi$ oder wir wählen $f(x) = \sin(\pi + x)$ mit $x_0 = 4 - \pi = 0.858407$ und $a = 0$. Beide Wege führen zum selben Resultat. Manchmal ist die zweite Variante besser, da wir als Stützstelle 0 verwenden können und somit das Taylorpolynom etwas einfacher ist.

   Fahren wir hier mit der ersten Variante weiter.

2. Bestimme die $(N+1)$-te Ableitung von $f(x)$. Dies hilft uns bei der Bestimmung des Restterms.

   In unserem Fall ist

$$f^{(N+1)}(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } (N+1) \mod 4 = 0 \\ \cos(x), & \text{falls } (N+1) \mod 4 = 1 \\ -\sin(x), & \text{falls } (N+1) \mod 4 = 2 \\ -\cos(x), & \text{falls } (N+1) \mod 4 = 3 \end{cases}$$

3. Bestimme den Restterm $R_N f(x_0;a)$.

   Hier gilt:

$$R_N \sin(4;\pi) \leq \sup_{\pi<\xi<4} |f^{(N+1)}(\xi)| \frac{(4-\pi)^{N+1}}{(N+1)!}$$

4. Löse die Ungleichung $|R_N f(x;a)| < d$ nach N auf. Dazu müssen wir die Ungleichung zuerst von ξ befreien, d.h. das Supremum des Restterms bestimmen.

   In unserem Fall gilt, da $f(x)$ entweder $\pm\sin(x)$ oder $\pm\cos(x)$ ist, dass $|f(x)| \leq 1$. Somit können wir den Restterm wie folgt abschätzen:

$$R_N \sin(4;\pi) \leq 1 \cdot \frac{(4-\pi)^{N+1}}{(N+1)!} \overset{!}{<} 0.01$$

   Durch ausprobieren bemerkt man schnell, dass $N \geq 4$ gelten muss.

5. Jetzt wissen wir, wie weit wir die Taylorentwicklung durchführen müssen. Wir bestimmen also das N-te Taylorpolynom und setzen unseren gewünschten Wert ein.

Für unser Beispiel gilt (vgl. oben):

$$T_4 \sin(x;\pi) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6}$$

Wenn wir jetzt $x = 4$ einsetzen, erhalten wir

$$T_4 \sin(4;\pi) = -0.75299$$

Vergleichen wir das mit dem tatsächlichen Wert von $\sin(4) = -0.75680$ sehen wir, dass wir um weniger als 0.01 abweichen.

Hands-On 3

3.1. Taylorpolynom
Entwickle für die folgenden Funktionen das N-te Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt a.

(a) $f(x) = \log(1+x), x > -1; N = 3, a = 0$

(b) **Challenge:** $f(x) = \log(x), x > 0; N = 3, a = 1$

(c) $g(x) = e^{e^x}; N = 3, a = 0$

(d) **Challenge:** $h(x) = \sin(xe^x); N = 4, a = 1$

(e) **Challenge:** $h(x) = \sin(\cos(x)); N = 2, a = 0$

3.2. Taylorreihe
Entwickle für die folgenden Funktionen eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt a.

(a) $f(x) = \log(1+x), x > -1; a = 0$

3.3. Bestimmung von Funktionswerten
Bestimme die folgenden Funktionswerte auf die angegebene Genauigkeit

(a) $e^{1/2}$ auf 10^{-3} genau

3.5 Funktionen untersuchen

Eine typische Prüfungsaufgabe ist es eine Funktion zu untersuchen. Damit wir verstehen, auf was wir eine Funktion der Form $f : \Omega \to \mathbb{R}$ untersuchen können, werden hier die häufigsten Merkmale kurz definiert.

Definition 3.9. *Extrema*
f besitzt ein lokales Maximum in $x_0 \in \Omega$, falls: $\exists\, \delta > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Omega : \ \ f(x) \leq f(x_0)$.
f besitzt ein lokales Minimum in $x_0 \in \Omega$, falls: $\exists\, \delta > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \Omega : \ \ f(x) \geq f(x_0)$.
f besitzt ein Extremum in x_0, falls es entweder ein lokales Minima oder Maxima von f ist.

Definition 3.10. *Monotonie*
f ist monoton wachsend auf Ω, falls $\forall x, y \in \Omega : \ x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
f ist streng monoton wachsend auf Ω, falls $\forall x, y \in \Omega : \ x < y \implies f(x) < f(y)$.
f ist monoton fallend auf Ω, falls $\forall x, y \in \Omega : \ x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
f ist streng monoton fallend auf Ω, falls $\forall x, y \in \Omega : \ x < y \implies f(x) > f(y)$.

Definition 3.11. *x_0 ist eine kritische Stelle von f, falls $f'(x_0)$ gleich null oder undefiniert ist.*

Definition 3.12. *Konvexität einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Ω-ein Intervall.*
f ist konvex auf Ω, falls $\forall\, x_0 < x_1 \in \Omega\ \forall t \in [0,1]:\quad f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$.
f ist konkav auf Ω, falls $\forall\, x_0 < x_1 \in \Omega\ \forall t \in [0,1]:\quad f(tx_1 + (1-t)x_0) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$.

Bemerkung: Bei strenger Konvexität/Konkavität sieht die Definition genau gleich aus, ausser dass das Ungleichheitszeichen strikt ist.

Definition 3.13. *Sattel- und Wendepunkt einer stetigen Funktion f*
x_0 ist ein Wendepunkt von f, falls sich der Drehsinn der Tangente ändert:

$$\begin{aligned} \exists \alpha, \beta \in \Omega : \quad & (f \text{ streng konvex auf } (\alpha, x_0) \wedge f \text{ streng konkav auf } (x_0, \beta)) \\ \vee \quad & (f \text{ streng konkav auf } (\alpha, x_0) \wedge f \text{ streng konvex auf } (x_0, \beta))\ . \end{aligned}$$

x_0 ist ein Sattelpunkt von f, falls x_0 ein Wendepunkt von f ist und $f'(x_0) = 0$ gilt.

Da ein Beweis von Monotonie oder Konvexität nur mithilfe dieser Definitionen schwierig sein kann, betrachten wir folgenden Satz, der uns hilft, schnell Monotonie und Konvexität von Funktionen zu bestimmen.

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

- falls $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend.
- falls $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f monoton wachsend.
- falls $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton fallend.
- falls $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f monoton fallend.

Ist f sogar zweimal differenzierbar auf (a,b), dann:

- falls $f''(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f streng konvex auf (a,b).
- falls $f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f konvex auf (a,b).
- falls $f''(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f streng konkav auf (a,b).
- falls $f''(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$, dann ist f konkav auf (a,b).

Ähnlich wie bei Monotonie, betrachten wir für die bestimmung von Extrema, kritischen Punkten etc diesen nützlichen Satz:

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf (a,b) 3-mal stetig differenzierbar und sei $a < x_0 < b$.

- Falls $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.
- Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein strikt lokales Minimum.
- Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 ein strikt lokales Maximum.

Ist f auf (a, b) (n+1)-mal stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$, dann:

- Falls n gerade ist und x_0 ein lokales Extrema (Min oder Max) ist, folgt dass $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.
- Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 ein lokales Maximum.
- Falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0 ein lokales Minimum.

Hands-On 4

4.1. Kurvendiskussion
Untersuche folgende Funktionen im Hinblick auf Definitionsbereich, Extrema, Wendepunkte, Konvexität und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$

(a) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)}$

(b) $f(x) = x\sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3} \cdot \cos(x)$

(d) **Challenge:** $f(x) = \begin{cases} x^2(\log|x| - 1) & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$

3.6 Lösungen

3.6.1 Lösungen Hands-On 1

1.1

(a) f ist genau dann in $x_0 = 0$ differenzierbar, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{x}$$

Dafür muss der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert sein, also

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{x} \stackrel{!}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0$$

Das heisst, der rechtsseitige Grenzwert ($x \to 0^+$) muss $= 0$ sein. Dafür muss $\alpha > 1$ sein, denn dann gilt:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x})$$

$$0 \le |x^{\alpha-1} \sin(\frac{1}{x})| \le |x|^{\alpha-1} \stackrel{x\to 0}{\to} 0$$

Wenn $\alpha = 1$ ist, dann ist der rechtsseitige Grenzwert $= \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht definiert, und falls $\alpha < 1$, dann gilt $\lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \infty$, so dass auch dann der Grenzwert nicht existiert.

(b) **Challenge:** Wir untersuchen die verschiedenen Fälle :

- Fall $k = 0$: es gilt

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt : $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0)$, somit ist die Funktion in diesem Punkt nicht stetig. Daraus folgt dass sie in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

- Fall $k = 1$: es gilt

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Analog ist in diesem Fall die Funktion in $x_0 = 0$ nicht stetig und somit nicht differenzierbar.

- Fall $k = 2$: es gilt

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Wir sehen also dass $f_2(x) = |x|$. Die Betragsfunktion ist in 0 nicht differenzierbar weil $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|0+h|-|0|}{h}$. Somit ist die Funktion in diesem Fall in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

- Fall $k > 2$: es gilt

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^k}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^k}{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} xx^{k-2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -xx^{k-2}, & x < 0 \end{cases}$$

Berechnen wir die Grenzwerte des Differentialquotienten in $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f_k(0+h) - f_k(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{hh^{k-2}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} h^{k-2} = 0 \quad (\text{weil } k > 2)$$

und analog

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f_k(0+h)-f_k(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-hh^{k-2}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} -h^{k-2} = 0 \quad (\text{weil } k>2)$$

Es folgt also dass $\lim_{h\to 0} \frac{f_k(0+h)-f_k(0)}{h} = 0$, somit ist die Funktion in $x_0 = 0$ differenzierbar.

Fazit : f ist in $x_0 = 0$ differenzierbar genau dann wenn $k > 2$.

(c) Damit f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist, muss der folgende Grenzwert existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Wir wissen, dass $|f(x)| \le x^2$ gilt, also ist $|f(0)| \le 0 \iff f(0) = 0$. Also gilt für den Grenzwert des Differentialquotienten:

$$0 \le \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{x^2}{|x|} = |x| \overset{x\to 0}{\to} 0$$

Mit Hilfe des Sandwich-Theorems gilt für den Grenzwert also

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

(d) **Challenge:** Wir unterscheiden je nach Vorzeichen von x. Falls $x > 0$ gilt, dann haben wir $f(x) = \sqrt{x}$ und somit

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty.$$

Andernfalls, wenn $x < 0$, ergibt sich $f(x) = \sqrt{-x}$ und daher

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Da die Grenzwerte nicht übereinstimmen, gilt insbesondere, dass $f'(0)$ per Definition nicht definiert ist.

(e) **Challenge:** Für ein $x \ge 0$ haben wir $f(x) = x^2$, also $f'(x) = 2x$, und somit

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x = 0.$$

Andererseits gilt für $x < 0$, dass $f(x) = 0$ und ebenso $f'(x) = 0$, also im Speziellen auch

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0.$$

Beachte, da es im Zweidimensionalen nur zwei "Richtungen" gibt, reicht es, dass diese beiden Grenzwerte gleich sind, anstatt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen 0 strebt zu zeigen, dass auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ gilt.

(f) Nein, denn f ist in $x = 0$ nicht stetig, da $0^2 + 0 = 0 \ne 1 = e^0$ und somit auch nicht differenzierbar in $x = 0$.
Abgesehen vom Punkt $x = 0$ ist f aber überall differenzierbar, da sowohl das Polynom $x^2 + x$ als auch die Exponentialfunktion stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sind.

1.2

(a) Wir schreiben den Differentialquotienten der Einfachheit halber ein wenig um zu:

$$\log'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\log(x) - \log(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

Diesen Grenzwert berechnen wir jetzt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log(\frac{x+h}{x}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x}{x} \frac{1}{h} \log(\frac{x+h}{x}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{h} \log(1 + \frac{h}{x}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log((1 + \frac{h}{x})^{x/h}) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \log(\underbrace{\lim_{h\to 0} (1 + \frac{h}{x})^{x/h}}_{\text{Definition von } e}) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \log(e) = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

(b) **Challenge:** Wir formen so weit wie möglich um:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} \\
= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x^2+2xh+h^2} - e^{x^2}}{h} \\
= e^{x^2} \lim_{h\to 0} \frac{e^{2xh+h^2} - 1}{h}.
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gilt. Damit erhalten wir

$$e^{2xh+h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xh+h^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+h)^n h^n}{n!}.$$

Setzen wir das in die obige Rechnung ein, und betrachten die ersten beiden Summanden separat, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(x) &= e^{x^2} \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+h)^n h^n}{n!} - 1}{h} \\
&= e^{x^2} \lim_{h\to 0} \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+h)^n h^n}{n!} - 1}{h} \\
&= e^{x^2} \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+h)^n h^{n-1}}{n!} \\
&= e^{x^2} \lim_{h\to 0} 2x + h + h \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+h)^n h^{n-2}}{n!} \right) \\
&= e^{x^2} 2x.
\end{aligned}$$

Beachte, dass die Reihe konvergent bleibt, da wir lediglich die ersten beiden Summanden subtrahieren.

(c) Hier unterscheiden wir zwei Fälle:

- $x_0 > 0$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \\ &\overset{x_0 \geq 0}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- $x_0 < 0$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} \\ &\overset{x_0 \leq 0}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Die Ableitung von $|x|$ ist also:

$$(|x|)' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

1.3

(a) Die direkte Anwendung der Regeln ergibt $f'(x) = \frac{2-x^2}{2(x^2+1)^{7/4}}$.

(b) **Challenge:** Zuerst stellen wir fest

$$f(x) = f_1(x)^{f_2(x)} = e^{\log(f_1(x)) \cdot f_2(x)}.$$

Für $g(x) = e^x$ und $h(x) = \log(f_1(x)) \cdot f_2(x)$ haben wir also $f(x) = g(h(x))$ und mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x))h'(x) \\ &= e^{\log(f_1(x)) \cdot f_2(x)} h'(x) \\ &= f_1(x)^{f_2(x)} h'(x). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Produktregel und der Kettenregel erhalten wir

$$h'(x) = \frac{1}{f_1(x)} f_1'(x) f_2(x) + \log(f_1(x)) f_2'(x).$$

Also insgesamt

$$f'(x) = f_1(x)^{f_2(x)} \left(\frac{f_1'(x) f_2(x)}{f_1(x)} + \log(f_1(x)) f_2'(x) \right).$$

(c) Hier können wir keine der bekannten Ableitungsregeln benutzen. Wir können aber den oben beschriebenen Trick anwenden und f umschreiben zu

$$f(x) = e^{\log(x) \log(3x)}$$

Damit ist die Ableitung einfach zu berechnen und wir erhalten

$$f'(x) = (3x)^{\log(x)} \frac{1}{x} (\log(3x) + \log(x))$$

(d) **Challenge:** Um die Quotientenregel anwenden zu können, brauchen wir die einzelnen Ableitungen des Zählers und des Nenners. Fangen wir mit dem Zähler an. Wir benutzen die Produktregel und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} xe^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Für den Nenner ergibt sich mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x^2)^2 = 2(1+x^2)\cdot 2x = 4x(1+x^2).$$

In die Quotientenregel eingesetzt bekommen wir so

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{-x}(1-x)(1+x^2)^2 - xe^{-x}4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^{-x}(1-x)(1+x^2) - 4x^2e^{-x}}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{e^{-x}(1+x^2-x(1+x^2)-4x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{e^{-x}(1-x-3x^2-x^3)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

1.4 Challenge: Wir verwenden erst die Kettenregel und dann die Produktregel um

$$f'(x) = e^{\cos(x)\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

zu berechnen. Da $e^{\cos(x)\sin(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $f'(x)$ genau dann 0, wenn $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$. Mit der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ erhalten wir

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

3.6.2 Lösungen Hands-On 2

2.1

(a) Seien $x, y \in (a,b)$ beliebig, mit $x < y$.

Behauptung

$$f(x) > f(y) \quad \text{oder äquivalent:} \quad 0 > f(y) - f(x)$$

Wir dürfen dabei verwenden, dass:

$$(*) \quad \forall x \in (a,b)\colon f'(x) < 0$$

Mit dem Mittelwertsatz folgern wir:

$$\exists \xi \in (x,y)\colon f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\overset{(*)}{<0}} \underbrace{(y-x)}_{>0} < 0$$

(b) **Challenge:** Beachte:

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ streng monoton} \quad \Leftrightarrow \quad f' > 0 \vee f' < 0, \quad (\forall x \in (-1,1))$$

Wir versuchen deshalb ε so zu wählen, dass folgendes gilt:

$$f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \overset{!}{>} 0, \quad (\forall x \in (-1,1))$$

Falls $M = 0$ Dann gilt wegen $|g'(x)| \leq M = 0$ $(\forall x \in (-1,1))$, dass $g' \equiv 0$ und deshalb $f'(x) = 1 + \varepsilon \cdot 0 = 1 > 0$ ✓

Falls $M > 0$ Dann setze $\varepsilon := \frac{1}{2M}$.
Es gilt:

$$f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \overset{(*)}{\geq} 1 + \varepsilon(-M) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad ✓$$

(Wobei wir in $(*)$ verwendet haben dass $|g'(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq g'(x)$)

2.2

(a)

Behauptung

$$f \text{ ist injektiv}$$

Beweis.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Das heisst, f ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ und somit injektiv. □

Behauptung

$$f \text{ ist surjektiv}$$

Beweis.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \arctan x}_{(*)} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$(*)$ geht gegen $-\frac{\pi}{2}$ da der Arcustangens die Umkehrfunktion des Tangens ist und wegen:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty.$$

Sei nun $y \in (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ beliebig. Dann finden wir sicher zwei Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so dass $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$.
Mit dem Zwischenwertsatz existiert dann (wegen der Stetigkeit von f) ein $x \in [x_1, x_2]$ mit $f(x) = y$.
Folglich ist f surjektiv. □

Da f injektiv und surjektiv ist, ist f auch bijektiv. □

(b) Da $f' > 0$ ist nach dem Umkehrsatz $f^{-1}\colon (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Das heisst, für alle $\xi > -\frac{\pi}{2}$ existiert $(f^{-1})'(\xi)$ (wie gewünscht).

(c) Wir verwenden die Umkehrsatz-Formel:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

Wir müssen also herausfinden was $f^{-1}(1)$ ist. Dazu überlegen wir, welches Argument x wir in $f(x)$ einsetzen müssen um 1 zu erhalten.
Nach kurzem Überlegen sehen wir dass $x = 0$ zur Lösung führt, denn:

$$\tan(0) = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan(0) = 0$$

Und somit:

$$f(0) = e^0 + \arctan(0) = 1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(1) = 0 \quad \checkmark$$

Deswegen gilt:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + \frac{1}{1+0}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3.6.3 Lösungen Hands-On 3

3.1

(a)

$$
\begin{aligned}
T_3f(x;0) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\
&= \log(1+0) + \frac{1}{1+0}\cdot x - \frac{1}{(1+0)^2\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{2}{(1+0)^3\cdot 6}\cdot x^3 \qquad = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}
\end{aligned}
$$

(b) **Challenge:** Die ersten 3 Ableitungen von $f(x) = \log(x)$ sind:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} &\implies\quad & f'(1) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} &\implies\quad & f''(1) = -1 \\
f^{(3)} &= \frac{2}{x^3} = 2\cdot x^{-3} &\implies\quad & f^{(3)}(1) = 2
\end{aligned}
$$

Also haben wir:

$$
T_3f(x;1) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3
$$

(c) $T_3f(x;0) = e + ex + ex^2 + \frac{5ex^3}{6}$

(d) **Challenge:** Die ersten 4 Ableitungen von $h(x) = \sin(x\cdot e^x)$ sind:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \cos(x\cdot e^x)(e^x + x\cdot e^x) \\
&\implies h'(1) = 2e\cdot\cos(e) \\
h''(x) &= \cos(x\cdot e^x)(2e^x + x\cdot e^x) - \sin(x\cdot e^x)(e^x + x\cdot e^x)^2 \\
&\implies h''(1) = 3e\,\cos(e) - 4e^2\sin(e) \\
h^{(3)}(x) &= \cos(x\cdot e^x)((x\cdot e^x + 3e^x) - (x\cdot e^x + e^x)^3) - 3\sin(x\cdot e^x)(x\cdot e^x + e^x)(x\cdot e^x + 2e^x) \\
&\implies h^{(3)}(1) = \cos(e)(4e - 8e^3) - 18e^2\sin(e) \\
h^{(4)}(x) &= \sin(x\cdot e^x)((x\cdot e^x + e^x)^4 - 4(x\cdot e^x + 3e^x)(x\cdot e^x + e^x) - 3(x\cdot e^x + 2e^x)^2) \\
&\quad + \cos(x\cdot e^x)((x\cdot e^x + 4e^x) - 6(x\cdot e^x + 2e^x)(x\cdot e^x + e^x)^2) \\
&\implies h^{(4)}(1) = \sin(e)(16e^4 - 59e^2) + \cos(e)(5e - 72e^3)
\end{aligned}
$$

Also haben wir:

$$
\begin{aligned}
T_4h(x;1) = \sum_{n=0}^{4} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \sin(e) + 2e\cdot\cos(e)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}(3e\,\cos(e) - 4e^2\sin(e))(x-1)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(\cos(e)(4e - 8e^3) - 18e^2\sin(e))(x-1)^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}(\sin(e)(16e^4 - 59e^2) + \cos(e)(5e - 72e^3))(x-1)^4
\end{aligned}
$$

(e) **Challenge:** Die ersten 2 Ableitungen von $h(x) = \sin(\cos(x))$ sind:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -\sin(x)\cos(\cos(x)) \implies h'(0) = 0 \\
h''(x) &= -\sin(x)^2\sin(\cos(x)) - \cos(x)\cos(\cos(x)) \implies h''(0) = -\cos(1)
\end{aligned}
$$

Also haben wir: $\quad T_2h(x;0) = \sum_{n=0}^{2} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sin(1) - \frac{1}{2}x^2\cos(1)$

3.2

(a) Wie in Aufgabe 3.1 erhalten wir

$$Tf(x;0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$$

3.3

(a) Wir gehen nach dem im Theorieteil genannten Schema vor:

i) Funktion und Stützstelle definieren:
Am einfachsten wählen wir $f(x) = e^x$ und Stützstelle $a = 0$. Wir wollen $f(\frac{1}{2})$ berechnen.

ii) $(N+1)$-te Ableitung von e^x finden:
$f^{(N+1)} = e^x$

iii) Den Restterm bestimmen:
Um das Supremum von $f^{(N+1)} = e^x$ abzuschätzen, benutzen wir, dass e^x monoton steigend ist.

$$R_N f(\frac{1}{2}; 0) \leq \sup_{0<\xi<\frac{1}{2}} |f^{(N+1)}(\xi)| \frac{(\frac{1}{2} - 0)^{N+1}}{(N+1)!} = e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{N+1}(N+1)!}$$

iv) Die Ungleichung $R_N < d = 10^{-3}$ nach N auflösen:

$$e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{N+1}(N+1)!} \overset{!}{<} 0.001 \iff N \geq 4$$

v) Das N-te Taylorpolynom bestimmen und ausrechnen:

$$T_4 f(x;0) = \sum_{n=0}^{4} \frac{x^n}{n!}$$

$$\implies T_4 f(\frac{1}{2}; 0) = 1.6484$$

Der exakte Wert von $e^{1/2}$ ist 1.64872. Wir sind also sogar weniger als 0.0003 entfernt.

3.6.4 Lösungen Hands-On 4

4.1

(a) Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)}$.

i) Der Definitionsbereich ist $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da die Funktion in 1 nicht definiert ist.

ii) Das Verhalten gegen $\pm\infty$ ist: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-1)} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-1)} = -\infty$

iii) Die Ableitungen von f sind:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

iv) Die NS von $f'(x)$ sind $x_0 = 0, x_1 = 2$. Also sind x_0, x_1 die kritischen Stellen.
$f'(x)$ ist auf $(0, 2)$ negativ, ie f ist auf $(0, 2)$ streng monoton fallend.
$f'(x)$ ist auf $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ positiv, ie f ist auf $(-\infty, 0)$ und $(2, \infty)$ streng monoton wachsend.

v) $f''(x)$ hat keine NS (also auch keine Wendepunkte). Also gilt:
$f''(x)$ ist auf $(-\infty, 1)$ negativ, ie f ist auf $(-\infty, 1)$ streng konkav.
$f''(x)$ ist auf $(1, \infty)$ positiv, ie f ist auf $(1, \infty)$ streng konvex.

vi) Wir betrachten noch nun $f''(x_0)$ und $f''(x_1)$:
Da $f''(x)$ auf $(-\infty, 1)$ negativ ist, gilt auch dass $f''(x_0) < 0$, ie x_0 ein strikt lokales Max von f ist.
Da $f''(x)$ auf $(1, \infty)$ positiv ist, gilt auch dass $f''(x_1) > 0$, ie x_1 ein strikt lokales Min von f ist.

(b) Betrachten wir die Funktion $f(x) = x\sqrt{x}$.

i) Der Definitionsbereich ist $\Omega = [0, +\infty)$, da die Wurzel für negative Werte nicht definiert ist (in $\mathbb{R}$).

ii) Das Verhalten gegen $+\infty$ ist: $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$

iii) Die Ableitungen von f sind:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

iv) Die NS von $f'(x)$ ist $x_0 = 0$. Also ist x_0 eine kritische Stelle.
$f'(x)$ ist auf $(0, +\infty)$ positiv, ie f ist auf $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend.

v) $f''(x)$ hat keine NS (also auch keine Wendepunkte). Also gilt:
$f''(x)$ ist auf $(0, +\infty)$ positiv, ie f ist auf $(0, +\infty)$ streng konvex.

vi) Da $f''(x_0)$ nicht definiert ist, können wir den Satz nicht wie normalerweise anwenden. Wir wissen aber, dass f streng monoton wachsend ist, also können wir sagen, dass x_0 ein strikt (lokales) Min von f ist.

(c) Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$.

i) Der Definitionsbereich ist $\Omega = \mathbb{R}$

ii) Da f periodisch ist ($f(x) = f(x + 2\pi)$), existieren die Grenzwerte gegen $\pm\infty$ nicht.

iii) Die Ableitungen von f sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) \end{aligned}$$

iv) Die NS von $f'(x)$ sind $x_0 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$. Also sind alle x_0, x_1 kritische Stellen. Wir betrachten im Weiteren die Funktion auf $[0, 2\pi]$, da f periodisch ist.
$f'(x)$ ist auf $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$ negativ, ie f ist auf $(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$ streng monoton fallend.
$f'(x)$ ist auf $[0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{7\pi}{6}, 2\pi]$ positiv, ie f ist auf $[0, \frac{\pi}{6}]$ und $(\frac{7\pi}{6}, 2\pi]$ streng monoton wachsend.

v) Die NS von $f''(x)$ sind $\widetilde{x}_0 = \frac{2\pi}{3}, \widetilde{x}_1 = \frac{5\pi}{3}$.
$f''(x)$ ist auf $[0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ negativ, ie f ist auf $[0, \frac{2\pi}{3})$ und $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ streng konkav.
$f''(x)$ ist auf $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ positiv, ie f ist auf $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ streng konvex.
Da das Vorzeichen von f'' in den Punkten $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1$ welchselt, können wir sagen, dass $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1$ Wendepunkte sind (allerdings keine Sattelpunkte, da $f'(\widetilde{x}_0) \neq 0, f'(\widetilde{x}_1) \neq 0$).

vi) Wir betrachten noch nun $f''(x_0)$ und $f''(x_1)$:
Da $f''(x)$ auf $[0, \frac{2\pi}{3})$ negativ ist, gilt auch dass $f''(x_0) < 0$, ie x_0 ein strikt lokales Max von f ist.
Da $f''(x)$ auf $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ positiv ist, gilt auch dass $f''(x_1) > 0$, ie x_1 ein strikt lokales Min von f ist.

(d) **Challenge:** Betrachten wir die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2(\log|x| - 1) & , \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \end{cases}$.

Der Definitionsbereich ist $\Omega = \mathbb{R}$

Das Verhalten gegen $+\infty$ ist: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ weil $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ und $\lim_{x\to+\infty} \log|x| = +\infty$. Aus Symmetrie ($\forall x \in \mathbb{R} : |x| = |-x|$ und $x^2 = (-x)^2$) folgt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Um die Ableitungen von f zu berechnen, schreiben wir f als

$$f(x) = \begin{cases} x^2(\log(x) - 1) & , \text{falls } x > 0 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \\ x^2(\log(-x) - 1) & , \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Wir berechnen die Ableitung in 0 mittels dem Differentialquotienten :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2(\log(|h|) - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} h\log(|h|) - h = 0 \text{ (weil } \lim_{x\to 0^+} x\log x = 0)$$

Es gilt also $f'(0) = 0$ in den Punkten ungleich 0 ist die Ableitung leicht zu berechnen :

$$f'(x) = \begin{cases} x(2\log(x) - 1) & , \text{falls } x > 0 \\ 0 & , \text{falls } x = 0 \\ x(2\log(-x) - 1) & , \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Berechnen wir nun die zweite Ableitung :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{h(2\log(x) - 1)}{h} = \lim_{x\to 0^+} 2\log(x) - 1 = +\infty$$

Somit ist f in 0 nicht zweimal ableitbar. Des weiteren gilt :

$$f''(x) = \begin{cases} 2\log(x) + 1 & , \text{falls } x > 0 \\ \text{nicht definiert} & , \text{falls } x = 0 \\ 2\log(-x) + 1 & , \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Die NS von $f'(x)$ sind $x_0 = -\sqrt{e}, x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{e}$. Also sind alle x_0, x_1, x_2 kritischen Stellen. Auf den Intervallen $]-\infty; -\sqrt{e}[$ und $]0, \sqrt{e}[$ ist die erste Ableitung strikt negativ, somit ist die Funktion auf den Intervallen $]-\infty; -\sqrt{e}]$ und $[0; \sqrt{e}]$ streng monoton fallend. Analog ist auf den Intervallen $]-\sqrt{e}; 0[$ und $]\sqrt{e}; +\infty[$ die erste Ableitung strikt positiv, somit ist die Funktion auf den Intervallen $[-\sqrt{e}; 0]$ und $[\sqrt{e}; +\infty[$ streng monoton wachsend. Daraus schlissen wir dass die Minimalstellen $x_0 = -\sqrt{e}$ und $x_2 = \sqrt{e}$ sind. Die einzige lokale Maximalstelle ist $x_1 = 0$.

Die NS von $f''(x)$ sind $\tilde{x}_0 = -\sqrt{1/e}$ und $\tilde{x}_1 = -\sqrt{1/e}$. Auf den Intervallen $]-\infty; -\sqrt{1/e}[$ und $]\sqrt{1/e}; +\infty[$ ist die zweite Ableitung strikt positiv, somit ist die Funktion auf diesen Intervallen streng konvex. Auf $]-\sqrt{1/e}; \sqrt{1/e}[\backslash\{0\}$ ist die zweite Ableitung strikt negativ, somit ist f auf dem Intervall $]-\sqrt{1/e}; \sqrt{1/e}[$ streng konkav. Daraus folgt dass $\tilde{x}_0 = -\sqrt{1/e}$ und $\tilde{x}_1 = -\sqrt{1/e}$ Wendepunkte sind.

4 Integralrechnung

4.1 Das Riemann-Integral

Das Riemann-Integral einer Funktion liefert grundsätzlich die zwischen dem Graphen und der X-Achse eingeschlossene Fläche. Wir wollen uns dieser Fläche annähern, indem wir die Funktion in Teilintervalle aufteilen.
Gegeben sei also eine stetige Funktion $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine grobe Annäherung an die Fläche zwischen dem Graphen von f und der X-Achse ist das Rechteck $f(a) \cdot (b - a)$. Eine bessere Annäherung erreichen wir, wenn wir das Intervall $[a, b]$ aufteilen und die entstehenden Teilrechtecke aufsummieren.

Definition 4.1. *Partitionierung*
Wir teilen das Intervall $I = [a, b]$ in n Teilintervalle auf. Das gibt uns eine Menge von Grenzpunkten $x_0 < x_1 < ... < x_n$.

$$P := \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\} \subset I$$

Ein Teilintervall I_i ist gegeben durch

$$I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

Die Breite eines Rechtecks des Teilintervalls I_i ist gegeben durch $d_i = x_i - x_{i-1}$
Für die Höhe eines Rechtecks wählen wir einen beliebigen Punkt auf dem Intervall I_i und betrachten dessen Funktionswert. Diese Punkte bezeichnet man auch als *Stützstellen*.

Definition 4.2. *Stützstellen*
Aus jedem Teilintervall I_i wählen wir einen Punkt ξ_i. Das gibt uns die Menge der Stützstellen $\xi_1 ... \xi_n$.

$$\xi := \{\xi_1, ..., \xi_n\}, \text{ wobei } \xi_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

Die Höhe des Rechtecks vom Teilintervall I_i ist also gegeben durch $h_i = f(\xi_i)$. Summieren wir alle Teilrechtecke auf, erhalten wir die sogenannte *Riemann-Summe*.

Definition 4.3. *Die Riemann-Summe*
Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, sowie eine Partitionierung P in n Teile und Stützstellen ξ. Dann ist die Riemannsche Summe definiert durch:

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}}$$

Wenn wir beliebige Stützstellen wählen, ist es schwierig abzuschätzen, ob die Riemann-Summe grösser oder kleiner als die tatsächliche Fläche unter dem Graphen ist. Deshalb definieren wir die Unter- bzw Obersumme. Hier können wir nur noch die Partitionierung frei wählen, die Stützstellen sind allerdings gegeben, und zwar jeweils durch das Infimum (bzw. Supremum) der Funktion in jedem Teilintervall.

Definition 4.4. *Unter- und Obersumme*
Gegeben sei eine Partitionierung P. Dann definieren wir:
Untersumme

$$\underline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Obersumme

$$\overline{S}(f, P) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Es gilt nun für jede mögliche Partitionierung P von $[a, b]$, dass $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$.

Wir können nun das Infimum der Obersumme bzw. das Supremum der Untersumme bilden. Das machen wir, indem wir eine unendlich feine Partitionierung von $[a,b]$ wählen. Dafür eignet sich die uniforme Partitionierung (jedes Teilintervall hat die selbe Breite) gut.

$$P_{n,uniform} := \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, x_n = b\}$$
$$I_i = [a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}, a + \frac{i(b-a)}{n}]$$

$$\sup \underline{S}(f,P) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot \frac{b-a}{n}$$
$$\inf \overline{S}(f,P) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in I_i} f(x) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Definition 4.5. *Riemann-Integrierbarkeit*
Eine Funktion $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst Riemann-Integrierbar (kurz R-Integrierbar), wenn gilt:

$$\sup_{P_1} \underline{S}(f,P_1) = \inf_{P_2} \overline{S}(f,P_2) =: A$$

Also wenn sich die Unter- und Obersumme annähern, je feiner die Partitionierung wird. In diesem Fall wird A als das Riemann-Integral von f bezeichnet. Man schreibt dann

$$A := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Eine andere, äquivalente Definition, die vor allem für Beweise verwendet werden kann, lautet: f ist genau dann integrierbar, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P : \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

In Worten bedeutet das, dass es immer eine Partitionierung P gibt, für die sich die Unter- und Obersumme beliebig annähern.

Es gibt zwei wichtige Kriterien zur Integrierbarkeit:

Behauptung 4.1

1. Ist f stückweise stetig in einem kompakten Intervall $[a,b]$, so ist f über $[a,b]$ integrierbar.
2. Ist f monoton in einem kompakten Intervall $[a,b]$, so ist f über $[a,b]$ integrierbar.

Behauptung 4.2

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei $P_{(n)}$ eine Folge von Partitionierungen in n Teilintervalle, deren Feinheit ($\max_{i\leq n}\{|I_i|\}$) gegen 0 geht für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_{(n)}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ und das Intervall $I = [0,5]$. Prüfe, ob f auf I integrierbar ist und falls ja, berechne das Riemann-Integral von f über I.

Nach der Definition müssen wir also prüfen, ob

$$\sup \underline{S}(f,P) = \inf \overline{S}(f,P)$$

Am einfachsten wählen wir wie oben die uniforme Partitionierung, dann gilt also:

$$\sup \underline{S}(f,P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x) \cdot \frac{5-0}{n}$$

Da f auf I streng monoton steigend ist, ist das Infimum von f über I_i jeweils gegeben durch

$$\inf_{x\in I_i} f(x) = (0 + \frac{(i-1)(5-0)}{n})^2 = \frac{(i-1)^2 \cdot 25}{n^2}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\sup \underline{S}(f,P) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{(i-1)5}{n})^2 \cdot \frac{5}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5^3}{n^3} \frac{1}{6} n(2n^2 - 3n + 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{250n^3 - 375n^2 + 125n}{6n^3} \\
&= \frac{250}{6} = 41 + \frac{2}{3} = 41.66667
\end{aligned}$$

Die Obersumme lässt sich genau gleich berechnen und man wird feststellen, dass sie den selben Grenzwert annimmt.

Für die Berechnung der Summe wie im obigen Beispiel werden folgende Summen als Bekannt vorausgesetzt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2
\end{aligned}$$

Hands-On 1

1.1. Riemann-Summe
Berechne die folgenden Riemann-Summen ($S(f,P,\xi)$).

(a) $f(x) = x^2,\ P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\},\ \xi = \{0, 0.5, 1.5, 2\}$

(b) **Challenge:** $f(x) = \sin(x),\ P = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\},\ \xi = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$

1.2. Integral mit Hilfe der Unter- und Obersumme
Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Unter- und Obersumme:

(a) $\int_0^2 x^2 \mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b e^x \mathrm{d}x$

(c) **Challenge:** $\int_0^\pi \sin(x) \mathrm{d}x$

(d) **Challenge:** $\int_1^b \log(x) \mathrm{d}x$

1.3. Diverse Beweise
Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f integrierbar.
Hinweis: Wenn f gleichmässig stetig ist, gilt die folgende Implikation

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta : \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist f stetig.

(c) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Benutze dabei *nicht* den Hauptsatz der Integralrechnung.

(d) **Challenge:** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion (d.h. entweder monoton steigend oder monoton fallend). Dann ist f integrierbar (f muss dabei nicht stetig sein).

4.2 Stammfunktionen

Definition 4.6. *Stammfunktion*
Sei $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. F heisst Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in [a, b]$$

Beispiel. Sei $f(x) = 2x(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$. Dann ist $F(x) = x^2 + 3(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f, da $F'(x) = 2x = f(x)\,\forall x$ gilt.

Bemerkung: Wenn f integrierbar ist, heisst das nicht zwingend, dass auch eine Stammfunktion existieren muss.

Beispiel. Stückweise stetige Funktionen sind zwar integrierbar, haben aber nicht immer eine Stammfunktion. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls } x \leq 0 \\ 1, \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

definiert von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion ist integrierbar über jedes Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion hat sie aber nicht, denn die einzige Funktion, welche abgeleitet wieder $f(x)$ ergeben könnte, wäre

$$F(x) = \begin{cases} c_1, \text{falls } x \leq 0 \\ x + c_2, \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Es gilt nun $F'(x) = f(x)\,\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x = 0$ ist aber $F(x)$ nicht differenzierbar, da

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

Mithilfe der Stammfunktion kann das Integral effizient berechnet werden.

Definition 4.7. *Fundamentalsatz der Analysis*
Sei $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F(x)$ ihre Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Definition 4.8. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*
Sei $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren $F(x)$ für $a \leq x \leq b$ wie folgt:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Dann ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f.

Das Integral erfüllt ein paar wichtige Eigenschaften:

Behauptung 4.3

Linearität
Seien f und g integrierbare Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int_a^b u \cdot f(x) + v \cdot g(x)\mathrm{d}x = u \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + v \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Behauptung 4.4

Monotonie
Seien f und g integrierbare Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ und es gelte $f(x) \leq g(x) \quad \forall x$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Behauptung 4.5

Gebietsadditivität
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei $c \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Unbestimmtes Integral Das unbestimmte Integral einer Funktion entspricht der Stammfunktion von f. Man schreibt auch

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Zu jeder Funktion gibt es beliebig viele Stammfunktionen, die sich jeweils um eine Konstante c unterscheiden. Deshalb schreibt man im allgemeinen auch:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von f ist.

4.3 Berechnung der Integrale

Für die effiziente Berechnung eines Integrals $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ suchen wir immer zuerst die Stammfunktion $F(x)$ zu f. Dann berechnen wir ganz einfach

$$F(b) - F(a)$$

Um die Stammfunktion zu finden gibt es verschiedene Methoden.

Definition 4.9. *Polynome*
Es gilt:

$$\int c \cdot x^n \mathrm{d}x = \frac{c \cdot x^{n+1}}{n+1} \;\forall\, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Ein allgemeines Polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ kann mit Hilfe der Linearität ganz einfach integriert werden, indem man einfach jedes einzelne Glied nach der oben genannten Regel integriert und dann alle Resultate addiert.

Behauptung 4.6

Einige Integrale:

- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + c$
- $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c$
- $\int \log(x)\mathrm{d}x = x(\log(x) - 1) + c$
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log|x| + c$

4.3.1 Partielle Integration

Um Produkte von zwei Funktionen integrieren zu können, benötigen wir die sogenannte *partielle Integration.* Aus der Produktregel der Differentialrechnung folgt direkt:

Definition 4.10. *Partielle Integration*

$$\int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

- Für partielle Integration müssen wir immer entscheiden, welchen Faktor wir integrieren und welchen wir ableiten. Grundsätzlich leiten wir Polynome ab und sich wiederholende Funktionen ($\sin, \cos, e^x$ etc.) integrieren wir.
- Manchmal müssen wir künstlich mit 1 multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. $\int \log(x)\mathrm{d}x$).
- Wenn wir durch mehrfache partielle Integration wieder beim ursprünglichen Integral landen, können wir die erhaltene Gleichung nach diesem Integral auflösen, was uns direkt zur Lösung führt.

Beispiel. Berechne $\int_0^1 x \cdot e^x \mathrm{d}x$ mit partieller Integration.

Wir leiten x ab und integrieren e^x. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x}\mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} x \cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \\ &= x \cdot e^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 \\ &= e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

4.3.2 Substitution

Eine weitere Methode ist die sogenannte *Substitutionsmethode.* Dabei ersetzen wir eine gewisse Funktion $g(t)$ durch eine Variable x. Dabei müssen wir alle weiteren Vorkommen von t ersetzen, die Grenzen des Integrals anpassen (falls vorhanden), sowie die Integrationsvariable $\mathrm{d}t$ zu $\mathrm{d}x$ umformen.

Definition 4.11. *Substitution*
Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $I \subset \mathbb{R}$ mit $g([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Wichtig bei der Substitution sind folgende Punkte:

- Die Grenzen müssen ebenfalls substituiert werden durch $g(a)$ und $g(b)$.
- Alternativ kann man statt die Grenzen zu substituieren das unbestimmte Integral berechnen und zum Schluss die Variable x wieder durch t rücksubstituieren. In dieses Integral kann man dann die originalen Grenzen einsetzen.
- Berechnet man das unbestimmte Integral, darf am Schluss die Rücksubstitution nicht vergessen gehen.

Beispiel. Berechne $\int_0^2 x \cdot e^{x^2} \mathrm{d}x$

Wir substituieren $u = x^2$. Es gilt $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \iff \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \cdot e^{x^2} \mathrm{d}x &= \int_0^4 x \cdot e^u \frac{\mathrm{d}u}{2x} \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} e^u \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)\end{aligned}$$

Wir hätten hier auch partielle Integration anwenden können, was aber wesentlich komplizierter wäre.

4.3.3 Partialbruchzerlegung

Die letzte Methode, die wir ansprechen, behandelt die Integration von Polynom-Brüchen. Dabei verwendet man die sogenannte *Partialbruchzerlegung*.

Definition 4.12. *Partialbruchzerlegung*
Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome. Wir betrachten das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x$. Wir berechnen das Integral in mehreren Schritten:

1. *Prüfe den Grad von p und q. Falls $deg(p) \geq deg(q)$, dann führe eine Polynomdivision durch, so dass wir dann das äquivalente Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ erhalten. Die Schwierigkeit hat sich jetzt auf den Bruch $\frac{r(x)}{q(x)}$ reduziert. Fahre deshalb damit beim nächsten Schritt weiter.*
2. *Jetzt gilt sicher $deg(p) < deg(q)$. Berechne die Nullstellen von $q(x)$. Dabei handelt es sich oft um kubische Gleichungen. Dann muss eine Nullstelle erraten werden. Die Restlichen können dann mit Polynomdivision herausgefunden werden.*
3. *Für jede Nullstelle erstellen wir einen Partialbruch mit folgendem Ansatz:*
   a) *Einfache, reelle Nullstelle*
   $x_1 \to \frac{A}{x-x_1}$
   b) *r-fache, reelle Nullstelle*
   $x_1 \to \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
   c) *Einfache, komplexe Nullstelle*
   $x^2 + px + q \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$

d) r-fache, komplexe Nullstelle
$x^2 + px + q \rightarrow \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}$

Wir können jetzt alle Partialbrüche aufsummieren und erhalten unseren originalen Bruch.

4. *Als letztes müssen wir nur noch die Parameter $A_1...A_n$ (bzw. auch $B_1...B_n$) bestimmen. Dies machen wir mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs. Am besten veranschaulichen wir das anhand eines Beispiels:*

Beispiel. Wir zerlegen den Bruch $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ in die Partialbrüche $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ Dazu multiplizieren wir auf beiden Seiten mit dem gesamten Nenner $x^2 - 3x + 2$.

$$\begin{aligned} & x + 1 = A(x-2) + B(x-1) \\ \iff & x + 1 = Ax - 2A + Bx - B \\ \iff & x + 1 = x(A+B) - 2A - B \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $A + B = 1$ und $-2A - B = 1$ sein muss. Wenn wir dieses Gleichungssystem auflösen, erhalten wir

$$A = -2 \text{ und } B = 3$$
$$\implies \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

Beispiel. Berechne $\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}\mathrm{d}x$

Als erstes machen wir die Partialbruchzerlegung:

1. Wir prüfen den Grad des Zählers und des Nenners. In diesem Fall ist $deg(p) < deg(q)$, also müssen wir hier nichts tun.

2. Berechnen wir die Nullstellen vom Nenner. Diese sind 0, i und $-i$.

3. Für die erste Nullstelle (0) erhalten wir den Ansatz $\frac{A_1}{x}$.
Für die beiden komplexen Nullstellen erhalten wir den Ansatz

$$\frac{A_2x + B_2}{1 + x^2}$$

Im Nenner steht das Polynom, das als Nullstelle die beiden komplexen Lösungen $(i, -i)$ hat.

Addieren wir beide Ansätze, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x+B_2}{1+x^2}$$

4. Jetzt müssen wir nur noch A_1, A_2 und B_2 bestimmen. Multiplizieren wir mit dem Nenner, erhalten wir

$$\begin{aligned} & (1+x)^2 = A_1\cdot(1+x^2) + x(A_2x+B_2) \\ \iff & 1 + 2x + x^2 = A_1 + A_1x^2 + A_2x^2 + B_2x \\ \iff & x^2 + 2x + 1 = x^2(A_1 + A_2) + x(B_2) + A_1 \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt, dass $A_1 = 1, B_2 = 2$ und $A_2 = 0$. Insgesamt erhalten wir also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}$$

Nach der Partialbruchzerlegung müssen wir noch das eigentliche Integral berechnen.

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+x)^2}{x\cdot(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \log|x| + 2\arctan(x) + c\end{aligned}$$

Das zweite Teilintegral kann aus der Formelsammlung von einfachen Integralen entnommen werden.

Hands-On 2

2.1. Ableitungen von Integralfunktionen
Berechne von den folgenden Integralfunktionen jeweils die Ableitung:

(a) $f(x) = \int_0^{x^2} te^{\cos t}\mathrm{d}t$

(b) $g(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t$

(c) **Challenge:** $h(x) = \int_{|x|}^{x^2} t\mathrm{d}t$

(d) **Challenge:** $i(x) = \int_1^{3x} \frac{cosh(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

2.2. Partielle Integration
Berechne die folgenden Integrale mit partieller Integration:

(a) $\int x\log(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x$

Leite mit Hilfe partieller Integration die folgenden Rekursionsformeln her:

(c) $a_n := \int(\log x)^n\mathrm{d}x = x\cdot(\log x)^n - na_{n-1},\ n\in\mathbb{N}$
Bestimme ein geeignetes a_0.

(d) **Challenge:** $b_n := \int x^t(\log x)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{t+1}(x^{t+1}(\log x)^n - nb_{n-1}),\ n\in\mathbb{N}, t\neq -1$
Bestimme ein geeignetes b_0.

2.3. Substitution
Berechne die folgenden Integrale mit Substitution:

(a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x$

(b) $\int x(x^2+1)^{42}\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, wobei $a>0$

(d) $\int \frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^2 x^2\log(1+x^3)\mathrm{d}x$

(f) $\int_0^1 2x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$

2.4. Partialbruchzerlegung
Berechne die folgenden Integrale mit Partialbruchzerlegung:

(a) $\int \frac{x^3+2x^2-4x+2}{(x-1)(x+3)}\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{x^3+4x+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$

(c) **Challenge:** $\int \frac{1-x}{(x+5)^2}\mathrm{d}x$

(d) **Challenge:** $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$

2.5. Gemischte Aufgaben

Berechne die folgenden Integrale. Benutze dazu eine beliebige Methode, die dir sinnvoll erscheint.

(a) $\int \log(x)(x^2-1)\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\mathrm{d}x$

(c) $\int x\log^2(x)\mathrm{d}x$

(d) **Challenge:** $\int \frac{\sin^2(\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$

(e) **Challenge:** $\int \frac{\cos x}{\sin^2(x)+\sin(x)-6}\mathrm{d}x$

2.6. Beweise

Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig integrierbare Funktion. Dann existiert ein $c \in (a,b)$, so dass

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist f beschränkt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \, \forall x \in [a,b]$

(c) Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige (und somit integrierbare) Funktion. Dann existiert $c \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a)$$

(d) Erweiterter Mittelwertsatz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert $c \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(e) **Challenge:** Erweiterter Mittelwertsatz 2: Betrachte die vorherige Aufgabe. Wie sieht es aus, wenn entweder $g \geq 0$ oder $g \leq 0$ für alle x?

4.4 Uneigentliche Integrale

Ein Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bezeichnet man als *uneigentlich*, wenn eine oder beide Grenzen (a und b) des Integrals nicht im Definitionsbereich von f liegen. Die genaue Definition lautet wie folgt:

Definition 4.13. *Sei $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert auf dem offenen Intervall (a,b) und sei f auf allen Intervallen $[c,d]$ mit $c,d \in (a,b)$ integrierbar. Dann lautet das sogenannte uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ definiert als:*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c \to a^+} \lim_{d \to b^-} \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

Dies gilt unter anderem auch für die folgenden Integrale:

1. $$f(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. $$f(x) : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x$$

3. Achtung:
$$f(x) : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}(\text{ also } \mathbb{R} \to \mathbb{R}), \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
Beachte, dass hier zwei Limes vor dem Integral stehen. Das ist nicht das selbe wie $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c f(x)\mathrm{d}x$
Betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Dann gilt $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ist nicht definiert. Man könnte meinen, es gelte $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\big|_{-c}^c = 0$, was aber nicht korrekt ist.

Definition 4.14. *Ein uneigentliches Integral bezeichnet man als konvergent, wenn der Grenzwert existiert (das heisst er nimmt einen Wert aus $\mathbb{R}$ an). Ansonsten bezeichnet man es als divergent.*

Wie kann man abschätzen, ob ein uneigentliches Integral konvergiert oder nicht? Grundsätzlich gilt, dass man ganz einfach den Grenzwert des bestimmten Integrals versucht zu berechnen.

Beispiel. Bestimme, ob $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ konvergiert, und wenn ja, welchen Wert es annimmt.

Laut Definition des unbestimmten Integrals können wir es umschreiben zu:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b} - \frac{-1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert das Integral und hat Wert 1.

Weitere Konvergenzkriterien: Manchmal ist es nicht so leicht, das Integral zu berechnen. Trotzdem möchte man abschätzen können, ob es konvergiert oder nicht. Dafür gibt es einige Kriterien welche sehr ähnlich zu den Kriterien für Reihen sind:

Behauptung 4.7

Es gilt:
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \iff s > 1$$

Bemerkung: Dieses Kriterium ist ähnlich zur Riemannschen Zeta-Funktion.

Behauptung 4.8

Vergleichskriterium
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig mit $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \text{ konvergent} \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ konvergent}$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ divergent} \implies \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \text{ divergent}$$

Definition 4.15. *Absolute Konvergenz*
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *konvergiert absolut, wenn* $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ *konvergiert.*
Aus absoluter Konvergenz folgt normale Konvergenz.

Bemerkung: Diese beiden Kriterien entsprechen den gleichnamigen Kriteriun für Reihen.

Beispiel. Untersuche das folgende Integral auf Konvergenz, ohne es zu berechnen:

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$$

Das uneigentliche Integral lässt sich umschreiben zu

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$$

Wir müssen das Integral jetzt geschickt abschätzen. Das tun wir, indem wir es aufteilen in

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x + \int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x\\ =&\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Das erste Integral ist nicht mehr uneigentlich und hat einen konstanten Wert aus $\mathbb{R}$, da $\frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}$ stetig über $[0,1]$ ist. Das zweite Integral untersuchen wir weiter:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x &\geq \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{2}}\Big|_1^t = \infty\end{aligned}$$

Insgesamt konvergiert also das uneigentliche Integral nicht.

Hands-On 3

3.1. Uneigentliche Integrale berechnen
Bestimme für die folgenden uneigentlichen Integrale, ob sie existieren und berechne gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int_e^\infty \frac{(\log x)^n}{x}\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{Z}$
Hinweis: Betrachte den Fall $n=-1$ getrennt.

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$

(c) **Challenge:** $\int_0^\infty 4x^2e^{-2x}\mathrm{d}x$

(d) **Challenge:** $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$

Bestimme für die folgenden Integrale lediglich, ob sie konvergieren:

(e) $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})\mathrm{d}x$

(f) **Challenge:** $\int_0^1 (\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t})\mathrm{d}t$

4.5 Lösungen

4.5.1 Lösungen Hands-On 1

1.1

(a) Wir benutzen einfach die Definition der Riemann-Summe:

$$\begin{aligned} S(f,P,\xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(0)\cdot 0.5 + f(0.5)\cdot 0.5 + f(1.5)\cdot 0.5 + f(2)\cdot 0.5 \quad = 0.5\cdot(0^2+0.5^2+1.5^2+2^2) = 3.25 \end{aligned}$$

(b) **Challenge:**

1.2

Für die folgenden Riemann-Summen benutzen wir jeweils die uniforme Partitionierung.

(a) Da x^2 stetig im Intervall $[0,2]$ ist, existiert das Integral. Deshalb berechnen wir einfach die Obersumme:

$$\begin{aligned} \inf \overline{S}(f,P) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in I_i} f(x)\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n})^2\cdot\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(b) Auch hier wissen wir, dass das Integral existieren muss, deshalb berechnen wir wiederum die Obersumme:

$$\begin{aligned} \inf \overline{S}(f,P) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in I_i} f(x)\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{a+i\frac{b-a}{n}}\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot e^a\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{b-a}{n}})^i \\ &\overset{geom. Reihe}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot e^a\frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} \\ &= (b-a)e^a(1-e^{b-a})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1-e^{\frac{b-a}{n}})} \\ &= (b-a)e^a(1-e^{b-a})\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} \\ &\overset{dH}{=} (b-a)e^a(1-e^{b-a})\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{b-a}{n^2}e^{\frac{b-a}{n}}} \\ &= (b-a)e^a(1-e^{b-a})\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{(b-a)e^{\frac{b-a}{n}}} \\ &= (b-a)e^a(1-e^{b-a})\frac{-1}{b-a} \\ &= e^b - e^a \end{aligned}$$

(c) **Challenge:**

(d) **Challenge:**

1.3

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zuerst bemerken wir, dass f auf $[a, b]$ auch gleichmässig stetig ist, da es auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ "normal" (also punktweise) stetig ist. Wir wollen zeigen, dass das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existiert. Dafür muss also gelten:

$$\sup_{P_1} \underline{S}(f, P_1) = \inf_{P_2} \overline{S}(f, P_2)$$
$$\sup_{P_1} \underline{S}(f, P_1) - \inf_{P_2} \overline{S}(f, P_2) = 0$$

Wir strukturieren den Beweis wie folgt: Wir zeigen, dass die Differenz der Unter- und Obersumme beliebig klein werden kann. Das heisst, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Partitionierung P gibt, so dass $|\underline{S}(f, P) - \overline{S}(f, P)| < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists P : \, |\underline{S}(f, P) - \overline{S}(f, P)| < \epsilon$$

Sei also ein beliebiges $\epsilon > 0$ gegeben. Wir suchen eine entsprechende Partitionierung P mit Feinheit $\delta = \max |I_i| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$. Da f gleichmässig stetig auf $[a, b]$ ist, gilt

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta : \, \forall x, y \in [a, b] : \, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir also können zu dem gegebenen ϵ ein δ wählen, das die folgende Implikation erfüllt

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Betrachten wir die Differenz der Unter- und Obersumme einmal genauer:

$$\begin{aligned}
|\underline{S}(f, P) - \overline{S}(f, P)| &= |\sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|\inf_{x \in I_i} f(x) - \sup_{x \in I_i} f(x)|) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
\text{(da } f \text{ stetig)} &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b - a} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{\epsilon}{b - a} (b - a) = \epsilon
\end{aligned}$$

(b) Diese Aussage stimmt nicht. Wir zeigen ein Gegenbeispiel:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \, f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

f ist integrierbar über $[-1, 1]$ mit $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1$ (lässt sich leicht mit der Riemann-Summe nachrechnen). Aber offensichtlich ist f nicht stetig bei $x = 0$.

(c) Wir schreiben beide Integrale als Riemann-Summe, wobei wir die uniforme Partitionierung verwenden.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot \frac{b - a}{n}$$

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot \frac{a - b}{n}$$

Wir können die zweite Summe wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i} f(x)\cdot\frac{a-b}{n} &= lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i} f(x)\cdot -1\cdot\frac{b-a}{n}\\ &= -1\cdot lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in I_i} f(x)\cdot\frac{b-a}{n}\\ &= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(d) **Challenge:**

4.5.2 Lösungen Hands-On 2

2.1

(a) Sei $K(t)$ eine Stammfunktion von $k(t) = te^{\cos t}$. Dann ist $f(x) = K(x^2) - K(0)$ und damit $f'(x) = k(x^2) \cdot 2x = 2x^3 e^{\cos x^2}$.

(b) Sei $K(t)$ eine Stammfunktion von $k(t) = \sin(t)\cos(t)$. Dann ist $g(x) = K(x + \frac{\pi}{2}) - K(x)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= k(x + \frac{\pi}{2}) - k(x) \\ &= \sin(x + \frac{\pi}{2})\cos(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(x)\cos(x) \\ &= -\cos(x)\sin(x) - \sin(x)\cos(x) \\ &= -2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

(c) **Challenge:** Berechnen wir h.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{|x|}^{x^2} t \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_{|x|}^{x^2} \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_{|x|}^{x^2} \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{|x|^2}{2} \\ &= \frac{x^4 - x^2}{2} \end{aligned}$$

Somit folgt $h'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2} = 2x^3 - x$.

(d) **Challenge:** Sei $K(t)$ eine Stammfunktion von $k(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2}$. Dann ist $i(x) = K(3x) - K(1)$ und damit $i'(x) = k(3x) \cdot 3 = \frac{\cosh(3x)}{9x^2} 3 = \frac{\cosh(3x)}{3x^2}$.

2.2

(a)

$$\begin{aligned} \int \underset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\log(x)} \mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} \\ &= \frac{x^2}{2}(\log(x) - \frac{1}{2}) + c \end{aligned}$$

(b) In dieser Aufgabe müssen wir zwei Mal partielle Integration anwenden.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \underset{\uparrow}{e^{-x}} \underset{\downarrow}{\sin(2x)} \mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} -e^{-x}\sin(2x)\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{PI}}{=} -e^{-x}\sin(2x)\Big|_0^{2\pi} + 2(-e^{-x}\cos(2x)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x) \\ &= 0 + 2(1 - e^{-2\pi}) - 4\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\iff 5\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x = 2(1 - e^{-2\pi})$$

$$\iff \int_0^{2\pi} e^{-x}\sin(2x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(1 - e^{-2\pi}) + c$$

(c)

(d) **Challenge:**

2.3

(a) Wir substituieren $u = x^2 + 3x + 1$, also $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x + 3$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{2x+3}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x+3} \\ &= \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \log|u| + c = \log|x^2+3x+1| + c\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $u = x^2 + 1$, also $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$.

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^{42}\mathrm{d}x &= \int xu^{42}\frac{\mathrm{d}u}{2x} \\ &= \int \frac{u^{42}}{2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{43}}{86} + c = \frac{(x^2+1)^{43}}{86} + c\end{aligned}$$

(c) Wir substituieren $x = au$, also $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a^2+a^2u^2}a\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{a}\arctan(u) + c \\ &= \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c\end{aligned}$$

(d) Wir substituieren $u = \log x$, also $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \log|u| + c \\ &= \log|\log x| + c\end{aligned}$$

(e) Wir sehen dass $3x^2$ die Ableitung von $1 + x^3$ ist. Wir substituieren also $u = 1 + x^3$, somit folgt $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$ und wir erhalten :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\log(1+x^3)\mathrm{d}x &= \int_1^9 \log(u)\frac{1}{3}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\int_1^9 \underset{\uparrow}{1}\cdot\underset{\downarrow}{\log(u)}\mathrm{d}u \\ &\overset{\text{PI}}{=} \frac{1}{3}\left(u\log(u)\Big|_1^9 - \int_1^9 u\frac{1}{u}\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{1}{3}(9\log 9 - 0 - 8) \\ &= 6\log 3 - \frac{8}{3}\end{aligned}$$

(f) Wir substituieren $u = x^2$, somit folgt $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ und wir erhalten :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2x^3 e^{x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \underset{\downarrow\,\uparrow}{ue^u}\mathrm{d}u \\
&\overset{\mathrm{PI}}{=} ue^u\Big|_0^1 - \int_0^1 e^u \mathrm{d}u \\
&= e - (e-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.4

(a) Wir sehen, dass der Zähler einen höheren Grad als der Nenner hat. Das heisst, wir müssen eine Polynomdivision durchführen. Dann erhalten wir

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x+3)} = x + \frac{2-x}{(x-1)(x+3)}$$

Vom zweiten Bruch müssen wir jetzt eine Partialbruchzerlegung machen. Die Nullstellen sind natürlich $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Damit lautet unser Ansatz:

$$\begin{aligned}
&\frac{2-x}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \\
\iff &\ 2 - x = A(x+3) + B(x-1) \\
\iff &\ 2 - x = x(A+B) + (3A - B)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, dass $A = \frac{1}{4}$ und $B = -\frac{5}{4}$. Das heisst, wir können das gesamte Integral umschreiben zu

$$\begin{aligned}
\int \frac{2-x}{(x-1)(x+3)}\mathrm{d}x &= \int x + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{5}{4(x+3)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{\log|x-1|}{4} - \frac{5\log|x+3|}{4} + c
\end{aligned}$$

(b) Da der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist, müssen wir keine Polynomdivision durchführen. Wir müssen also direkt die Nullstellen des Nenners finden. Wir erhalten die beiden komplex konjugierten Nullstellen $x_1 = \pm i$ und $x_2 = \pm 2i$. Damit wählen wir als Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3 + 4x + 3}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2+4} \\
\iff &\ x^3 + 4x + 3 = (A_1 x + B_1)(x^2+4) + (A_2 x + B_2)(x^2+1) \\
\iff &\ x^3 + 4x + 3 = A_1 x^3 + 4A_1 x + B_1 x^2 + 4B_1 + A_2 x^3 + A_2 x + B_2 x^2 + B_2 \\
\iff &\ x^3 + 4x + 3 = x^3(A_1 + A_2) + x^2(B_1 + B_2) + x(4A_1 + A_2) + (4B_1 + B_2)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Parameter $A_1 = 1$, $B_1 = 1$, $A_2 = 0$ und $B_2 = -1$. Damit können wir das Integral wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + 4x + 3}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x &= \int \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Das erste Integral berechnen wir durch Substitution $u = x^2 + 1$:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\log|x^2+1|}{2}$$

Das zweite Integral können wir aus der Formelsammlung ablesen:

$$\int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \arctan(x)$$

Das dritte Integral können wir zusammen mit einer Substitution und der Formelsammlung berechnen. Klammern wir als erstes $\frac{1}{4}$ aus, erhalten wir

$$\frac{1}{x^2+4} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} \mathrm{d}x$$

Substituieren wir $u = \frac{x}{2}$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Setzen wir alles zusammen, erhalten wir die Lösung:

$$\int \frac{x^3+4x+3}{(x^2+1)(x^2+4)} \mathrm{d}x = \frac{\log|x^2+1|}{2} + \arctan(x) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

(c) **Challenge:**

(d) **Challenge:**

2.5

(a) Wir benutzen partielle Integration

$$\begin{aligned} \int \underset{\downarrow}{\log(x)}\underset{\uparrow}{(x^2-1)} \mathrm{d}x &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \log(x) - \int \frac{x^2}{3} - 1 \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \log(x) - \frac{x^3}{9} + x + c \end{aligned}$$

(b) Wir benutzen die Partialbruchzerlegung. Als erstes sehen wir, dass der Zähler den gleichen Grad wie der Nenner hat, also müssen wir zuerst eine Polynomdivision durchführen:

$$\frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2} = 9 + \frac{9x^2-3x+1}{x^3-x^2}$$

Vom zweiten Bruch führen wir jetzt die Partialbruchzerlegung durch. Wir sehen, dass $x_1 = 0$ eine doppelte Nullstelle ist und $x_2 = 1$ eine Einfache. Der Ansatz ist also

$$\begin{aligned} \frac{9x^2-3x+1}{x^3-x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \\ \iff 9x^2-3x+1 &= Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 \\ \iff 9x^2-3x+1 &= x^2(A+C) + x(B-A) - B \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 2$, $B = -1$ und $C = 7$. Das Integral lässt sich also wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2} \mathrm{d}x &= \int 9 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x-1} \mathrm{d}x \\ &= 9x + 2\log|x| + \frac{1}{x} + 7\log|x-1| + c \end{aligned}$$

(c) Wir verwenden partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int \underset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\log^2(x)}\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int \frac{x}{2} 2\log x \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int x\log x \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \left(\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{x^2}{4}
\end{aligned}$$

(d) **Challenge:**

(e) **Challenge:**

2.6

(a) Da f integrierbar ist, existiert eine Stammfunktion $F(x)$ zu f. F ist natürlich stetig auf $[a, b]$, da sie differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$.
Wir wollen zeigen, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Betrachten wir also mal die Funktion

$$\begin{aligned}
G(t) &= \int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \int_t^b f(x)\mathrm{d}x \\
&= F(t) - F(a) - F(b) + F(t) \\
&= 2F(t) - F(a) - F(b)
\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt also die Existenz einer Nullstelle von G beweisen. Das geht am einfachsten über den Zwischenwertsatz. G ist auch stetig, da G die Differenz zweier stetiger Funktionen ist. Um den ZWS anwenden zu können, müssen wir einen Wert ≥ 0 und ≤ 0 finden. Berechnen wir dazu $G(a)$ und $G(b)$:

$$\begin{aligned}
G(a) &= 2F(a) - F(a) - F(b) = F(a) - F(b) \\
G(b) &= 2F(b) - F(a) - F(b) = F(b) - F(a) = -G(a)
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $G(a)$ und $G(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben (sofern beide $\neq 0$ sind). Falls entweder $G(a) = 0$ oder $G(b) = 0$, dann wäre das jeweils die gesuchte Nullstelle. Ansonsten gilt mit dem ZWS, dass eine Nullstelle $c \in (a, b) : G(c) = 0$ existieren muss.

(b) Wir zeigen die Behauptung indirekt. Sei f unbeschränkt, dann kann f nicht integrierbar sein. O.b.d.A. nehmen wir an, f sei nach oben unbeschränkt. Wir wollen zeigen, dass f nicht integrierbar sein kann, also dass

$$\exists \epsilon > 0 \, \forall P : |\underline{S}(f, P) - \overline{S}(f, P)| > \epsilon$$

Wählen wir also ϵ beliebig, z.B. $\epsilon = 1$. Wir wollen jetzt zeigen, dass für alle Partitionierungen P von $[a, b]$ die Differenz der Ober- und Untersumme grösser als ϵ wird.
Sei P eine beliebige Partitionierung. Da f nach oben unbeschränkt ist, gibt es zu P ein Teilintervall I_{i_0}, über dem f unbeschränkt ist, also $\sup_{x \in I_{i_0}} f(x) = \infty$. O.b.d.A. sei f nur in diesem Teilintervall

unbeschränkt Damit können wir die Differenz der Ober- und Untersumme umschreiben zu

$$\begin{aligned}
|\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)| &= |\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in I_i} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in I_i} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|\inf_{x\in I_i} f(x) - \sup_{x\in I_i} f(x)|)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \underbrace{(|\inf_{x\in I_{i_0}} f(x) - \sup_{x\in I_{i_0}} f(x)|)}_{=\infty \text{ da } f \text{ nach oben unbeschränkt in } I_{i_0}} \cdot(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \sum_{1\leq i\neq i_0\leq} (|\inf_{x\in I_i} f(x) - \sup_{x\in I_i} f(x)|)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \infty > 1 = \epsilon
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle Partitionierungen, demnach kann f nicht integrierbar sein, falls f unbeschränkt ist.
Der selbe Beweis kann für f nach unten unbeschränkt bzw. für f in mehreren Teilintervallen unbeschränkt durchgeführt werden.

(c) Wir schränken das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ein. Sei $s = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $S = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& s \leq f(x) \leq S \,\forall x \in [a,b] \\
\Longrightarrow & \int_a^b s\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b S\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow & \; s(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq S(b-a)
\end{aligned}$$

Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $c \in [a,b]$, so dass gilt

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

wie gewünscht.

(d) Diese Aussage gilt nicht generell. Wir zeigen dies anhand eines Gegenbeispiels. Seien $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) = x$. Dann müsste gelten

$$\exists c \in [-1,1] : \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = c\cdot \int_{-1} 1x\mathrm{d}x$$

So ein c kann aber nicht existieren, da

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = c\cdot \int_{-1} 1x\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow & \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = c\cdot(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}) \\
\Longleftrightarrow & \frac{2}{3} = c\cdot 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für kein $c \in [-1,1]$ erfüllbar.

(e) **Challenge:** Wir schränken das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ein. Sei $s = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ und $S = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Weil entweder $g \leq 0$ oder $g \geq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
& sg(x) \leq f(x)g(x) \leq Sg(x) \,\forall x \in [a,b] \\
\Longrightarrow & \int_a^b sg(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b Sg(x)\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow & \; s\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq S\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow & \; s \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq S
\end{aligned}$$

Da f und g stetig sind, gibt es nach dem ZWS ein $c \in [a, b]$, so dass gilt

$$
\begin{aligned}
f(c) &= \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \\
\iff f(c) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

wie gewünscht.

4.5.3 Lösungen Hands-On 3

3.1

(a) Betrachten wir zuerst den Fall $n = -1$:
Substituieren wir $u = \log(x)$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{1}{x\log(x)}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_{\log(e)}^{\log(b)} \frac{1}{u}\mathrm{d}u\\ &= \lim_{b\to\infty} \log(u)\Big|_1^{\log(b)}\\ &= \lim_{b\to\infty} \log(\log(b)) = \infty\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt $n \neq -1$ und benutzen wir die selbe Substitution erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_e^\infty \frac{(\log x)^n}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_{\log(e)}^{\log(b)} u^n\mathrm{d}u\\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1}\Big|_1^{\log(b)}\\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{\log(b)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\\ &= \begin{cases}\infty, & n > -1\\ -\frac{1}{n+1}, & n < -1\end{cases}\end{aligned}$$

Das Integral konvergiert also für alle $n < -1$ und hat dann den Wert $-\frac{1}{n+1}$.

(b) Dieses Integral konvergiert nicht, da es im Intervall $[0,\infty)$ nicht beschränkt ist ($\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \infty$).

(c) **Challenge:**

(d) **Challenge:**

(e) Wir können $\sin(x)$ abschätzen, wenn x sehr klein ist. Dann gilt $\sin(x) \approx x$. Notieren wir das etwas formaler, gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall 0 < x \leq c : \sin(x) \approx x$$

Das kann man umschreiben zu

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \geq c : \sin(\frac{1}{x}) \approx \frac{1}{x}$$

Wir teilen das Integral also in zwei Teile auf

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^c \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_c^b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_1^c \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert, da es über einem kompakten Intervall gemacht wird und die Funktion beschränkt ist. Das zweite Integral konvergiert allerdings nicht, denn hier können wir die oben erwähnte Abschätzung vornehmen:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_c^b \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &\approx \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= \infty\end{aligned}$$

Dabei wissen wir, dass das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ divergiert.

(f) **Challenge:**